Գ. Գ. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ
Ա. Ա. ՍԱՀԱԿՅԱՆ

ՀԱՆՐԱՀԱՇԻՎ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր

(ընդհանուր և հումանիտար հոսքերի համար)

Երևան
Էդիթ Պրինտ
2009

Հաստատված է ՀՀ Կրթության և գիտության նախարարության կողմից
Approved by the Ministry of Education and Science of RA

ՀՏԴ 373.167.1:512(075)
ԳՄԴ 22.14 g72
Գ 479

Գևորգյան Գ.Գ., Սահակյան Ա.Ա.
Գ 479 Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր: Հանրակրթ. դպր. 10-րդ դաս. դասագիրք (ընդհանուր և հումանիտար հոսքերի համար).- Եր.: Էդիթ Պրինտ, 2009.- 136 էջ:

Խմբագիր Է. Այվազյան
Համակարգչային աշխատանքները՝ Ն. Գևորգյանի

ԳՄԴ 22.14 g72

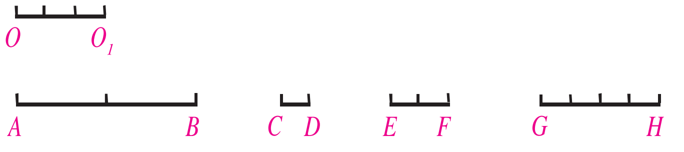
ISBN 978-9939-52-112-1

Գլուխ 1

Իրական թվեր

§1. Բնական, ամբողջ և ռացիոնալ թվեր

Մեր ծանոթությունը թվերին սկսվել է ***բնական թվերից***՝ 1, 2, 3, ...: Դրանք օգտագործել ենք հաշվման և համարակալման համար: Հետո զգացվել է կոտորակների անհրաժեշտությունը: Դիտարկենք, օրինակ, հատվածների երկարությունների չափման խնդիրը, չափենք նկ. 1-ում պատկերված AB, CD, EF, GH հատվածների երկարությունները՝ չափման միավոր վերցնելով OO_1 հատվածը. $OO_1 = 1$ միավորի:



Նկ. 1

AB հատվածը երկու անգամ երկար է OO_1-ից, ուրեմն՝ $AB = 2$:

CD հատվածը երեք անգամ կարճ է OO_1-ից, ուրեմն՝ $CD = 1/3$:

EF հատվածը երկու անգամ երկար է CD-ից, ուրեմն՝ $EF = 2/3$:

GH հատվածը չորս անգամ երկար է CD-ից, ուրեմն՝ $GH = 4/3$:

Այսպիսով՝ արդեն չափման պարզագույն խնդիրներում առաջանում է կոտորակների ներմուծման անհրաժեշտություն: Հիշենք, որ կոտորակները m/n տեսքի թվերն են, որտեղ m-ը և n-ը բնական թվեր են: Բնական թվերը նույնպես կոտորակներ են՝ $1 = 1/1$, $5 = 5/1$, $4 = 8/2$, $11 = 1518/138$ և այլն:

Վեցերորդ դասարանում դուք ծանոթացել եք բացասական ամբողջ թվերին և բացասական կոտորակային թվերին: Հիշեցնենք, որ բնական թվերը, նրանց հակադիր թվերը և զրոն կազմում են ***ամբողջ թվերի*** բազմությունը:

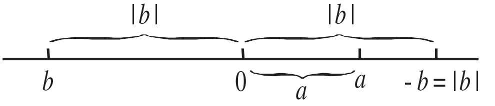
Դրական ու բացասական կոտորակային թվերը և զրոն կազմում են ***ռացիոնալ թվերի*** բազմությունը:

Յուրաքանչյուր ռացիոնալ թիվ կարելի է ներկայացնել p/q տեսքով, որտեղ p-ն ամբողջ թիվ է, իսկ q-ն՝ բնական: Ռացիոնալ թվերը կարելի է պատկերել թվային ուղղի վրա:

Թվային ուղիղ են անվանում այն ուղիղը, որի վրա նշված է երկու կետ, որոնցից մեկը համապատասխանում է 0 թվին, մյուսը՝ 1-ին:

0-ի և 1-ի միջև հեռավորությունը համարվում է չափման միավոր: Դրական ռացիոնալ a թիվը պատկերվում է 0-ից a միավոր հեռու կետում, նույն կողմում, ինչ որ 1-ը (նկ. 2):

Բացասական ռացիոնալ b թիվը պատկերվում է հակադիր կողմում՝ 0-ից $|b| = -b$ հեռավորությամբ: Այսպիսով՝ հակադիր ռացիոնալ թվերը թվային ուղղի վրա պատկերվում են 0-ի տարբեր կողմերում, 0-ից նույն հեռավորությամբ (նկ. 2):



Նկ. 2

Ընդունված է թվային ուղիղը պատկերել հորիզոնական գծով և 1-ը պատկերել 0-ից աջ: Այս պայմանով դրական թվերը պատկերվում են զրոյից աջ, իսկ բացասականները՝ զրոյից ձախ: Զրոն բաժանում է դրական թվերի և բացասական թվերի բազմությունները: Առհասարակ, եթե $a > b$, ապա a-ն թվային ուղղի վրա b-ից աջ է:

Բնական թվերի բազմությունն ընդունված է նշանակել $\mathbf{N}$ տառով, ամբողջ թվերի բազմությունը՝ $\mathbf{Z}$-ով, իսկ ռացիոնալ թվերինը՝ $\mathbf{Q}$-ով: Պարզ է, որ $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$:

Բնական թվերը սովորաբար գրառում ենք տասական համակարգում: Այդ նպատակով օգտագործում ենք 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 թվանշանները: Բնական թվի տասական գրելաձևը դիրքային է. այստեղ կարևոր է թվի գրության մեջ թվանշանի դիրքը:

Օրինակ՝ 3534 թվի գրության մեջ երկու անգամ հանդիպող 3 թվանշաններից առաջինը նշանակում է $3 \cdot 10^3$, իսկ երկրորդը՝ $3 \cdot 10^1$: Այս թիվը բացված տեսքով (կարգային գումարելիների գումարի տեսքով) գրվում է այսպես՝

$$3534 = 3 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 :$$

Կոտորակային թվերը գրառելու համար օգտագործել ենք ինչպես սովորական, այնպես էլ տասնորդական կոտորակները: Իհարկե, գիտենք, որ ամեն մի վերջավոր տասնորդական կոտորակ կարելի է գրել սովորական կոտորակի տեսքով, այսինքն՝ վերջավոր տասնորդական կոտորակները ռացիոնալ թվեր են: Օրինակ՝ $0{,}13 = \dfrac{13}{100}$, $12{,}25 = 12\dfrac{25}{100} = \dfrac{49}{4}$ և այլն:

$$\begin{array}{r|l} -\mathbf{3}0 & \mathbf{8} \\ \underline{24} & \overline{0{,}375} \\ -60 & \\ \underline{56} & \\ -40 & \\ \underline{40} & \\ 0 & \end{array}$$

Այժմ փորձենք սովորական կոտորակները գրել տասնորդական կոտորակի տեսքով: Օրինակ՝ 3/8-ը տասնորդական կոտորակի տեսքով գրելու համար 3-ն անկյունաձև բաժանում ենք 8-ի և ստանում 0,375:

Եթե նույն բանն անենք 1/3-ի հետ, ապա բաժանումը չի ավարտվի, և կստանանք անվերջ տասնորդական կոտորակ՝

$$\begin{array}{r|l} -\mathbf{1}0 & \mathbf{3} \\ \underline{9} & \overline{0{,}333\ldots} \\ -10 & \\ \underline{9} & \\ -10 & \\ 9 & \end{array}$$

$$\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots :$$

Այսպիսով՝ $1/3$-ի տասնորդական գրության մեջ ստորակետից հետո անվերջ կրկնվում է 3 թվանշանը: Այդ փաստը գրառում են այսպես.

$$\frac{1}{3}=0,(3):$$

Եթե $52/185$-ը գրենք տասնորդական կոտորակով, կստանանք $0,2810810810\ldots$: Այս դեպքում ստորակետից հետո երկրորդ նիշից սկսած անվերջ կրկնվում է 810-ը: Հետևաբար՝

$$\frac{52}{185}=0,2(810):$$

Դիտարկված երկու օրինակում ստացանք, որ $1/3$ և $52/185$ սովորական կոտորակները գրվում են ***անվերջ պարբերական տասնորդական կոտորակի*** տեսքով. նրանց տասնորդական գրառման մեջ, ինչ-որ տեղից սկսած, թվանշանների մի խումբ (կամ մի թվանշան) անվերջ կրկնվում է: Ահա այդպիսի ևս մի քանի օրինակ.

$$\frac{23}{99}=0,(23),\quad \frac{203}{165}=1,2(30),\quad \frac{3}{7}=0,(428571):$$

Յուրաքանչյուր ռացիոնալ թիվ գրվում է վերջավոր տասնորդական կոտորակի կամ անվերջ պարբերական տասնորդական կոտորակի տեսքով:

Նկատենք նաև, որ

յուրաքանչյուր անվերջ պարբերական տասնորդական կոտորակ որոշակի ռացիոնալ թվի տասնորդական գրառում է:

Տեսնենք, թե ո՞ր ռացիոնալ թիվն է $0,(7)$-ը: Ակնհայտ է, որ այդ թիվը՝ $0,777\ldots$-ը, հավասար է

$$\frac{7}{10}+\frac{7}{100}+\frac{7}{1000}+\cdots$$

անվերջ գումարին, որը $7/10$ առաջին անդամով և $1/10$ հայտարարով անվերջ նվազող երկրաչափական պրոգրեսիայի գումարն է: Հետևաբար՝

$$0,(7)=\frac{7/10}{1-1/10}=\frac{7}{9}:$$

Նման ձևով ստացվում է, որ

$$1,2(71)=1,2+\frac{71}{1000}+\frac{71}{100000}+\cdots=1,2+\frac{\frac{71}{1000}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{1259}{990}:$$

Գործնական կիրառություններում անվերջ տասնորդական կոտորակով ներկայացվող թիվը մոտավոր ներկայացնում են վերջավոր տասնորդական կոտորակով: Ամեն անգամ թողնում են այնքան տասնորդական նիշ, որ սխալը լինի թույլատրելի: Մենք բազմիցս կկիրառենք այս մոտեցումը:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ո՞ր թվերն են օգտագործում հաշվելու և համարակալելու համար:
2. Ո՞ր թվերից է կազմված ամբողջ թվերի բազմությունը:
3. Ո՞ր թվերից է կազմված ռացիոնալ թվերի բազմությունը:
4. Ո՞րն է կոչվում թվային ուղիղ, և ի՞նչն է նրա չափման միավորը:
5. Թվային ուղղի վրա 0-ի ո՞ր կողմում են պատկերվում դրական և ո՞ր կողմում՝ բացասական թվերը:
6. Ո՞ր բազմություններն են նշանակում $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$ տառերով:
7. Բնական թվերը տասական համակարգում գրառելու համար ո՞ր թվանշաններն են օգտագործում:
8. 25678 թիվն ինչպե՞ս է գրվում կարգային գումարելիների գումարի տեսքով:
9. Ամեն մի վերջավոր տասնորդական կոտորակ գրվո՞ւմ է արդյոք սովորական կոտորակի տեսքով:
10. Ո՞ր թվերն են գրվում անվերջ պարբերական կամ վերջավոր տասնորդական կոտորակով:

Առաջադրանքներ

1. Թվային ուղղի վրա պատկերել $a=1{,}6$, $b=-1{,}7$, $c=14/11$, $d=-20/13$ թվերը և կատարել հետևյալ առաջադրանքները:

ա) Տրված թվերից որո՞նք մինչև է c-ն:
բ) Տրված թվերը դասավորել աճման կարգով:
գ) Հաշվել $|b|$-ի արժեքը:
դ) Տրված թվերից ո՞րն է բացարձակ արժեքով ամենամեծը:
ե) a-ն ներկայացնել սովորական կոտորակով:
զ) Գտնել տրված թվերի միջին թվաբանականը:

2. Թվային ուղղի վրա 0-ի ո՞ր կողմում են $(-a)$-ն և $|a|$-ն, եթե՝

ա) a-ն դրական է: բ) a-ն բացասական է: գ) $(-a)$-ն դրական է:

3. Գտնել երկու բնական թիվ, որոնց գումարը 504 է, իսկ ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը՝ 84:

4. Հետևյալ բնական թվերը գրել կարգային գումարելիների գումարի տեսքով.

ա) 352, բ) 5864, գ) 60853, դ) 80451:

5. Ըստ կարգային գումարելիների գումարի՝ գրել բազմանիշ թիվը.

ա) $3\cdot10^3+2\cdot10^2+1\cdot10$, բ) $7\cdot10^4+4\cdot10^2+5\cdot10+9$,

գ) $8\cdot10^5+2\cdot10^3+6$, դ) $5\cdot10^6+7\cdot10^4+2\cdot10^3+5$:

6. Տրված թիվը ներկայացնել ամբողջ թվի և մեկից փոքր ոչ բացասական տասնորդական կոտորակի գումարով:

ա) $34{,}251$, բ) 45, գ) $-12{,}3$, դ) $-80{,}45$:

7. Տրված սովորական կոտորակը գրել տասնորդական կոտորակի տեսքով.

ա) $45/4$, բ) $37/40$, գ) $127/25$, դ) $99/50$:

8. Տրված տասնորդական կոտորակը գրել սովորական կոտորակի տեսքով.

ա) $1{,}25$, բ) $2{,}256$, գ) $0{,}016$, դ) $3{,}625$:

9. Տրված սովորական կոտորակը գրել անվերջ պարբերական տասնորդական կոտորակի տեսքով.

ա) $1/9$, բ) $1/6$, գ) $1/7$, դ) $12/11$:

10. Համեմատել թվերը.

ա) $5/12$ և $0{,}42$, բ) $11/15$ և $0{,}74$, գ) $2/9$ և $0{,}2$, դ) $5/6$ և $0{,}83$:

11. Տրված թվերը դասավորել աճման կարգով.

ա) $49/11$, $4{,}5$ և $-5{,}4$, բ) $-8/17$, $-0{,}5$ և $0{,}5$:

12. Նշել $0{,}6(3)$ թվից մեծ և $0{,}634$-ից փոքր ռացիոնալ թիվ:

➤**13.** Նշել $-0{,}6(3)$ թվից փոքր և $-0{,}634$-ից մեծ ռացիոնալ թիվ:

➤**14.** Անվերջ պարբերական տասնորդական կոտորակը գրել սովորական կոտորակի տեսքով.

ա) $0,(6)$, բ) $0{,}2(4)$, գ) $5{,}0(2)$, դ) $10{,}3(9)$:

➤**15.** Հաշվել արտահայտության արժեքը.

ա) $(2/7)\cdot1{,}1(6)+0{,}1(6)$, բ) $(8/9):0,(6)+2/3$,

գ) $5,(09)+0,(90)$, դ) $9{,}7(2)+1{,}9(7)$:

Կրկնության համար

➤**16.** Գտնել այն երկնիշ թիվը, որն իր թվանշանների գումարից մեծ է՝

ա) 3 անգամ, բ) 5 անգամ, գ) 8 անգամ:

➤**17.** Գտնել այն երկնիշ թվերը, որոնք իրենց թվանշանների գումարից մեծ են՝

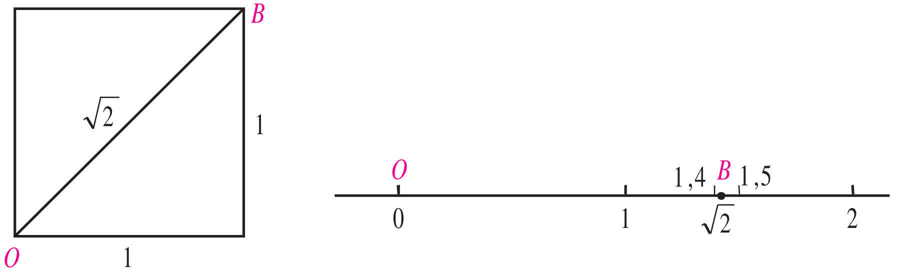
ա) 4 անգամ, բ) 7 անգամ:

§2. Իրական թվեր

Ռացիոնալ թվերը պատկերելով թվային ուղղի վրա՝ ամեն մի ռացիոնալ թվի (վերջավոր կամ պարբերական տասնորդական կոտորակի) վերագրեցինք մի կետ, որը 0 կետի աջ կողմում է, եթե այդ թիվը դրական է, և ձախ կողմում՝ եթե բացասական է:

Սակայն ռացիոնալ թվերը չեն «լցնում» թվային ուղիղը. թվային ուղղի վրա կան կետեր, որոնք չեն ներկայացվում ռացիոնալ թվով: Այժմ փորձենք այդ կետերին նույնպես վերագրել թվեր (տասնորդական կոտորակներ):

Դիտարկենք, օրինակ, B կետը, որի հեռավորությունը O-ից հավասար է միավոր կողմով քառակուսու անկյունագծի երկարությանը (նկ. 3):



Նկ. 3

Հանրահաշվի դասընթացից մեզ հայտնի է, որ 1 կողմով քառակուսու անկյունագծի երկարությունը չի արտահայտվում ռացիոնալ թվով: Սակայն իմանալով, որ այդ երկարության քառակուսին 2 է, անկյունագծի երկարությունը համարել ենք $\sqrt{2}$: Այսինքն՝ այն դրական թիվը, որի քառակուսին 2 է: Հենց սա է այն թիվը, որը համապատասխանում է B կետին: Այժմ $\sqrt{2}$-ը ներկայացնենք տասնորդական կոտորակով:

B կետը 1-ի և 2-ի միջև է: Ուրեմն՝

$$1<\sqrt{2}<2:$$

$[1;\,2]$ հատվածը բաժանելով տասը հավասար մասի՝ տեսնում ենք, որ

$$1{,}4<\sqrt{2}<1{,}5$$

(քանի որ $1{,}4^2<2<1{,}5^2$): Այս պարագայում $1{,}4$-ը և $1{,}5$-ը $\sqrt{2}$-ի ***տասնորդական մոտարկումներն են*** 10^{-1} ճշտությամբ, քանի որ $1{,}5-1{,}4=10^{-1}$: Այնուհետև $[1{,}4;\,1{,}5]$ հատվածը բաժանելով տասը հավասար մասերի՝ կստանանք՝

$$1{,}41<\sqrt{2}<1{,}42:$$

Նկատենք, որ $1{,}41$ և $1{,}42$ տասնորդական կոտորակներից յուրաքանչյուրը կարելի է համարել $\sqrt{2}$-ի տասնորդական մոտարկում 10^{-2} ճշտությամբ: Ընդ որում, $1{,}41$-ը մոտարկում է $\sqrt{2}$-ը ***պակասորդով,*** իսկ $1{,}42$-ը՝ ***հավելուրդով***: Հասկանալի է, որ եթե ամեն անգամ տասը հավասար մասի տրոհենք այն հատվածը, որը պարունակում է

$\sqrt{2}$ -ը, այս գործընթացն ավարտ չի ունենա (հակառակ դեպքում $\sqrt{2}$ -ը կարտահայտվի վերջավոր տասնորդական կոտորակով և կդառնա ռացիոնալ թիվ).

$$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42\,,$$
$$1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415\,,$$
$$1{,}4142 < \sqrt{2} < 1{,}4143\,,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots:$$

Այսինքն՝ OB հատվածի երկարությունը, որը նշանակել էինք $\sqrt{2}$ -ով, կարտահայտվի անվերջ տասնորդական կոտորակով: Դա կլինի անվերջ ոչ պարբերական տասնորդական կոտորակ, քանի որ $\sqrt{2}$ -ը ռացիոնալ թիվ չէ:

Հանգունորեն, թվային ուղղի վրա 0 -ից աջ ամեն մի կետի կհամապատասխանի մի տասնորդական կոտորակ (վերջավոր կամ անվերջ, պարբերական կամ ոչ պարբերական):

Վերցնելով այդ տասնորդական կոտորակները «–» նշանով՝ կստանանք 0 -ից ձախ կետերը:

Դրական տասնորդական կոտորակները (հատվածների երկարությունները), ***բացասական տասնորդական կոտորակները և զրոն կազմում են իրական թվերի բազմությունը:***

Իրական թվերի բազմությունն ընդունված է նշանակել $\mathbf{R}$ տառով:

Իրական, բայց ոչ ռացիոնալ թվերն անվանում են իռացիոնալ թվեր:

Այսինքն՝ իռացիոնալ թվերի բազմությունը $\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$ -ն է*⁾, $\sqrt{2}\in\mathbf{Q}\setminus\mathbf{R}$:

Իռացիոնալ թվի օրինակ է նաև $0{,}1010010001\ldots$ թիվը (առաջին մեկից հետո մեկ զրո, երկրորդից հետո՝ երկու զրո և այլն), քանի որ այն ներկայացված է ոչ պարբերական տասնորդական կոտորակով:

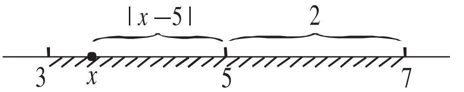
Թվային ուղղի կամայական կետի համապատասխանում է մի իրական թիվ և հակառակը. կամայական իրական a թվի թվային ուղղի վրա համապատասխանում է մի կետ: Այն գտնվում է սկզբնակետից $|a|$ հեռավորությամբ՝ սկզբնակետից աջ, եթե a -ն դրական է և ձախ, եթե a -ն բացասական է:

Թվային ուղղի A կետին համապատասխանող a թիվը երբեմն անվանում են ***A կետի կոորդինատ***: Այդ իսկ պատճառով թվային ուղիղն անվանում են նաև ***կոորդինատային ուղիղ***:

Թվային ուղղի վրա a և b թվերին համապատասխանող կետերի հեռավորությունը $|a - b|$ է:

*⁾ $A\setminus B$ -ով նշանակում են այն թվերի բազմությունը, որոնք պատկանում են A -ին և չեն պատկանում B -ին:

Օրինակ. «x-ի հեռավորությունը 5-ից փոքր է երկուսից» պայմանը մոդուլի նշանով գրվում է $|x-5|<2$ անհավասարությամբ: Ուստի $|x-5|<2$ անհավասարման լուծումը կլինի $(3;7)$ միջակայքը (նկ. 4):



$|x-5|<2 \Leftrightarrow x\in(3,7)$

Նկ. 4

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Արտահայտվո՞ւմ է արդյոք կամայական հատվածի երկարություն ռացիոնալ թվով:
2. $\sqrt{2}$-ի օրինակով բացատրեք, թե ինչպես են գտնում իռացիոնալ թվի տասնորդական մոտարկումները:
3. Բացասական իրական թվերն ինչպե՞ս են համապատասխանեցնում թվային ուղղի կետերին:
4. Ո՞ր թվերն են կազմում իրական թվերի բազմությունը, և ի՞նչ տառով են նշանակում այդ բազմությունը:
5. Ո՞ր թվերն են անվանում իռացիոնալ:
6. Ինչպիսի՞ տասնորդական կոտորակներով են արտահայտվում իռացիոնալ թվերը:
7. Ինչպե՞ս է որոշվում թվային ուղղի վրա a և b թվերին համապատասխանող կետերի հեռավորությունը:

Առաջադրանքներ

18. Ապացուցել, որ տրված թվերն իռացիոնալ են.

ա) $\sqrt{3}$, բ) $\sqrt{7}$, գ) $\sqrt{2}/2$, դ) $\sqrt{7}-1$:

19. Գտնել տրված թվերի տասնորդական մոտարկումները պակասորդով և հավելուրդով՝ 10^{-3} ճշտությամբ.

ա) 0,1386, բ) 0,7821, գ) 0,(125), դ) 0,2(451):

20. Գտնել տրված թվերի տասնորդական մոտարկումները պակասորդով և հավելուրդով՝ 10^{-3} ճշտությամբ.

ա) 12/17, բ) 21/32, գ) 14/9, դ) 31/18:

21. Գտնել տրված թվերի տասնորդական մոտարկումները պակասորդով և հավելուրդով՝ 10^{-1} ճշտությամբ.

ա) $\sqrt{7}$, բ) $\sqrt[3]{9}$, գ) $\sqrt{0,9}$, դ) $\sqrt{0,4}$:

22. Հաշվել 4 մ լայնություն և 5 մ երկարություն ունեցող ուղղանկյան անկյունագիծը՝

ա) մեկ մետր ճշտությամբ,

բ) մեկ դեցիմետր ճշտությամբ,

գ) մեկ սանտիմետր ճշտությամբ:

23. Մոդուլի նշանով գրեք պայմանը, որով նկարագրվում են թվային ուղղի այն x կետերը, որոնց հեռավորությունը՝

ա) 0 կետից 4 միավոր է, բ) 1 կետից 3 միավոր է,

գ) -2 կետից 5 միավոր է, դ) 0 կետից ավելի քան 11 միավոր է,

ե) 13 կետից ավելի քան 7 միավոր է:

24. Թվային ուղղի օգնությամբ լուծեք նախորդ առաջադրանքում ստացված հավասարումները և անհավասարումները:

25. Թվային ուղղի $[a,b]$ հատվածի երկարությունը մեծացրել են 5 անգամ՝ «ձգելով» նրա աջ ծայրակետից և անշարժ պահելով ձախը: Գտնել ստացված հատվածը, եթե՝

ա) $a=3,\ b=6$, բ) $a=-1,\ b=1$, գ) $a=-8,\ b=-4$:

26. Թվային ուղղի $[a,b]$ հատվածի երկարությունը փոքրացրել են 6 անգամ՝ նրա ձախ ծայրակետը «սեղմելով» դեպի աջը: Գտնել ստացված հատվածը, եթե՝

ա) $a=2,\ b=20$, բ) $a=-10,\ b=2$, գ) $a=-31,\ b=-7$:

➤**27.** a-ի ո՞ր արժեքների դեպքում $(a^2-3a,\ 3a-2)$ միջակայքը կպարունակի՝

ա) 0 կետը, բ) 4 կետը, գ) 10 կետը, դ) -2 կետը:

Կրկնության համար

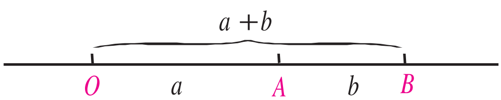
28. Ապացուցել, որ երկու հաջորդական զույգ թվերից մեկը բաժանվում է 4-ի:

29. Ապացուցել, որ երեք հաջորդական բնական թվերի գումարը բաժանվում է 3-ի, իսկ արտադրյալը՝ 6-ի:

30. Ապացուցել, որ կամայական բնական n-ի դեպքում (n^3-n)-ն առանց մնացորդի բաժանվում է 6-ի:

§3. Թվաբանական գործողություններ իրական թվերի հետ

Նախ դիտարկենք գումարման և բազմապատկման գործողությունները դրական իրական թվերի դեպքում: Երկու դրական a և b թվերի գումարը թվային ուղղի վրա պատկերելու համար թվային ուղղի վրա a երկարությամբ OA հատվածը տեղադրենք այնպես, որ նրա ձախ ծայրակետը համընկնի O կետին (նկ. 5): Այնուհետև A կետից տեղադրենք b երկարությամբ AB հատվածը: Ստացված OB հատվածի երկարությունը կլինի $a+b$ գումարը:



Նկ. 5

$a+b$ գումարի մոտարկումները գտնելու համար կարող ենք մոտարկել գումարելիներից յուրաքանչյուրը և վերցնել այդ մոտարկումների գումարը:

Օրինակ՝ 1,4-ը և 1,5-ը $\sqrt{2}$-ի մոտարկումներ են 10^{-1} ճշտությամբ (համապատասխանաբար պակասորդով և հավելուրդով), իսկ 1,7-ը և 1,8-ը $\sqrt{3}$-ի մոտարկումներ են նույն ճշտությամբ: Հետևաբար՝ $1{,}7+1{,}8=3{,}1$ թիվը և $1{,}5+1{,}8=3{,}3$ թիվը կլինեն $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$-ի մոտարկումներ $10^{-1}+10^{-1}=2\cdot10^{-1}$ ճշտությամբ:

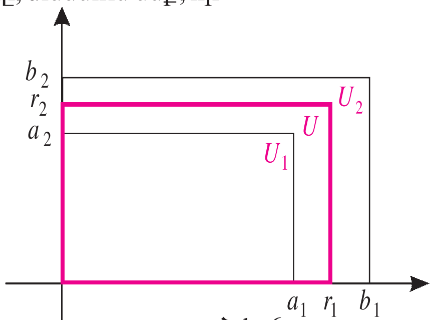
Դրական իրական թվերի բազմապատկումը մեկնաբանելու համար օգտվենք ուղղանկյան մակերեսի գաղափարից: Դիցուք պետք է գտնել $r_1\, r_2$ իրական թվերի արտադրյալը: Ենթադրենք՝

$$a_1<r_1<b_1 \text{ և } a_2<r_2<b_2,$$

որտեղ $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbf{Q}$: Նկ. 6-ում պատկերված U_1, U_2, U ուղղանկյունները ունեն համապատասխանաբար a_1 և a_2, b_1 և b_2, r_1 և r_2 կողմեր:

Համեմատելով ուղղանկյունների մակերեսները, տեսնում ենք, որ

$$a_1a_2<r_1r_2<b_1b_2:$$



Նկ. 6

Իհարկե, որքան a_1-ն ու b_1-ը մոտ լինեն r_1-ին, իսկ a_2-ն ու b_2-ը՝ r_2-ին, այնքան a_1a_2-ն ու b_1b_2-ը քիչ կտարբերվեն r_1r_2-ից:

Տրված իրական թվերի արտադրյալը վերջավոր տասնորդական կոտորակներով մոտարկելու համար պետք է արտադրիչները մոտարկել տասնորդական կոտորակներով և դրանց արտադրյալը համարել տրված թվերի արտադրյալի մոտարկում:

Իրական թվերի համար գումարման և բազմապատկման գործողությունները ունեն ռացիոնալ թվերի գումարման և բազմապատկման մեզ ծանոթ հատկությունները: Այսինքն՝ ճիշտ են հետևյալ օրենքները:

1) $\boldsymbol{a+b=b+a}$	***գումարման տեղափոխական օրենք***
2) $\boldsymbol{(a+b)+c=a+(b+c)}$	***գումարման զուգորդական օրենք***
3) $\boldsymbol{a\cdot b=b\cdot a}$	***արտադրյալի տեղափոխական օրենք***
4) $\boldsymbol{(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)}$	***արտադրյալի զուգորդական օրենք***
5) $\boldsymbol{a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c}$	***բաշխական օրենք***
6) $\boldsymbol{0\cdot a=0}$	***զրոյով բազմապատկելու հատկություն***
7) $\boldsymbol{0+a=a}$	***զրո գումարելու օրենք***
8) $\boldsymbol{1\cdot a=a}$	***մեկով բազմապատկելու օրենք***

Իրական թվերի տարբերության ու քանորդի տասնորդական մոտարկումները գտնվում են նման ձևերով:

Իմանալով իրական թվերի բազմապատկումը՝ սահմանենք իրական թվի ամբողջ ցուցիչով աստիճանը.

$$a^m = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m \text{ անգամ}}, \quad a^{-m} = \frac{1}{a^m}, \quad \text{որտեղ } a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, \ m \in N,$$

$$0^m = 0, \ a^0 = 1, \text{ որտեղ } a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, \ m \in N:$$

0-ի 0 աստիճանը և բացասական աստիճանը չեն սահմանվում:

Օգտվելով 3-րդ և 4-րդ օրենքներից՝ դժվար չէ համոզվել, որ այս ձևով սահմանված ամբողջ ցուցիչով աստիճանն ունի հետևյալ հատկությունները՝

$$\boldsymbol{a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n},}$$

$$\boldsymbol{a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m, \quad \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m, \quad (a^m)^n = a^{mn},}$$

որտեղ $a, b \in \mathbf{R}/\{0\}$, $m, n \in \mathbf{Z}$:

Նշենք ամբողջ ցուցիչով աստիճանի ևս երկու հատկություն:

Եթե $a > 1$ և $m > n$, ապա $a^m > a^n$:
Եթե $0 < a < 1$ և $m > n$, ապա $a^m < a^n$:

Մասնավորապես, մեկից մեծ թվի դրական աստիճանը մեծ է մեկից, իսկ բացասական աստիճանը՝ փոքր, մեկից փոքր դրական թվի դրական աստիճանը փոքր է մեկից, իսկ բացասական աստիճանը՝ մեծ:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ինչպե՞ս են գտնում դրական իրական թվերի գումարի մոտարկումները:
2. Ինչպե՞ս են գտնում դրական իրական թվերի արտադրյալի մոտարկումները:
3. Ի՞նչ օրենքների են ենթարկվում իրական թվերի գումարումն ու բազմապատկումը:
4. Ինչպե՞ս է սահմանվում իրական թվի ամբողջ աստիճանը:
5. Ի՞նչ հատկություններ ունի իրական թվի ամբողջ աստիճանը:

Առաջադրանքներ

31. Գտնել տրված գումարի տասնորդական մոտարկումները պակասորդով և հավելուրդով $2 \cdot 10^{-2}$ ճշտությամբ.

ա) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, բ) $\sqrt{7} + \sqrt{0{,}1}$, գ) $\sqrt{1{,}75} + \sqrt{2}$, դ) $\sqrt{1{,}1} + \sqrt{0{,}9}$:

32. Գտնել տրված արտահայտության տասնորդական մոտարկումները պակասորդով և հավելուրդով 10^{-2} ճշտությամբ, նախապես հաշվելով արտահայտության քառակուսին.

ա) $\sqrt{2} + \sqrt{0{,}5}$, բ) $\sqrt{3/2} + \sqrt{2/3}$, գ) $\sqrt{27} + \sqrt{3}$, դ) $\sqrt{12} + \sqrt{1/3}$:

33. Ապացուցել, որ իռացիոնալ թվի հակադիրը և հակադարձը իռացիոնալ թվեր են:

34. Ռացիոնա՞լ, թե՞ իռացիոնալ թիվ է ռացիոնալ թվերի՝

ա) գումարը, բ) տարբերությունը, գ) արտադրյալը, դ) քանորդը:

35. Կարո՞ղ է արդյոք ռացիոնալ թիվ լինել իռացիոնալ թվի՝
ա) կրկնապատիկը, բ) եռապատիկը,
գ) քառակուսին, դ) խորանարդը:
Բերել համապատասխան օրինակներ:

36. Գտնել a և b թվերի նշանները, եթե.

ա) $\begin{cases} a+b>0 \\ ab>0 \end{cases}$, բ) $\begin{cases} a+b<0 \\ ab>0 \end{cases}$:

37. Ապացուցեք պարագրաֆի վերջում բերված աստիճանի հատկությունները:

38. Համեմատել հետևյալ թվերը.

ա) $\left(\sqrt{2}\right)^{15}$ և $\left(\sqrt{2}\right)^{9}$, բ) $(1{,}5)^{-12}$ և $(1{,}5)^{-29}$, գ) $\left(\dfrac{4}{\pi}\right)^{3}$ և 1,

դ) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{4}$ և $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{8}$, ե) $\left(\dfrac{\sqrt{15}}{4}\right)^{7}$ և $\left(\dfrac{\sqrt{15}}{4}\right)^{3}$, զ) $\left(\dfrac{3}{\pi}\right)^{9}$ և 1:

39. Գտնել արտահայտության արժեքը.

ա) $\sqrt[3]{12}\cdot\left(\sqrt[3]{12}\right)^{2}$, բ) $\dfrac{\left(\sqrt{13}\right)^{5}}{\sqrt{13}}$, գ) $\left(\sqrt[4]{8}\right)^{3}\cdot\left(\sqrt[4]{8}\right)^{9}$, դ) $\dfrac{\left(\sqrt{0{,}1}\right)}{\left(\sqrt{0{,}1}\right)^{5}}$:

40. Գտնել $\left[\sqrt{15}, \sqrt{35}\right]$ միջակայքին պատկանող 13 համարիչով կոտորակները:

41. Գտնել $\left[\sqrt{82}, \sqrt{91}\right]$ միջակայքին պատկանող 15 հայտարարով կոտորակների քանակը:

Կրկնության համար

42. Բնական թիվը 6-ի բաժանելիս ստացվում է 5 մնացորդ: Ի՞նչ մնացորդ կստացվի, եթե այդ թիվը բաժանենք՝ ա) 2-ի, բ) 3-ի, գ) 12-ի:

43. Երկու բնական թվերից մեկը 7-ի բաժանելիս ստացվում է 5 մնացորդ, երկրորդը՝ 4 մնացորդ: Ի՞նչ մնացորդ կստացվի, եթե 7-ի բաժանենք նրանց՝ ա) գումարը, բ) արտադրյալը:

§4. Իրական թվի n-րդ աստիճանի արմատը

Գիտենք, որ զրոյից տարբեր կամայական a իրական թվի քառակուսին դրական թիվ է, և $(-a)^2=a^2$: Սրանից հետևում է, որ ոչ մի բացասական թիվ իրական թվի քառակուսի չէ:

Օրինակներով համոզվենք, որ յուրաքանչյուր դրական թվի համար կա մի դրական թիվ, որի քառակուսին տրված թիվն է: Տրված a դրական թվի համար $\sqrt{a}$-ով նշանակում են այն դրական թիվը, որի քառակուսին a է:

Օրինակ 1. Գտնենք $\sqrt{\sqrt{2}}$ -ը, այսինքն՝ այն դրական թիվը, որի քառակուսին $\sqrt{2}$ է:

Հաշվի առնելով, որ $\left(\sqrt{2}\right)^2=2$, պետք է գտնենք մի դրական թիվ, որի չորրորդ աստիճանը 2 է: Իհարկե, չենք կարող գտնել $\sqrt{\sqrt{2}}$ -ի բոլոր տասնորդական նիշերը: Գտնենք $\sqrt{\sqrt{2}}$ -ի տասնորդական մոտարկումները պակասորդով և հավելուրդով՝ 10^{-2} ճշտությամբ: Քանի որ

$$(1{,}1)^4=1{,}4641<2<2{,}0736=(1{,}2)^4,$$

ուրեմն $\sqrt{\sqrt{2}}$ -ի տասնորդական մոտարկումները պակասորդով և հավելուրդով՝ 10^{-1} ճշտությամբ $1{,}1$ -ը և $1{,}2$ -ն են: $[1{,}1;1{,}2]$ հատվածը բաժանելով տասը հավասար մասի և կատարելով անհրաժեշտ հաշվարկները՝ կստանանք՝

$$(1{,}18)^4=1{,}93877776<2<2{,}00533921=(1{,}19)^4:$$

Հետևաբար՝ $\sqrt{\sqrt{2}}$ -ի տասնորդական մոտարկումը՝ 10^{-2} ճշտությամբ պակասորդով $1{,}18$ է, իսկ հավելուրդով՝ $1{,}19$:

Ակնհայտ է, որ երբ $a\neq 0$, a -ն և a^3 -ն ունեն նույն նշանը: Կամայական a իրական թվի համար գոյություն ունի մի իրական թիվ, որի խորանարդը a -ն է: Այդ թիվը նշանակում են $\sqrt[3]{a}$ -ով:

Օրինակ 2. Գտնենք $\sqrt[3]{A}$ -ի տասնորդական մոտարկումները՝ 10^{-2} ճշտությամբ պակասորդով և հավելորդով, եթե $A=0{,}5050050005\ldots$:

$[0;1]$ հատվածը բաժանելով տասը հավասար մասի և կատարելով համապատասխան հաշվարկները՝ կստանանք՝ $(0{,}7)^3=0{,}343<A<0{,}512=(0{,}8)^3$:

Հետևաբար՝ առաջին մոտարկման համար կունենանք՝

$$0{,}7<\sqrt[3]{A}<0{,}8:$$

Երկրորդ քայլում կստանանք՝ $(0{,}79)^3=0{,}493039<A<0{,}512=(0{,}8)^3$: Ուստի՝

$$0{,}79<\sqrt[3]{A}<0{,}8:$$

Այսինքն՝ $\sqrt[3]{A}$ -ի տասնորդական մոտարկումը՝ 10^{-2} ճշտությամբ պակասորդով $0{,}79$ -ն է, իսկ հավելուրդով՝ $0{,}8$ -ը:

Զույգ n-ի դեպքում ոչ բացասական a թվի n-րդ աստիճանի արմատ կոչվում է այն ոչ բացասական իրական թիվը, որի n-րդ աստիճանը a է:
Կենտ n-ի դեպքում իրական a թվի n-րդ աստիճանի արմատ կոչվում է այն իրական թիվը, որի n-րդ աստիճանը a է:
a թվի n-րդ աստիճանի արմատը նշանակում են $\sqrt[n]{a}$ -ով:

Դժվար չէ համոզվել, որ կամայական $a,b\geq 0$, $m,k\in\mathbf{N}$ թվերի համար՝

$$\sqrt[m]{a}=\sqrt[mk]{a^k}, \quad \sqrt[m]{a\cdot b}=\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{b},$$

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)^k=\sqrt[m]{a^k}, \quad \sqrt[m]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}, \ (b\neq 0):$$

Օրինակ 3. Կոտորակային արտահայտության հայտարարի իռացիոնալությունից ազատվելու համար նրա համարիչն ու հայտարարը բազմապատկում են հայտարարի լծորդով, այնպիսի արտահայտությամբ, որ հայտարարում արմատանշան չմնա.

ա) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$,

բ) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}$,

գ) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}=\dfrac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}=\dfrac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{a+b}$:

Նշենք n-րդ աստիճանի արմատի ևս երկու հատկություն:

Եթե $a>1$ ***և*** $m>n$, ***ապա*** $\sqrt[m]{a}<\sqrt[n]{a}$:

Եթե $0<a<1$ ***և*** $m>n$, ***ապա*** $\sqrt[m]{a}>\sqrt[n]{a}$:

Մասնավորապես, մեկից մեծ թվի n-րդ աստիճանի արմատը փոքր է այդ թվից, իսկ մեկից փոքր դրական թվի n-րդ աստիճանի արմատը մեծ է այդ թվից:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ո՞ր իրական a-երի համար գոյություն ունի $\sqrt{a}$-ն (ինչո՞ւ):
2. Ինչպե՞ս են գտնում դրական թվի քառակուսի արմատի մոտավոր արժեքները:
3. Ո՞ր a-երի համար գոյություն ունի $\sqrt[3]{a}$-ն:
4. Ի՞նչ է նշանակում $\sqrt[n]{a}$-ն, եթե n-ը զույգ է, իսկ a-ն՝ ոչ բացասական:
5. Ի՞նչ է նշանակում $\sqrt[n]{a}$-ն, եթե n-ը կենտ է, իսկ a-ն՝ իրական:

Առաջադրանքներ

44. Գտնել արտահայտության տասնորդական մոտարկումները պակասորդով և հավելուրդով՝ 10^{-2} ճշտությամբ.

ա) $\sqrt{44}$, բ) $\sqrt{\sqrt{8}}$, գ) $\sqrt{\pi}$, դ) $\sqrt{0{,}4567}$:

45. Գտնել արտահայտության տասնորդական մոտարկումները պակասորդով և հավելուրդով՝ 10^{-1} ճշտությամբ.

ա) $\sqrt[3]{1025}$, բ) $\sqrt[3]{219}$, գ) $\sqrt[3]{-65}$, դ) $\sqrt[3]{-124}$:

46. Համեմատել թվերը.

ա) $\sqrt[4]{3}$ և $\sqrt{2}$, բ) $\sqrt[4]{4}$ և $\sqrt[6]{6}$, գ) $\sqrt{3\sqrt{2}}$ և $\sqrt{5}$, դ) $\sqrt[3]{5^2}$ և $\sqrt[5]{5^3}$,

ե) $\sqrt{5}$ և $\sqrt[3]{5}$, զ) $\sqrt[4]{0{,}7}$ և $\sqrt[6]{0{,}7}$, է) $\sqrt{1{,}1}$ և $1{,}1$, ը) $\sqrt[3]{0{,}1}$ և $0{,}1$:

Գտնել արտահայտության արժեքը (47-48).

47. ա) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$, բ) $\sqrt{24}\cdot\sqrt{54}$, գ) $\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[6]{3}$, դ) $\sqrt[6]{16}\cdot\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[9]{64}$:

48. ա) $\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$, բ) $\dfrac{\sqrt{162}}{\sqrt{18}}$, գ) $\dfrac{\sqrt{0,(3)}}{\sqrt{27}}$, դ) $\dfrac{\sqrt{0{,}125}}{\sqrt{32}}$:

Ազատվել հայտարարի իռացիոնալությունից (49-50).

49. ա) $\dfrac{4}{\sqrt{5}+1}$, բ) $\dfrac{13}{2\sqrt{3}-5}$, գ) $\dfrac{a^2-b^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$, դ) $\dfrac{a^3}{\sqrt{x}-3\sqrt{z}}$:

➤**50.** ա) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{5}+1}$, բ) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{2}}$, գ) $\dfrac{a}{\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{a^2}}$:

51. Ապացուցել, որ

ա) $\sqrt[4]{49}=\sqrt{7}$, բ) $\sqrt[3]{2}=\sqrt[6]{4}$, գ) $\sqrt[4]{a^2}=\sqrt[8]{a^4}$, դ) $\sqrt[12]{b^8}=\sqrt[9]{b^6}$:

Կրկնության համար

➤**52.** Ցույց տալ, որ $n+1$ հատ բնական թվերի մեջ կարելի է գտնել՝

ա) երկուսը, որոնք n-ի բաժանելիս ստացվում է նույն մնացորդը,

բ) երկուսը, որոնց տարբերությունը բաժանվում է n-ի:

➤**53.** ա) Կամայական n բնական թվի համար դիտարկենք

$$1;\ 11;\ 111;\ \ldots\ \underbrace{111\ldots1}_{n+1 \text{ հատ}}$$

թվերի հաջորդականությունը: Ապացուցեք, որ այդ թվերի մեջ կան երկուսը, որոնք n-ի բաժանելիս ստացվում է նույն մնացորդը,

բ) Ապացուցել, որ կամայական բնական n-ի համար գոյություն ունի միայն 1-երով ու 0-ներով գրվող թիվ, որը բաժանվում է n-ի:

§5. Իրական թվի ռացիոնալ ցուցիչով աստիճանը

Այժմ, իմանալով իրական թվի ամբողջ աստիճանը և իրական թվի n-րդ աստիճանի արմատը, սահմանենք ոչ բացասական թվի ռացիոնալ աստիճանը:

***a* դրական թվի ռացիոնալ աստիճանը սահմանվում է հետևյալ բանաձևով.**

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m},\ \text{որտեղ}\ n\in\mathbf{N},\ m\in\mathbf{Z}:$$

0-ի ռացիոնալ աստիճանը սահմանված է միայն դրական ցուցիչի դեպքում՝ $0^r = 0,\ r > 0$:

Ռացիոնալ ցուցիչով աստիճանն օժտված է հետևյալ հատկություններով:

Կամայական a, b դրական և p, q ռացիոնալ թվերի համար

$$(a\cdot b)^p = a^p\cdot b^p,\qquad \left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p},$$

$$a^p\cdot a^q = a^{p+q},\qquad \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}, \tag{1}$$

$$\left(a^p\right)^q = a^{pq},\qquad a^{-p} = \frac{1}{a^p}:$$

Օրինակ՝ ստուգենք, որ եթե $a>0$ և $n,q\in \mathbf{N},\ m,p\in \mathbf{Z}$, ապա

$$a^{\frac{m}{n}}\cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}:$$

Իրոք,

$$a^{\frac{m}{n}}\cdot a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m}\cdot\sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}}\cdot\sqrt[nq]{a^{np}} =$$

$$= \sqrt[nq]{a^{mq}\cdot a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}} = a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}:$$

Նման ձևով ապացուցվում են մնացած հատկությունները:

Նշենք ռացիոնալ ցուցիչով աստիճանի ևս երկու կարևոր հատկություն:

Եթե $a>1$ և $p>q$, ապա $a^p > a^q$:

Եթե $0<a<1$ և $p>q$, ապա $a^p < a^q$: (2)

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ինչպե՞ս է սահմանվում a դրական թվի ռացիոնալ աստիճանը:
2. Ո՞ր դեպքում է սահմանվում 0-ի ռացիոնալ աստիճանը և ինչի՞ է այն հավասար:
3. Գրեք a դրական թվի ռացիոնալ աստիճանի (1) հատկությունները:
4. Գրեք (2) հատկությունները:

Առաջադրանքներ

54. Կատարել գործողությունները.

ա) $x^{1/4}\cdot x^{3/10}$, բ) $a^{-3/8} : a^{1/4}$, գ) $\left(y^{3/8}\right)^{4/3}$,

դ) $\left(x^{2/3}\right)^{0,6}\cdot x^{2/5}$, ե) $\left(a^{-5/8}\right)^{0,4}\cdot a^{0,25}$, զ) $\left(b^{1/2}\right)^{-0,5}\cdot\left(b^{1/4}\right)^{-2/3}$,

է) $\left(d^{0,3}\right)^{3/2}\cdot\left(d^{-2/5}\right)^{0,4}$, ը) $\left(u^{1/2}+2v^{1/2}\right)^2$, թ) $\left(u^{1/3}-v^{1/3}\right)^3$:

➢**55.** Պարզեցնել արտահայտությունը և հաշվել նրա արժեքը.

ա) $\dfrac{m^{\frac{5}{4}}+m^{\frac{1}{2}}n^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{3}{4}}n^{\frac{1}{4}}+n^{\frac{3}{4}}}$, եթե $m=9,\ n=16$, բ) $\dfrac{m^{\frac{5}{3}}+mn^{\frac{1}{4}}}{nm^{\frac{2}{3}}+n^{\frac{5}{4}}}$, եթե $m=3,\ n=2$:

գ) $\left(\dfrac{9-4a^{-2}}{3a^{-\frac{1}{2}}+2a^{-\frac{3}{2}}}-\dfrac{1+a^{-1}-6a^{-2}}{a^{-\frac{1}{2}}+3a^{-\frac{3}{2}}}\right)\cdot\sqrt{a}$, եթե $a=0{,}5$:

56. Ապացուցել (1) առնչությունները:

➢**57.** Դիցուք $a>b>0$, $p\in\mathbf{Q}$: Ապացուցել, որ՝

ա) եթե $p>0$, ապա $a^p>b^p$,

բ) եթե $p<0$, ապա $a^p<b^p$,

գ) եթե $p=0$, ապա $a^p=b^p$:

58. Համեմատել 1 թվի հետ.

ա) $\left(\dfrac{31}{30}\right)^{1,13}$, բ) $(1{,}0001)^{0,0001}$, գ) $\left(\dfrac{27}{26}\right)^{0,14}$, դ) $\left(\dfrac{\pi}{3}\right)^{-0,037}$,

ե) $\left(\sqrt{0{,}3}\right)^{1,89}$, զ) $\left(\sqrt[9]{0{,}999}\right)^{999}$, է) $\left(\dfrac{1}{143}\right)^{0}$, ը) $0^{0,023}$:

59. Թվերը դասավորել աճման կարգով.

ա) $7^{1,49}$, $7^{1,5}$, $7^{1,493}$, բ) $(1{,}2)^{6,538}$, $(1{,}2)^{6,5}$, $(1{,}2)^{6,539}$,

գ) $(5{,}2)^{-3,724}$, $(5{,}2)^{-3,73}$, $(5{,}2)^{-3,72}$, դ) $(0{,}8)^{3,82}$, $(0{,}8)^{3,826}$, $(0{,}8)^{3,81}$:

Կրկնության համար

➢**60.** Ցույց տալ, որ՝

ա) 3-ի չբաժանվող բնական թվի քառակուսին 3-ի բաժանելիս ստացվում է 1 մնացորդ:

բ) կենտ թվի քառակուսին 8-ի բաժանելիս ստացվում է 1 մնացորդ:

§6. Իրական թվի իռացիոնալ ցուցիչով աստիճանը

Նախորդ պարագրաֆում սահմանեցինք դրական թվի ռացիոնալ ցուցիչով աստիճանը: Որպեսզի դրական թվի կամայական իրական ցուցիչով աստիճանը լինի որոշված, մնում է սահմանենք դրական թվի իռացիոնալ ցուցիչով աստիճանը: Ընդ որում, սահմանենք այնպես, որ նախորդ պարագրաֆի (1) և (2) հատկությունները պահպանվեն նաև կամայական p և q իրական թվերի համար: Օրինակ՝ տեսնենք, թե ինչպես է որոշվում $3^{\sqrt{2}}$ թիվը:

Ինչպես գիտենք, $\sqrt{2}$ -ն իռացիոնալ թիվ է, որը ներկայացվում է անվերջ տասնորդական կոտորակի տեսքով՝ $\sqrt{2}=1{,}414213\ldots$:

Հաշվիչի օգնությամբ գտնելով, որ $3^{1{,}4}=4{,}655\ldots$, $3^{1{,}41}=4{,}706\ldots$, $3^{1{,}414}=4{,}727\ldots$, $3^{1{,}4142}=4{,}728\ldots$, կարող ենք ենթադրել, որ $3^{\sqrt{2}}$ -ը մոտավորապես $4{,}72$ է: Շարունակելով այս հաշվարկները կարող ենք գտնել $3^{\sqrt{2}}$ -ի տասնորդական ներկայացման հերթական նիշերը:

Նման ձևով կարող ենք որոշել կամայական a դրական թվի x իռացիոնալ ցուցիչով աստիճանը՝ a^x -ը:

Եթե $a>1$ և $x<0$, ապա $-x>0$, ուստի a^x -ը կարող ենք որոշել $a^x=\dfrac{1}{a^{-x}}$ հավասարությունից:

$0<a<1$ դեպքում $\dfrac{1}{a}>1$, և յուրաքանչյուր իրական x -ի համար a^x -ը կարող ենք որոշել $a^x=\left(\dfrac{1}{a}\right)^{-x}$ հավասարությունից:

$a=1$ դեպքում՝ $\mathbf{1^x=1}$ ***կամայական իրական*** $\boldsymbol{x}$ ***-ի համար***:

$a=0$ դեպքում՝ $\mathbf{0^x=0}$ ***կամայական դրական*** $\boldsymbol{x}$ ***-ի համար***:

Այսպիսով՝ a^x աստիճանը դրական a հիմքի դեպքում որոշված է բոլոր իրական x -երի համար: Ընդ որում, կամայական a, b դրական և x, y իրական թվերի համար՝

1) $\boldsymbol{a^x\cdot a^y=a^{x+y}}$, **2)** $\boldsymbol{\dfrac{a^x}{a^y}=a^{x-y}}$,

3) $\boldsymbol{(a^x)^y=a^{xy}}$, **4)** $\boldsymbol{(a\cdot b)^x=a^x\cdot b^x}$, **5)** $\boldsymbol{\left(\dfrac{a}{b}\right)^x=\dfrac{a^x}{b^x}}$,

6) ***եթե*** $\boldsymbol{a>1}$ ***և*** $\boldsymbol{x>y}$, ***ապա*** $\boldsymbol{a^x>a^y}$,

7) ***եթե*** $\boldsymbol{0<a<1}$ ***և*** $\boldsymbol{x>y}$, ***ապա*** $\boldsymbol{a^x<a^y}$:

Նշենք նաև աստիճանի հետևյալ հատկությունը, որն անմիջապես հետևում է 3-րդ հատկությունից. $(a^x)^y=(a^y)^x$:

Օրինակ 1. $\left(\left(\sqrt{3}\right)^{-\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{8}}=\left(\sqrt{3}\right)^{-\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}}=\left(\sqrt{3}\right)^{-4}=\dfrac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^4}=\dfrac{1}{9}$:

Օրինակ 2. Բաղդատենք $\left(\dfrac{5}{3}\right)^{-\sqrt{17}}$ և $(0{,}36)^{\sqrt[3]{7}}$ թվերը: Ունենք՝ $\left(\dfrac{5}{3}\right)^{-\sqrt{17}}=(0{,}6)^{\sqrt{17}}$ և $(0{,}36)^{\sqrt[3]{7}}=(0{,}6)^{2\sqrt[3]{7}}$: Քանի որ $0{,}6<1$ և $\sqrt{17}>4>2\sqrt[3]{7}$, ուրեմն առաջին թիվը փոքր է երկրորդից (համաձայն 7-րդ հատկության):

Օրինակ 3. $\dfrac{14^{3x+2}}{21^{2x+1}}$ արտահայտությունը ներկայացնենք $c\cdot a^x$ տեսքով.

$$\frac{14^{3x+2}}{21^{2x+1}}=\frac{14^{3x}\cdot 14^2}{21^{2x}\cdot 21}=\left(\frac{14^3}{21^2}\right)^x\cdot\frac{28}{3}=\frac{28}{3}\cdot\left(\frac{56}{9}\right)^x:$$

Հանկացե՞լ եք դասը

1. Ո՞ր p-երի համար է որոշված a^p թիվը, եթե՝
ա) $a<0$, բ) $a=0$, գ) $a>0$:
2. Ինչպե՞ս է որոշվում մեկից մեծ թվի իռացիոնալ ցուցիչով աստիճանը:
3. Ինչպե՞ս է որոշվում մեկից փոքր դրական թվի իռացիոնալ ցուցիչով աստիճանը:
4. Ինչի՞ է հավասար 1-ի կամայական ցուցիչով աստիճանը:
5. Ո՞ր a-երի և x-երի համար է ճիշտ $a^x>1$ անհավասարությունը:
6. Ո՞ր a-երի և x-երի համար է ճիշտ $a^x<1$ անհավասարությունը:

Առաջադրանքներ

61. Գտնել արտահայտության արժեքը.

ա) $\left(5^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}$, բ) $\left(\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$, գ) $\left(\left(\sqrt{3}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{-\sqrt{2}}$,

դ) $\left(\left(\sqrt{5}\right)^{-\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{8}}$, ե) $\left(\left(\sqrt{7}\right)^{-\sqrt{8}}\right)^{-\sqrt{2}}$, զ) $\left(\left(\sqrt[3]{2}\right)^{-\sqrt{3}}\right)^{-\sqrt{27}}$:

62. Պարզեցնել արտահայտությունը.

ա) $x^{\sqrt{3}+1}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sqrt{3}}$, բ) $\left(x^{\sqrt[5]{8}}\right)^{\sqrt[5]{4}}$, գ) $x^{\sqrt{3}}:\sqrt[4]{x^{4\sqrt{3}}}$,

դ) $x^{\pi}\cdot\sqrt[4]{x^2:x^{4\pi}}$, ե) $\left(x^{-\sqrt[3]{4}}\right)^{-\sqrt[3]{2}}$, զ) $\left(\sqrt[3]{x}\right)^{2\pi}\cdot\sqrt[6]{x^{12}:x^{4\pi}}$:

63. Բաղդատել թվերը՝

ա) $3^{\sqrt{5}}$ և 9, բ) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\sqrt{7}}$ և $\dfrac{8}{27}$, գ) $7^{-\pi}$ և 1,

դ) $(0{,}5)^{-\sqrt{2}}$ և 1, ե) $(0{,}2)^{-\sqrt{3}}$ և 5, զ) $\left(\dfrac{4}{3}\right)^{-\pi}$ և $\dfrac{9}{16}$:

➤ **64.** Գտնել այնպիսի n ամբողջ թիվ, որը բավարարում է տրված անհավասարություններին՝

ա) $3^n<3^{\sqrt{7}}<3^{n+1}$, բ) $(1{,}8)^n<(1{,}8)^{\sqrt[4]{17}}<(1{,}8)^{n+1}$,

գ) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^n<\left(\dfrac{3}{4}\right)^{\sqrt{6}}<\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}$, դ) $(0{,}6)^n<(0{,}6)^{\sqrt[4]{17}}<(0{,}6)^{n-1}$:

Արտահայտությունը ներկայացնել $c \cdot a^x$ տեսքով (65-66).

65. ա) 9^{x+1}, բ) $(0,5)^{x-3}$, գ) $(0,1)^{2-x}$, դ) 7^{2x-3} ։

➢ **66.** ա) $\frac{6^{3x-1}}{9^{x+2}}$, բ) $\frac{14^{x+2}}{10^{2x+1}}$, գ) $\frac{15^{4x+1}}{21^{3x-1}}$, դ) $\frac{14^{3x-1}}{35^{x-2}}$ ։

Կրկնության համար

➢ **67.** Սեղանին դրված մատիտները, որոնց թիվը փոքր էր 60 -ից, դասավորեցին տուփերի մեջ։ Յուրաքանչյուր տուփում 10 մատիտ դնելու դեպքում ավելացավ 4 մատիտ, իսկ 12 մատիտ դնելու դեպքում՝ 6 մատիտ։ Քանի՞ մատիտ կար սեղանին։

➢ **68.** Արկղում եղած խնձորների թիվը մեծ է 200 -ից և փոքր 300 -ից։ Այդ խնձորները տոպրակներում 10 -ական կամ 12 -ական դնելու դեպքում վերջին տոպրակում պակասում է 2 խնձոր։ Քանի՞ խնձոր կա արկղում։

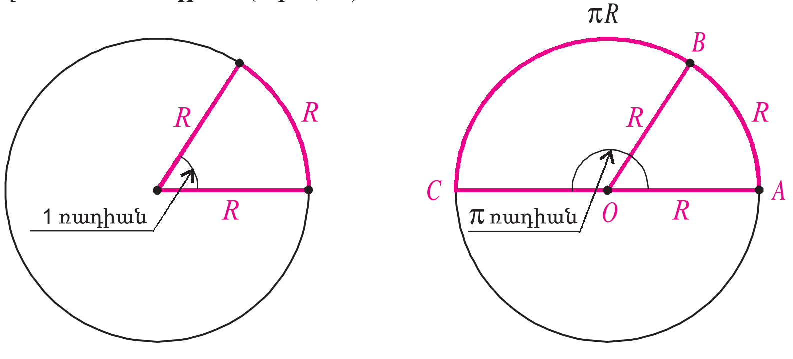
Գլուխ 2

Եռանկյունաչափության տարրերը

§1. Ռադիան: Դրական և բացասական պտույտներ

Երկրաչափության դասընթացից ծանոթ եք անկյան աստիճանային չափին. 1° մեծությամբ անկյունը փռված անկյան $1/180$ մասն է: Այժմ ծանոթանանք անկյունների չափման նոր միավորի:

Դիտարկենք R շառավղով շրջանագծի AOB կենտրոնական անկյունը, որի հենման աղեղի երկարությունը նույնպես R է: Այս անկյան մեծությունը չափման նոր միավորն է, որն անվանում են ***ռադիան*** (նկ. 7, ա):



ա) Նկ. 7 բ)

Մեկ ռադիան մեծությամբ անկյունն այն կենտրոնական անկյունն է, որի հենման աղեղի երկարությունը հավասար է շրջանագծի շառավղին:

Ռադիանը կրճատ գրվում է` ռադ: Եթե մեկ ռադիան մեծությամբ $AOB$ անկյունը մեծացնենք $\pi$ անգամ, նրա հենման աղեղը ևս կմեծանա $\pi$ անգամ և կստացվի $\pi$ ռադիան մեծությամբ $AOC$ կենտրոնական անկյունը, որի հենման աղեղի երկարությունը հավասար է կիսաշրջանագծի երկարությանը` πR (նկ. 7, բ): Հետևաբար`

$$\pi \text{ ռադ} = 180^\circ:$$

Սրանից ստացվում են ռադիանն աստիճանով և աստիճանը ռադիանով արտահայտելու բանաձևերը`

$$\mathbf{1 \text{ ռադ} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ, \qquad 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ ռադ} \approx 0{,}0175 \text{ ռադ}:}$$

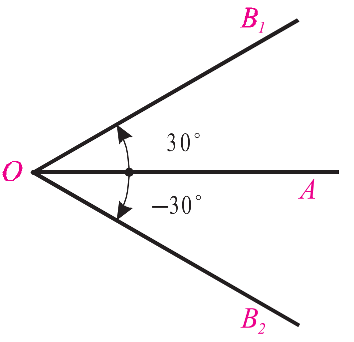
Հեշտությամբ կարող եք ստուգել, որ

$$0\ \text{ռադ}=0^\circ,\quad \frac{\pi}{6}\ \text{ռադ}=30^\circ,\quad \frac{\pi}{4}\ \text{ռադ}=45^\circ,\quad \frac{\pi}{3}\ \text{ռադ}=60^\circ,\quad \frac{\pi}{2}\ \text{ռադ}=90^\circ,$$

$$\frac{2\pi}{3}\ \text{ռադ}=120^\circ,\quad \frac{3\pi}{4}\ \text{ռադ}=135^\circ,\quad 2\pi\ \text{ռադ}=360^\circ:$$

Երկրաչափությունում դիտարկվում են 0°-ից մինչև 180° (0 ռադիանից մինչև π ռադիան) մեծության անկյուններ: Այժմ սահմանենք պտտման անկյան գաղափարը և տեսնենք, որ պտտման անկյան մեծությունը կարող է արտահայտվել կամայական իրական թվով:

Դիտարկենք OB_1 և OB_2 ճառագայթները, որոնք OA ճառագայթի հետ կազմում են նույնպիսի՝ 30° մեծության անկյուն (նկ. 8): Եթե OA ճառագայթը պտտենք O կետի շուրջը 30° անկյունով, այն կհամընկնի OB_1 կամ OB_2 ճառագայթներից մեկին՝ կախված այն բանից, թե որ ուղղությամբ ենք կատարել պտույտը: Պտույտի այն ուղղությունը, որի հետևանքով OA ճառագայթն ընդունում է OB_1 դիրքը, անվանենք դրական ուղղություն, իսկ պտույտի հակառակ ուղղությունը՝ բացասական:

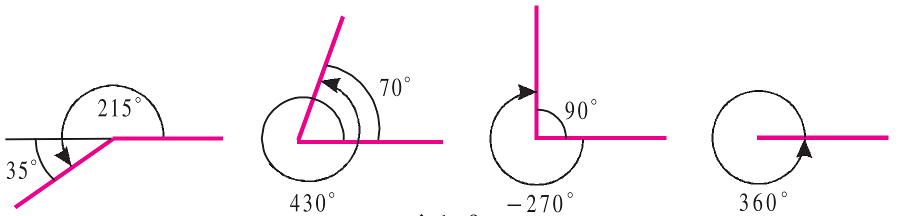


Նկ. 8

Այս դեպքում ասում են, որ OA ճառագայթը 30° պտույտից հետո գրավում է OB_1 դիրքը, իսկ -30° պտույտից հետո՝ OB_2 դիրքը: Այսինքն՝ առաջին դեպքում պտտման անկյունը 30° է, իսկ երկրորդ դեպքում՝ -30°:

Պտույտի այն ուղղությունը, որը համընկնում է ժամացույցի սլաքների շարժման ուղղության հետ, անվանում են բացասական ուղղություն, իսկ հակառակ ուղղությունը՝ դրական:

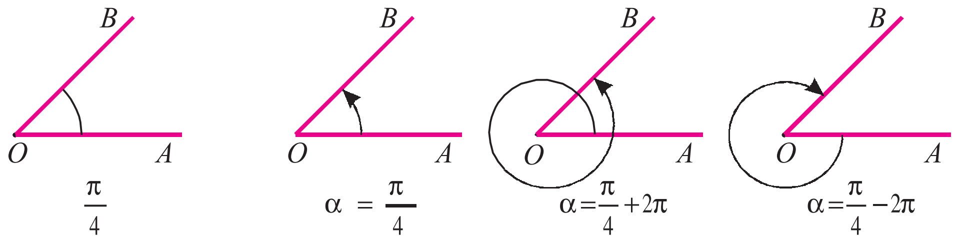
Նկ. 9-ում բերված են պտտման անկյունների օրինակներ:



Նկ. 9

Հաճախ «պտտման անկյուն» բառակապակցության փոխարեն օգտագործում են «անկյուն» բառը: Հասկանալի է, որ այն դեպքերում, երբ խոսքը բացասական «անկյան» կամ π ռադիանից մեծ «անկյան» մասին է, հասկանում են միայն պտտման անկյուն:

Դիտարկենք $\angle AOB=\pi/4$ անկյունը (նկ. 10, ա): Հասկանալի է, որ կան ան-



ա) Նկ. 10 բ)

վերջ թվով α անկյուններ, որոնցով OA ճառագայթը O կետի շուրջը պտտելով, կստանանք միևնույն՝ OB դիրքը: Օրինակ՝ $\alpha=\frac{\pi}{4}$ ռադ, $\alpha=\left(\frac{\pi}{4}+2\pi\right)$ռադ, $\alpha=\left(\frac{\pi}{4}-2\pi\right)$ռադ (նկ. 10, բ): Այդպիսի բոլոր α-ները գտնելու համար բավական է գտնել նրանցից մեկը, օրինակ՝ $\pi/4$-ը, և վերջինիս գումարել ամբողջ թվով 2π-եր, այսինքն՝ $\alpha=\frac{\pi}{4}+2\pi k$ ռադ, որտեղ $k \in \mathbf{Z}$:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ի՞նչ է մեկ ռադիանը և քանի՞ աստիճան է այն:
2. Աստիճանն ինչպե՞ս է արտահայտվում ռադիանով:
3. Քանի՞ ռադիան է՝ ա) ուղիղ անկյունը, բ) փռված անկյունը, գ) մեկ լրիվ պտույտը:
4. Պտտման ո՞ր ուղղությունն են անվանում դրական և որը՝ բացասական:
5. Ինչպիսի՞ թվերով են արտահայտվում պտտման անկյունները:
6. Ի՞նչ ենք հասկանում «390° անկյուն», «-7π ռադիան անկյուն» ասելով:

Առաջադրանքներ

69. Քանի՞ ռադիան է՝

ա) 90°-ը, բ) 60°-ը, գ) 300°-ը,
դ) 10°-ը, ե) 45°-ը, զ) 72°-ը,
է) 216°-ը, ը) -720°-ը, թ) 1200°-ը:

70. Քանի՞ աստիճան է՝

ա) 2π ռադ-ը; բ) $-\pi$ ռադ-ը; գ) $\pi/5$ ռադ-ը; դ) $3\pi/5$ ռադ-ը;
ե) $-7\pi/12$ ռադ-ը; զ) $-\pi/36$ ռադ-ը; է) $12{,}5\pi$ ռադ-ը; ը) $-6{,}25\pi$ ռադ-ը:

71. Ռադիաններով արտահայտել՝

ա) հավասարասրուն ուղղանկյուն եռանկյան անկյունները,
բ) հավասարակողմ եռանկյան անկյունները,
գ) ուղղանկյուն եռանկյան անկյունները, որի էջերից մեկի երկարությունը հավասար է ներքնաձիգի երկարության կեսին:

72. α անկյու՞նն է մեծ, թե՞ β անկյունը, եթե՝

ա) $\alpha=\pi/2$ ռադ, $\beta=85^\circ$, բ) $\alpha=\pi/5$ ռադ, $\beta=40^\circ$,
գ) $\alpha=\pi/10$ ռադ, $\beta=17^\circ$, դ) $\alpha=2\pi/3$ ռադ, $\beta=130^\circ$:

➢73. OA ճառագայթը, α անկյունով պտտվելով, հայտնվում է OB դիրքում: Քանի՞ աստիճան է AOB անկյունը, եթե՝

ա) $\alpha=250^\circ$, բ) $\alpha=18{,}2\pi$ ռադ, գ) $\alpha=-0{,}7\pi$ ռադ,
դ) $\alpha=-410^\circ$, ե) $\alpha=-900^\circ$, զ) $\alpha=121\pi$ ռադ:

➢74. OA ճառագայթը, α անկյունով պտտվելով, հայտնվում է OB դիրքում: Գտնել OB ուղղի կազմած անկյունները (ռադիաններով) կոորդինատային ուղիղների հետ, եթե՝

ա) $\alpha=200^\circ$, բ) $\alpha=0{,}7\pi$ ռադ, գ) $\alpha=-8{,}2\pi$ ռադ,
դ) $\alpha=-700^\circ$, ե) $\alpha=-520^\circ$, զ) $\alpha=152{,}4\pi$ ռադ:

➢75. OA ճառագայթը, α անկյունով պտտվելով, հայտնվում է OB դիրքում: Գտնել այն ամենափոքր դրական անկյունը, որով պտտելիս OA-ն կհայտնվի նույն OB դիրքում, եթե՝

ա) $\alpha=730^\circ$, բ) $\alpha=19{,}5\pi$ ռադ, գ) $\alpha=-17{,}25\pi$ ռադ,
դ) $\alpha=-550^\circ$, ե) $\alpha=-10^\circ$, զ) $\alpha=1221\pi$ ռադ:

76. Ապացուցել, որ R շառավղով՝

ա) շրջանագծի α ռադիան աղեղի երկարությունը՝ $l=\alpha R$,

բ) շրջանի α ռադիան անկյունով սեկտորի մակերեսը՝ $S=\dfrac{\alpha R^2}{2}$:

77. O կենտրոնով և R շառավղով շրջանագծի AOB կենտրոնական անկյան մեծությունն արտահայտել ռադիաններով, եթե նրա հենման AB աղեղի երկարությունը հավասար է՝

ա) R, բ) $2R$, գ) $\dfrac{\pi}{4}R$, դ) $\dfrac{2\pi}{5}R$:

78. Ամեն տարի մարտ ամսվա վերջին շաբաթ՝ լույս կիրակի գիշերվա ժամը 2-ին Հայաստանի Հանրապետությունում անցնում են ամառային ժամանակի: Այսինքն՝ այդ պահին ժամացույցի սլաքները մեկ ժամ առաջ են տալիս: Այդ ընթացքում ի՞նչ պտույտ են կատարում ժամ և րոպե ցույց տվող սլաքները: Պատասխանն արտահայտել ռադիաններով և աստիճաններով:

79. Ամեն տարի հոկտեմբեր ամսվա վերջին շաբաթ՝ լույս կիրակի գիշերվա ժամը 3-ին Հայաստանի Հանրապետությունում անցնում են ձմեռային ժամանակի: Այսինքն՝ այդ պահին ժամացույցի սլաքները մեկ ժամ ետ են տալիս: Այդ ընթացքում ի՞նչ պտույտ են կատարում ժամ և րոպե ցույց տվող սլաքները: Պատասխանն արտահայտել ռադիաններով և աստիճաններով:

Կրկնության համար

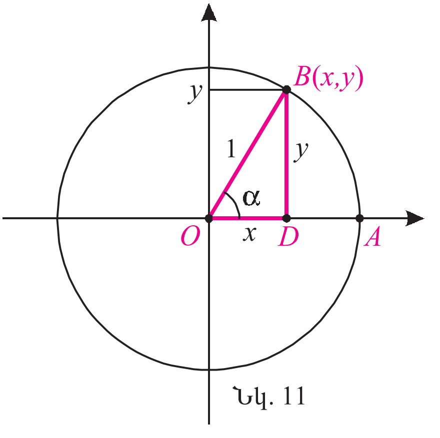
➢80. Գտնել a_n թվաբանական պրոգրեսիայի ամենափոքր դրական անդամը, եթե՝

ա) $a_1=-7$ և $d=1{,}5$, բ) $a_2=15\pi$ և $a_4=11\pi$;

81. Գտնել a_n թվաբանական պրոգրեսիայի ամենամեծ բացասական անդամը, եթե՝

ա) $a_1 = 21$ և $d = -2{,}2$, բ) $a_4 = -8\pi$ և $a_{17} = 5\pi$:

§2. Թվային արգումենտի եռանկյունաչափական ֆունկցիաները



Նկ. 11

Կոորդինատային հարթության վրա դիտարկենք 1 շառավղով և (0;0) կենտրոնով շրջանագիծը (նկ. 11), որն այսուհետև կանվանենք ***միավոր շրջանագիծ***:

Միավոր շրջանագծի OA շառավիղը, որտեղ A-ն (1;0) կետն է, կանվանենք ***սկզբնական շառավիղ***:

Ենթադրենք՝ OB շառավիղն OA սկզբնական շառավղի հետ կազմում է α սուր անկյուն: Այդ դեպքում B կետի աբսցիսը՝ x-ը, հավասար է OBD ուղղանկյուն եռանկյան OD էջի երկարությանը, իսկ օրդինատը՝ y-ը, BD էջի երկարությանն է: Ինչպես գիտեք երկրաչափության դասընթացից,

$$\sin\alpha = \frac{BD}{OB} = \frac{y}{1} = y, \qquad \cos\alpha = \frac{OD}{OB} = \frac{x}{1} = x,$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{BD}{OD} = \frac{y}{x}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{OD}{BD} = \frac{x}{y}:$$

Նման ձևով սահմանվում են կամայական α անկյան սինուսը, կոսինուսը, տանգենսը և կոտանգենսը:

Դիցուք OA սկզբնական շառավիղն O կետի շուրջը α անկյունով պտույտի հետևանքով գրավում է OB դիրքը.

sin α ***կոչվում է B կետի օրդինատը,***
cos α ***կոչվում է B կետի աբսցիսը,***
tg α ***կոչվում է B կետի օրդինատի հարաբերությունն աբսցիսին,***
ctg α ***կոչվում է B կետի աբսցիսի հարաբերությունն օրդինատին:***

Այսպիսով՝ եթե B կետի կոորդինատներն են՝ $(x; y)$ ապա

$$\sin\alpha = y, \qquad \cos\alpha = x, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}:$$

Սինուսը, կոսինուսը, տանգենսը և կոտանգենսը կոչվում են ***եռանկյունաչափական ֆունկցիաներ***:

Քանի որ միավոր շրջանագծի կամայական $B(x;y)$ կետի համար $-1\le x\le 1$ և $-1\le y\le 1$, սինուսի և կոսինուսի սահմանումից անմիջապես հետևում է, որ կամայական α -ի համար

$$\mathbf{-1\le \sin\alpha \le 1,\quad -1\le \cos\alpha \le 1}:$$

Օրինակ 1: $\alpha=0^\circ$ դեպքում OB -ն համընկնում է OA -ին, և B կետն ունենում է $x=1$, $y=0$ կոորդինատները: Հետևաբար՝

$$\sin 0^\circ=0,\ \cos 0^\circ=1,\ \operatorname{tg}0^\circ=0,\ \operatorname{ctg}0^\circ\text{-ը որոշված չէ:}$$

Պայմանավորվենք, որ այսուհետև, եթե α անկյան չափման միավորը ռադիանն է, ապա այն չենք գրում: Այսինքն՝ գրելով $\alpha=\pi/2$, հասկանում ենք՝ $\alpha=\pi/2$ ռադ և հետևաբար՝ կգրենք՝ $\sin 0=0$, $\cos 0=1$, $\sin\dfrac{\pi}{2}=1$ (տե՛ս հաջորդ օրինակը):

Օրինակ 2: $\alpha=\pi/2$ դեպքում B կետի կոորդինատներն են՝ $x=0$, $y=1$: Հետևաբար՝

$$\sin\frac{\pi}{2}=1,\ \cos\frac{\pi}{2}=0,\ \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}=0,\ \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\text{-ը որոշված չէ:}$$

Օրինակ 3: $\alpha=\pi$ դեպքում B կետի կոորդինատներն են՝ $x=-1$, $y=0$: Հետևաբար՝

$$\sin\pi=0,\ \ \cos\pi=-1,\ \ \operatorname{tg}\pi=0,\ \operatorname{ctg}\pi\text{-ն որոշված չէ:}$$

Օրինակ 4: $\alpha=\dfrac{3\pi}{2}$ (կամ $\alpha=-\dfrac{\pi}{2}$) դեպքում B կետի կոորդինատներն են՝ $x=0$, $y=-1$: Ունենք՝

$$\sin\frac{3}{2}\pi=-1,\ \cos\frac{3}{2}\pi=0,\ \operatorname{ctg}\frac{3}{2}\pi=0,\ \operatorname{tg}\frac{3}{2}\pi\text{-ն որոշված չէ:}$$

Ինչպես արդեն նշել ենք, OA շառավիղը O կետի շուրջը α, $\alpha+2\pi$ և $\alpha-2\pi$ ռադիանով պտտելիս գրավում է միևնույն դիրքը: Հետևաբար՝

$$\mathbf{\sin(\alpha\pm 2\pi)=\sin\alpha,\ \ \cos(\alpha\pm 2\pi)=\cos\alpha,}$$

$$\mathbf{\operatorname{tg}(\alpha\pm 2\pi)=\operatorname{tg}\alpha,\ \ \operatorname{ctg}(\alpha\pm 2\pi)=\operatorname{ctg}\alpha}: \qquad (1)$$

Այս բանաձևերից հետևում է, որ կամայական α անկյան սինուսը, կոսինուսը, տանգենսը և կոտանգենսը գտնելու համար բավական է իմանալ 0-ից մինչև 2π ռադիան (0°-ից մինչև 360°) անկյունների եռանկյունաչափական ֆունկցիաների արժեքները:

Հաշվի առնելով 1-ից 4-րդ օրինակները և (1) բանաձևերը, կարող ենք լրացնել հետևյալ աղյուսակը.

$\alpha\ (k\in Z)$	$2\pi k$	$\frac{\pi}{2}+2\pi k$	$\pi+2\pi k$	$\frac{3\pi}{2}+2\pi k$
$\sin\alpha$	0	1	0	-1
$\cos\alpha$	1	0	-1	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	որոշված չէ	0	որոշված չէ
$\operatorname{ctg}\alpha$	որոշված չէ	0	որոշված չէ	0

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ի՞նչ է միավոր շրջանագիծը:
2. Սահմանեք կամայական α անկյան եռանկյունաչափական ֆունկցիաները:
3. Ո՞ր անկյունների համար են որոշված սինուսը և կոսինուսը:
4. Գոյություն ունի՞ արդյոք այնպիսի α, որ՝ ա) $\sin\alpha=\sqrt{2}$; բ) $\cos\alpha=-2$:
5. Ո՞ր անկյունների համար է որոշված տանգենսը (կոտանգենսը):
6. Որո՞նք են եռանկյունաչափական ֆունկցիաների արժեքները 0, $\pi/2$, π, $3\pi/2$ անկյունների դեպքում:
7. Ինչի՞ են հավասար $\sin(\alpha\pm2\pi)$-ն, $\cos(\alpha\pm2\pi)$-ն, $\operatorname{tg}(\alpha\pm2\pi)$-ն, $\operatorname{ctg}(\alpha\pm2\pi)$-ն:

Առաջադրանքներ

82. Դիցուք OA սկզբնական շառավիղն O կետի շուրջը α անկյունով պտույտի հետևանքով գրավում է OB դիրքը: Օգտվելով հավասարասրուն ուղղանկյուն եռանկյան հատկություններից՝ գտեք B կետի կոորդինատները, եթե՝

ա) $\alpha=45^\circ$, բ) $\alpha=3\pi/4$, գ) $\alpha=-\pi/4$, դ) $\alpha=-135^\circ$:

83. Դիցուք OA սկզբնական շառավիղն O կետի շուրջը α անկյունով պտույտի հետևանքով գրավում է OB դիրքը: Օգտվելով 30° սուր անկյունով ուղղանկյուն եռանկյան հատկություններից, գտեք B կետի կոորդինատները, եթե՝

ա) 60°, բ) $\pi/6$, գ) 120°, դ) $5\pi/6$:

84. Օգտվելով նախորդ երկու խնդիրներից՝ լրացնել հետևյալ աղյուսակը:

	0° 0	30° $\pi/6$	45° $\pi/4$	60° $\pi/3$	90° $\pi/2$	120° $2\pi/3$	135° $3\pi/4$	150° $5\pi/6$	180° π
$\sin\alpha$									
$\cos\alpha$									
$\operatorname{tg}\alpha$									
$\operatorname{ctg}\alpha$									

Հաշվել արտահայտության արժեքը (85-88).

85. Գտնել արժեքը.

ա) $\sin(9\pi/4)$, բ) $\cos(19\pi/4)$, գ) $\operatorname{tg}(13\pi/6)$,

դ) $\operatorname{tg}(-570^\circ)$, ե) $\sin(-11\pi/6)$, զ) $\cos 810^\circ$:

86. ա) $\sin\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{4}$, բ) $\cos\pi+2\cos\frac{\pi}{3}$,

գ) $2\sin\frac{\pi}{3}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$, դ) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\cdot\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{3}+\sin\pi$:

87. ա) $\sin^2\frac{3\pi}{4}+\cos^2\frac{3\pi}{4}$, բ) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{6}\cdot\sin\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{2}$,

գ) $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{6}\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}$, դ) $4\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{3\pi}{4}\sin\cdot\frac{3\pi}{4}$:

88. ա) $2\sin 30^\circ+\sqrt{3}\operatorname{tg}60^\circ$, բ) $7\sqrt{3}\cos 30^\circ-3\sin 150^\circ$;

գ) $\operatorname{tg}135^\circ\cdot\cos 120^\circ+3\cos 60^\circ$, դ) $\operatorname{ctg}60^\circ\cdot\operatorname{tg}120^\circ+\cos 150^\circ\cdot\sin 60^\circ$:

➤**89.** Գտնել արտահայտության մեծագույն և փոքրագույն արժեքները.

ա) $2\sin\alpha$, բ) $-3\cos 2\alpha$, գ) $1+2\cos\alpha$,

դ) $5+3\sin\alpha$, ե) $3-\sin^2\alpha$, զ) $5\cos^2\alpha-2$:

90. Դիցուք OA սկզբնական շառավիղն O կետի շուրջը α անկյունով պտույտի հետևանքով գրավում է OB դիրքը: Գտնել B կետի կոորդինատները, եթե՝

ա) $\sin\alpha=1,\quad \cos\alpha=0$, բ) $\sin\alpha=0{,}6,\quad \cos\alpha=0{,}8$,

գ) $\sin\alpha=5/13,\quad \operatorname{tg}\alpha=5/12$, դ) $\cos\alpha=-7/11,\quad \operatorname{ctg}\alpha=7\sqrt{2}/12$:

Կրկնության համար

➤**91.** Լուծել անհավասարումների համակարգը.

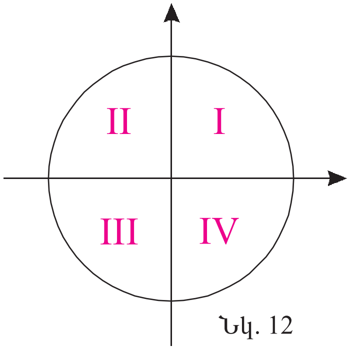
ա) $\begin{cases}x^2-3x+2\le 0\\ 2x-3<0\end{cases}$, բ) $\begin{cases}x^2+7x+12\ge 0\\ 2x+10>0\end{cases}$:

§3. Եռանկյունաչափական ֆունկցիաների նշանները՝ ըստ քառորդների

Այս պարագրաֆում կպարզենք, թե ինչ նշաններ ունեն $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ մեծությունները՝ կախված α-ից:

Կոորդինատային հարթության քառորդները համարակալենք այնպես, ինչպես ցույց է տրված 12-րդ նկարում: Մասնավորապես, առաջին քառորդն այն կետերի բազմությունն է, որոնց կոորդինատները դրական են:

Եթե սկզբնական շառավիղն α անկյունով պտույտի հետևանքով հայտնվում է I քառորդում, ասում են, որ α-ն պատկանում է I քառորդին, կամ α-ն գտնվում է I քառորդում: Համանմանորեն սահմանվում է մյուս քառորդների պատկանելությունը:



Նկ. 12

Միջակայքը ռադիաններով	Միջակայքն աստիճաններով	Քառորդը
$(0;\ \pi/2)$	$(0^\circ;\ 90^\circ)$	I
$(\pi/2;\ \pi)$	$(90^\circ;\ 180^\circ)$	II
$(\pi;\ 3\pi/2)$	$(180^\circ;\ 270^\circ)$	III
$(3\pi/2;\ 2\pi)$	$(270^\circ;\ 360^\circ)$	IV

Աղյուսակում նշված են որոշ միջակայքերի պատկանող պտտման անկյունների քառորդները:

Քանի որ 2π կամ -2π անկյունով պտույտից հետո շառավիղը հայտնվում է նույն տեղում, ուրեմն կամայական k ամբողջ թվի համար $\alpha+2\pi k$ անկյունով պտույտի հետևանքով սկզբնական շառավիղը կհայտնվի նույն դիրքում, որտեղ այն գտնվում էր α անկյունով պտույտից հետո: Հետևաբար՝ $\alpha+2\pi k$ անկյունները բոլոր ամբողջ k-երի դեպքում այն քառորդում են, որտեղ α-ն է:

Օրինակ 1: $\pi/4$-ը, $9\pi/4$-ը և $-7\pi/4$-ը պատկանում են առաջին քառորդին, իսկ $6\pi/5$-ը և $-4\pi/5$-ը՝ երրորդին:

$\mathbf{0},\ \pm\dfrac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}},\ \pm\boldsymbol{\pi},\ \pm\dfrac{\mathbf{3}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}},\ \pm\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}, \ldots$ ***անկյունները ոչ մի քառորդի չեն պատկանում:***

Եթե α անկյան չափման միավորը ռադիանն է, ապա նրա քառորդը որոշելու համար անհրաժեշտ է α-ից մի քանի անգամ հանելով կամ գումարելով 2π՝ ստանալ մի թիվ 0-ի և 2π-ի միջև: Կախված այն բանից, թե

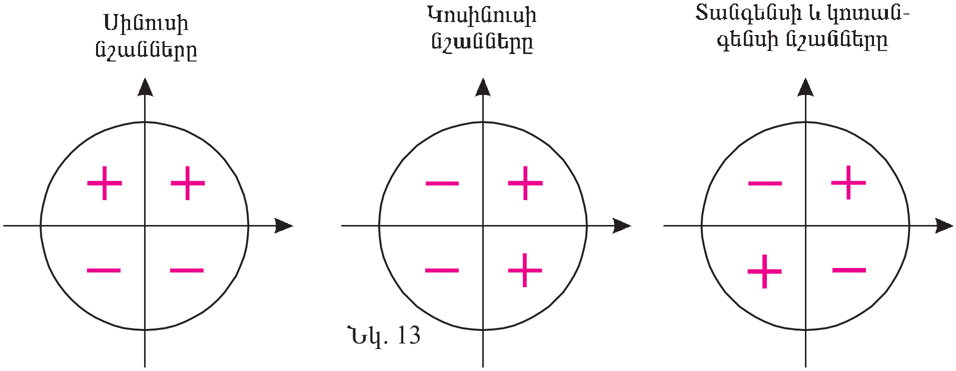
$$\left(0;\frac{\pi}{2}\right),\ \left(\frac{\pi}{2};\pi\right),\ \left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right),\ \left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right)$$

միջակայքերից որին է պատկանում այդ թիվը, α-ն կգտնվի, համապատասխանաբար, I, II, III, IV քառորդում:

Օրինակ 2: Պարզենք, թե որ քառորդին է պատկանում $12{,}25\pi$-ն: Քանի որ $12{,}25\pi-6\cdot 2\pi=0{,}25\pi$ և $0<0{,}25\pi<0{,}5\pi$, ուրեմն՝ $12{,}25\pi$-ն I քառորդում է:

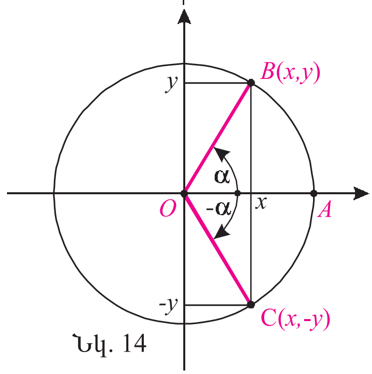
Հանգունորեն, հանելով կամ գումարելով ամբողջ թվով 360°, գտնում ենք α անկյան քառորդը, եթե չափման միավորն աստիճանն է: Օրինակ՝ 1390°-ը չորրորդ քառորդում է, քանի որ $1390 - 3 \cdot 360 = 310$ և $270 < 310 < 360$:

Պարզ է, որ եթե $B(x, y)$ կետն առաջին քառորդում է, ապա $x > 0$, $y > 0$, երկրորդ



Նկ. 13

քառորդում՝ $x < 0$, $y > 0$, երրորդ քառորդում՝ $x < 0$, $y < 0$, չորրորդ քառորդում՝ $x > 0$, $y < 0$: Հետևաբար՝ կունենանք 13-րդ նկարում պատկերված՝ եռանկյունաչափական ֆունկցիաների նշանները՝ ըստ քառորդների:



Նկ. 14

Դիցուք OA սկզբնական շառավիղն α անկյունով պտտելիս հայտնվում է OB դիրքում, իսկ $-\alpha$ անկյունով պտտելիս՝ OC դիրքում (նկ. 14): Ակնհայտ է, որ B և C կետերի աբսցիսները հավասար են, իսկ օրդինատները՝ հակադիր: Հետևաբար՝

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha \qquad \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha \qquad \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha \tag{1}$$

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ինչպե՞ս են որոշվում կոորդինատային հարթության քառորդները:
2. Նշեք հարթության վրա կետի կոորդինատների նշանները՝ ըստ քառորդների:
3. Ո՞ր քառորդին են պատկանում 0 . $\pi/2$, π , $3\pi/2$ անկյունները:
4. Ինչպե՞ս են որոշում α -ի քառորդը:
5. Նշեք եռանկյունաչափական ֆունկցիաների նշանները՝ ըստ քառորդների:
6. Ինչի՞ են հավասար $\sin(-\alpha)$-ն, $\cos(-\alpha)$-ն, $\operatorname{tg}(-\alpha)$-ն, $\operatorname{ctg}(-\alpha)$-ն:

Առաջադրանքներ

Ո՞ր քառորդում է α -ն, եթե (92-93)՝

92. ա) $\alpha = 85^\circ$, բ) $\alpha = 185^\circ$, գ) $\alpha = -450^\circ$,

դ) $\alpha = 790^\circ$, ե) $\alpha = -18^\circ$, զ) $\alpha = 298^\circ$:

93 ա) $\alpha = 3\pi/4$, բ) $\alpha = 5\pi/4$, գ) $\alpha = -\pi/10$,

դ) $\alpha = 22\pi/9$, ե) $\alpha = 3{,}5\pi$, զ) $\alpha = 35\pi/6$:

94. Ո՞ր քառորդում է $\alpha/2$ -ը, եթե՝

ա) $\pi < \alpha < 2\pi$, բ) $-3\pi < \alpha < -2\pi$, գ) $2\pi < \alpha < 3\pi$,

դ) $360^\circ < \alpha < 540^\circ$, ե) $-360^\circ < \alpha < -180^\circ$, զ) $180^\circ < \alpha < 360^\circ$:

➤**95.** Ո՞ր քառորդում է α -ն, եթե՝

ա) $\cos\alpha > 0$, $\operatorname{tg}\alpha > 0$, բ) $\cos\alpha < 0$, $\operatorname{ctg}\alpha > 0$,

գ) $\sin\alpha > 0$, $\operatorname{tg}\alpha < 0$, դ) $\operatorname{ctg}\alpha < 0$, $\cos\alpha < 0$,

ե) $\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha > 0$, զ) $\cos\alpha > 0$, $\operatorname{tg}\alpha < 0$:

96. Ի՞նչ նշան ունեն $\sin\alpha$ -ն, $\cos\alpha$ -ն, $\operatorname{tg}\alpha$ -ն և $\operatorname{ctg}\alpha$ -ն, եթե՝

ա) $\alpha = 158^\circ$, բ) $\alpha = 1{,}3\pi$, գ) $\alpha = 0{,}3\pi$, դ) $\alpha = 355^\circ$:

97. Գտնել արտահայտության նշանը․

ա) $\sin 89^\circ \cdot \operatorname{tg} 91^\circ$, բ) $\cos\dfrac{\pi}{10} \cdot \sin\dfrac{7\pi}{3}$, գ) $\operatorname{tg} 19^\circ \cdot \cos 119^\circ$,

դ) $\sin 122^\circ \cdot \cos 390^\circ$, ե) $\operatorname{ctg}\dfrac{7\pi}{8} \cdot \sin\dfrac{8\pi}{7}$, զ) $\cos\dfrac{11\pi}{5} \cdot \operatorname{tg}\dfrac{5\pi}{11}$:

98. Գտնել արտահայտության նշանը, եթե հայտնի է, որ α -ն սուր անկյուն է:

ա) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right)$, բ) $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} - \alpha\right)$, գ) $\operatorname{tg}(\pi - \alpha)$,

դ) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)$, ե) $\operatorname{ctg}(2\pi - \alpha)$, զ) $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} + \alpha\right)$:

99. Գտնել արտահայտության արժեքը.

ա) $\sin(-30^\circ)$, բ) $\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$, գ) $\operatorname{tg}\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$,

դ) $\operatorname{tg}\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)$, ե) $\operatorname{ctg}(-135^\circ)$, զ) $\operatorname{ctg}\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)$:

➤**100.** Գտնել α անկյան սինուսը, կոսինուսը, տանգենսը և կոտանգենսը, եթե՝

ա) $\alpha = \dfrac{25\pi}{6}$, բ) $\alpha = 840^\circ$, գ) $\alpha = -420^\circ$,

դ) $\alpha = -\dfrac{3\pi}{4}$, ե) $\alpha = \dfrac{7\pi}{6}$, զ) $\alpha = \dfrac{11\pi}{4}$:

➢**101.** Գտնել.

ա) $\sqrt{(a+15)(6-a)}$ արտահայտության արժեքը, եթե $\sqrt{a+15}+\sqrt{6-a}=5$,

բ) $\sqrt{25-a}+\sqrt{9-a}$ արտահայտության արժեքը, եթե $\sqrt{25-a}-\sqrt{9-a}=2$,

գ) a^2+a^{-2} արտահայտության արժեքը, եթե $a-\dfrac{1}{a}=4$:

§4. Հիմնական եռանկյունաչափական նույնությունները

Դիցուք սկզբնական շառավիղն α անկյունով պտտելուց ստացված շառավղի ծայրակետի կոորդինատներն են՝ x և y: Համաձայն եռանկյունաչափական ֆունկցիաների սահմանման՝

$$\sin\alpha=y,\ \cos\alpha=x,\ \mathrm{tg}\,\alpha=\frac{y}{x},\ \mathrm{ctg}\,\alpha=\frac{x}{y}:$$

Այստեղից հետևում է, որ α -ի թույլատրելի արժեքների դեպքում՝

ա) $\mathbf{tg\alpha=\dfrac{sin\alpha}{cos\alpha}}$, **բ)** $\mathbf{ctg\alpha=\dfrac{cos\alpha}{sin\alpha}}$, **գ)** $\mathbf{tg\alpha\cdot ctg\alpha=1}$**:** (1)

Այնուհետև, հաշվի առնելով, որ $B(x;\,y)$ կետը գտնվում է միավոր շրջանագծի վրա, այսինքն՝ $x^2+y^2=1$, կամայական α -ի համար կստանանք՝

$$\mathbf{sin^2\alpha+cos^2\alpha=1}: \qquad (2)$$

Այս նույնության բոլոր անդամները բաժանելով $\cos^2\alpha$ -ի (եթե $\cos\alpha\neq0$), ստանում ենք՝

$$\mathbf{1+tg^2\alpha=\frac{1}{cos^2\alpha}}: \qquad (3)$$

Իսկ (2) նույնության բոլոր անդամները բաժանելով $\sin^2\alpha$ -ի (եթե $\sin\alpha\neq0$), ստանում ենք՝

$$\mathbf{1+ctg^2\alpha=\frac{1}{sin^2\alpha}}: \qquad (4)$$

Ստացված (1)-(4) բանաձևերը, որոնք առնչություններ են միևնույն արգումենտի (անկյան) եռանկյունաչափական ֆունկցիաների միջև, կոչվում են ***հիմնական եռանկյունաչափական նույնություններ***:

(1գ) նույնությունը հնարավորություն է տալիս գտնելու $\operatorname{tg}\alpha$-ն, եթե հայտնի է $\operatorname{ctg}\alpha$-ն և հակառակը:

Օրինակ 1: Ենթադրենք՝ $\operatorname{ctg}\alpha = 2$:

Օգտվելով (1 գ) նույնությունից՝ ստանում ենք՝ $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha} = \dfrac{1}{2}$:

Փորձենք գտնել նաև $\sin\alpha$-ն և $\cos\alpha$-ն: Կիրառելով (3) և (4) նույնությունները, ստանում ենք.

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha} = \frac{1}{1+4} = 0{,}2, \quad \cos^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1}{1+0{,}25} = 0{,}8:$$

Այստեղից $\sin\alpha$-ն և $\cos\alpha$-ն որոշելու համար, անհրաժեշտ է իմանալ նաև նրանց նշանները: Դրա համար բավական է իմանալ α անկյան քառորդը: Օրինակ՝ եթե α-ն առաջին քառորդում է, ապա՝ $\sin\alpha = \sqrt{0{,}2}$, $\cos\alpha = \sqrt{0{,}8}$, իսկ եթե α-ն երրորդ քառորդում է, ապա՝ $\sin\alpha = -\sqrt{0{,}2}$, $\cos\alpha = -\sqrt{0{,}8}$:

Օրինակ 2: Դիցուք $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$ և $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$: Գտնենք $\cos\alpha$-ն, $\operatorname{tg}\alpha$-ն և $\operatorname{ctg}\alpha$-ն:

Ըստ պայմանի՝ α-ն առաջին քառորդում է: Հետևաբար՝ նրա կոսինուսը դրական է, և

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \frac{4}{5}:$$

Կիրառելով (1) նույնությունները՝ կստանանք՝

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{3}{4}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{4}{3}:$$

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Որո՞նք են հիմնական եռանկյունաչափական նույնությունները:
2. Ապացուցեք $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ նույնությունը:
3. Ապացուցեք $1+\operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ նույնությունը:
4. Ապացուցեք $1+\operatorname{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$ նույնությունը:

Առաջադրանքներ

102. Ապացուցեք, որ կամայական α անկյան սինուսը և կոսինուսը միաժամանակ զրո լինել չեն կարող:

Օգտվելով հիմնական եռանկյունաչափական նույնություններից՝ պարզեցնել արտահայտությունը (103-105).

103. ա) $1-\cos^2\alpha$, բ) $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-1$,

գ) $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha$, դ) $\operatorname{tg}\beta\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{tg}^2\beta$:

104. ա) $\dfrac{\sin\alpha-\sin^3\alpha}{\cos\alpha-\cos^3\alpha}$, բ) $\dfrac{\sin^3\alpha-\sin^5\alpha}{\cos^3\alpha-\cos^5\alpha}$,

գ) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha-\cos^2\alpha}{\sin\alpha}$, դ) $\dfrac{1-\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha$:

105. ա) $\dfrac{\operatorname{tg}\beta\operatorname{ctg}\beta-\sin^2\beta}{\operatorname{ctg}\beta}$, բ) $\cos^2\beta(1+\operatorname{tg}^2\beta)-\sin^2\beta$,

գ) $\operatorname{ctg}^2\alpha+(1+\operatorname{tg}^2\alpha)\cos^2\alpha$, դ) $\cos^2\alpha\left(\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}+1\right)+\operatorname{tg}^2\alpha$:

Ապացուցել, որ թույլատրելի արժեքների տիրույթում արտահայտության արժեքը կախված չէ α-ից (106-107).

106. ա) $\dfrac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha+1}{\sin^2\alpha}$, բ) $\dfrac{\cos^4\alpha-\sin^4\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$,

գ) $(\cos\alpha+\sin\alpha)^2-2\sin\alpha\cos\alpha$, դ) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$:

107. ա) $\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}+\dfrac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$, բ) $\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}+\dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}-\dfrac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$:

Ապացուցել նույնությունը (108-109).

108. ա) $\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}+\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{\cos\alpha}$, բ) $\dfrac{\operatorname{tg}^2x-1}{\operatorname{tg}^2x+1}+\cos^2x=\sin^2x$:

➢**109.** ա) $\dfrac{\sin^3x+\cos^3x}{\cos x+\sin x}-\sin x\cos x=(\cos x-\sin x)^2$,

բ) $\dfrac{\cos^3x-\sin^3x}{\cos x-\sin x}-\sin x\cos x=1$:

110. Գտնել α անկյան մնացած եռանկյունաչափական ֆունկցիաների արժեքները, եթե հայտնի է, որ՝

ա) $\cos\alpha=0{,}8$, և α-ն չորրորդ քառորդի անկյուն է,

բ) $\sin\alpha=\dfrac{5}{13}$, և α-ն երկրորդ քառորդի անկյուն է,

գ) $\operatorname{tg}\alpha=0{,}75$, և α-ն երրորդ քառորդի անկյուն է,

դ) $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{7}{24}$, և α-ն առաջին քառորդի անկյուն է:

* **111.** Գտնել a պարամետրը, եթե հայտնի է. որ տրված հավասարման արմատները որևէ

անկյան սինուսը և կոսինուսն են՝

ա) $25x^2-5x+a=0$, բ) $ax^2-5x-12=0$:

112. Գտնել՝

ա) $\cos\alpha$-ն, եթե $\sin\alpha=\frac{9}{41}$ և $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$,

բ) $\mathrm{tg}\alpha$-ն, եթե $\cos\alpha=\frac{8}{17}$ և $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$:

113. Հաշվել՝

ա) $\frac{7}{\sqrt{40}}\sin\alpha$-ն, եթե $\cos\alpha=-\frac{3}{7}$ և $3\pi<\alpha<\frac{7\pi}{2}$,

բ) $-15\,\mathrm{tg}\,\alpha$-ն, եթե $\cos\alpha=-\frac{15}{17}$ և $\frac{9\pi}{2}<\alpha<5\pi$:

114. Հաշվել՝

ա) $\cos\alpha$-ն, եթե $\sin\alpha=\frac{\sqrt{65}}{9}$ և $\mathrm{tg}\,\alpha>0$,

բ) $9\sin\alpha$-ն, եթե $\mathrm{ctg}\,\alpha=-2\sqrt{2}$ և $\cos\alpha<0$:

Կրկնության համար

115. Լուծել հավասարումը.

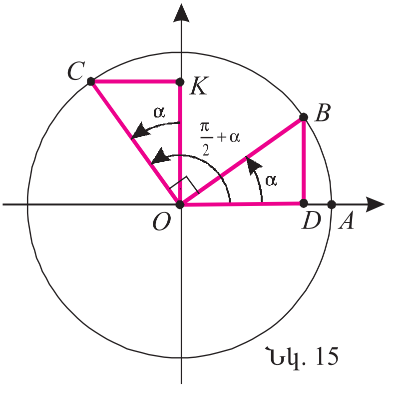
ա) $|3x-5|=7$, բ) $|6x-7|=7x+1$, գ) $|8x-4|=|9x-5|$:

116. Լուծել անհավասարումը.

ա) $|2-7x|<5$, բ) $|5x-5|\geq 2$, գ) $|7x+2|\leq|3-x|$:

§5. Բերման բանաձևերը

Այս պարագրաֆում ստանում ենք բանաձևեր, որոնք $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$, $\pi\pm\alpha$, $\frac{3}{2}\pi\pm\alpha$ և $2\pi\pm\alpha$ անկյունների եռանկյունաչափական ֆունկցիաներն արտահայտում են α անկյան եռանկյունաչափական ֆունկցիաներով: Այդ բանաձևերն անվանում են ***բերման բանաձևեր***:



Նկ. 15

Ենթադրենք՝ OA սկզբնական շառավիղը α և $\alpha+\frac{\pi}{2}$ անկյուններով պտտելիս համընկնում է, համապատասխանաբար, OB և OC շառավիղներին (նկ. 15): Այդ դեպքում OB և OC շառավիղները փոխ-ուղղահայաց են:

Դիտարկենք BOD և COK ուղղանկյուն եռանկյունները: Նրանց ներքնաձիգները հավասար են՝ $OB = OC$, իսկ $\angle COK = \angle BOD$, որպես փոխուղղահայաց կողմերով անկյուններ ($OB \perp OC$, $OK \perp OD$): Ըստ ուղղանկյուն եռանկյունների հավասարության հայտանիշի՝ $\Delta BOD = \Delta COK$: Հետևաբար՝ $OK = OD$ և $CK = BD$:

Հեշտ է ստուգել, որ, անկախ այն բանից, թե որ քառորդում է B կետը, C կետը պտույտի դրական ուղղությամբ հաջորդ քառորդում է, և եթե B կետի կոորդինատներն են՝ $B(x, y)$, ապա C կետի կոորդինատները կլինեն՝ $C(-y, x)$, և կունենանք՝

$$\sin\alpha = y, \quad \cos\alpha = x, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = x, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -y :$$

Հետևաբար՝

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\alpha, \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin\alpha : \qquad (1)$$

Հաջորդաբար կիրառելով (1) բանաձևերը՝ ստանում ենք՝

$$\begin{aligned} \sin(\pi+\alpha) &= \sin\left(\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin\alpha, \\ \cos(\pi+\alpha) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\cos\alpha, \end{aligned} \qquad (2)$$

Նույն ձևով՝

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) = -\cos\alpha, \quad \cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) = \sin\alpha : \qquad (3)$$

Արդեն գիտենք, որ

$$\sin(2\pi+\alpha) = \sin\alpha, \qquad \cos(2\pi+\alpha) = \cos\alpha : \qquad (4)$$

Ստացված (1) – (4) բանաձևերը նույնություններ են: Այս բանաձևերում α-ի փոխարեն տեղադրելով $-\alpha$ և կիրառելով §3-ի (1) բանաձևերը՝ կստանանք բերման բանաձևերի հաջորդ խումբը՝

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2}+(-\alpha)\right) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha, \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}+(-\alpha)\right) = -\sin(-\alpha) = \sin\alpha, \end{aligned} \qquad (5)$$

$$\sin(\pi-\alpha) = -\sin(-\alpha) = \sin\alpha, \quad \cos(\pi-\alpha) = -\cos(-\alpha) = -\cos\alpha$$

և այլն:

Տանգենսի և կոտանգենսի բերման բանաձևերը կարելի է ստանալ սինուսի և կոսինուսի բերման բանաձևերից: Օրինակ՝

$$\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \mathrm{tg}\,\alpha : \qquad (6)$$

Հանգունորեն,

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{ctg}\alpha, \ \operatorname{tg}(\pi-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha, \ \operatorname{ctg}(\pi-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha: \quad (7)$$

Ինչպե՞ս մտապահել այսքան բանաձևերը: Պարզվում է, որ կա ընդհանուր օրինաչափություն, և բերման բանաձևերը կիրառելիս պետք է կիրառել հետևյալ կանոնը:

1. ***Եռանկյունաչափական ֆունկցիան չի փոխվում, եթե α-ին (կամ $-\alpha$-ին) գումարված է π կամ 2π և փոխվում է, եթե գումարված է $\pi/2$ կամ $3\pi/2$: Ընդ որում, սինուսը փոխվում է կոսինուսի, կոսինուսը՝ սինուսի, տանգենսը՝ կոտանգենսի, կոտանգենսը՝ տանգենսի:***

2. ***Աջ մասում եռանկյունաչափական ֆունկցիայից առաջ դրվում է այն նշանը, ինչ նշան կունենա ձախ մասը, եթե α-ն լինի սուր անկյուն:***

Օրինակ 1: Գտնենք $\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)$-ն:

Քանի որ ($-\alpha$)-ին գումարված է $\frac{3}{2}\pi$, ուրեմն՝ կոսինուսը կփոխվի սինուսի: Եթե α-ն սուր անկյուն է, ապա $\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)$-ն գտնվում է երրորդ քառորդում, որտեղ կոսինուսը բացասական է: Հետևաբար՝

$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=-\sin\alpha:$$

Օրինակ 2: Ստանանք բերման բանաձև $\operatorname{tg}(\pi+\alpha)$-ի համար:

Ֆունկցիան չի փոխվում, քանի որ գումարված է π: Եթե α-ն առաջին քառորդում է, ապա ($\pi+\alpha$)-ն երրորդ քառորդում է, որտեղ տանգենսը դրական է: Հետևաբար՝ $\operatorname{tg}(\pi+\alpha)=\operatorname{tg}\alpha$:

Նույն ձևով կարող ենք համոզվել, որ $\operatorname{ctg}(\pi+\alpha)=\operatorname{ctg}\alpha$: Այս բանաձևերը ցույց են տալիս, որ տանգենս և կոտանգենս ֆունցիաների արժեքները չեն փոխվում, եթե արգումենտին գումարում կամ հանում ենք π (հետևաբար՝ նաև ամբողջ թվով π-եր):

$$\mathbf{tg(\alpha\pm\pi)=tg\alpha} \qquad \mathbf{ctg(\alpha\pm\pi)=ctg\alpha}$$

Բերման բանաձևերն ունեն կարևոր կիրառություն: Կամայական անկյան եռանկյունաչափական ֆունկցիայի արժեքը հաշվելու համար բավական է իմանալ սուր անկյան եռանկյունաչափական ֆունկցիաների արժեքները:

Օրինակ 3: Գտնենք $\sin 150^\circ$-ը: Նկատենք, որ $150^\circ=180^\circ-30^\circ$: Բերման բանաձև կիրառելով՝ ստանում ենք՝ $\sin 150^\circ=\sin(180^\circ-30^\circ)=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$:

Նույն ձևով՝ $\cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\cos\frac{2\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$, $\cos\frac{5\pi}{4} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$:

Կիրառելով բերման բանաձևերը, դժվար չէ ստանալ հետևյալ աղյուսակը:

α	120° $\frac{2\pi}{3}$	135° $\frac{3\pi}{4}$	150° $\frac{5\pi}{6}$	180° π	270° $\frac{3\pi}{2}$
$\sin\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\cos\alpha$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0
$\operatorname{tg}\alpha$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	որոշվ. չէ
$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	որոշվ. չէ	0

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ո՞ր բանաձևերն են անվանում բերման բանաձևեր:
2. Ձևակերպեք բերման բանաձևերի կիրառման կանոնը:
3. Ի՞նչ կարևոր կիրառություն ունեն բերման բանաձևերը:
4. Փորձեք ինքնուրույն լրացնել աղյուսակը:

Առաջադրանքներ

117. Բերել α անկյան եռանկյունաչափական ֆունկցիայի.

ա) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, բ) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, գ) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$,

դ) $\operatorname{ctg}(\alpha - \pi)$, ե) $\operatorname{tg}(\alpha - \pi)$, զ) $\cos\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)$,

է) $\sin\left(\alpha - \frac{3}{2}\pi\right)$, ը) $\cos(\pi + \alpha)$, թ) $\operatorname{ctg}(\pi - \alpha)$:

118. Օգտվելով բերման բանաձևերից՝ գտնել α անկյան սինուսը, կոսինուսը, տանգենսը և կոտանգենսը.

ա) $\alpha = 210^\circ$, բ) $\alpha = \frac{5}{4}\pi$, գ) $\alpha = \frac{4}{3}\pi$,

դ) $\alpha = 300^\circ$, ե) $\alpha = \frac{9}{4}\pi$, զ) $\alpha = 330^\circ$:

Փոխարինել α անկյան եռանկյունաչափական ֆունկցիայով (119-120).

119. ա) $\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha)$, բ) $\cos(90^\circ + \alpha)$, գ) $\sin(270^\circ - \alpha)$,

դ) $\sin(270^\circ + \alpha)$, ե) $\operatorname{tg}(\alpha - 270^\circ)$, զ) $\operatorname{ctg}(\alpha - 180^\circ)$:

120. ա) $\cos(810^\circ + \alpha)$, բ) $\sin(990^\circ - \alpha)$, գ) $\operatorname{tg}(\alpha - 450^\circ)$,

դ) $\operatorname{tg}(7\pi - \alpha)$, ե) $\cos\left(\alpha - \frac{13\pi}{2}\right)$, զ) $\operatorname{ctg}\left(\frac{7\pi}{2} + \alpha\right)$:

➢ **121.** Ձևափոխել արտահայտությունը.

ա) $\sin^2(\pi + x)$, բ) $\cos^2\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$, գ) $\operatorname{tg}^2(\pi + x)$,

դ) $\cos^4(\pi - x)$, ե) $\sin^3\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$, զ) $\operatorname{ctg}^3\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$:

122. Պարզեցնել արտահայտությունը.

ա) $\sin^2(180^\circ - \alpha) + \sin^2(270^\circ - \alpha)$,

բ) $\sin(90^\circ - \alpha) + \cos(180^\circ + \alpha) + \operatorname{tg}(270^\circ + \alpha) + \operatorname{ctg}(360^\circ + \alpha)$,

գ) $\sin(\pi + \alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \cos(2\pi + \alpha)\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$,

դ) $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\operatorname{tg}(\pi + \alpha)\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$:

➢ **123.** Գտնել՝

ա) $27\sin(2\pi - \alpha)$-ն, եթե $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{65}}{9}$ և $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$:

բ) $27\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$-ն, եթե $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{32}}{9}$ և $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$:

Կրկնության համար

➢ **124.** Գետի հոսանքով նավակն անցավ 28 կմ և անմիջապես վերադարձավ՝ ամբողջ ուղևորության համար ծախսելով 7 ժ: Որքա՞ն է նավակի արագությունը կանգնած ջրում, եթե գետի հոսանքի արագությունը 3 կմ/ժ է:

➢ **125.** Գետի հոսանքով նավակն անցավ 80 կմ և անմիջապես վերադարձավ՝ ամբողջ ուղևորության համար ծախսելով 9 ժ: Որքա՞ն է գետի հոսանքի արագությունը, եթե նավակի արագությունը կանգնած ջրում 18 կմ/ժ է:

§6. Երկու անկյունների գումարի և տարբերության եռանկյունաչափական ֆունկցիաների բանաձևերը

Այս պարագրաֆում կստանանք բանաձևեր, որոնք երկու անկյունների գումարի և տարբերության եռանկյունաչափական ֆունկցիաները արտահայտում են այդ անկյունների եռանկյունաչափական ֆունկցիաներով:

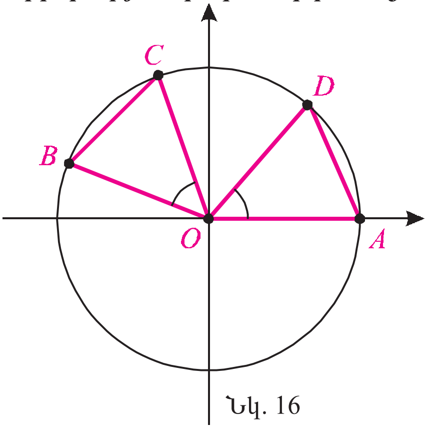
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \qquad (1)$$

Այս բանաձևը կոչվում է ***երկու անկյունների տարբերության կոսինուսի բանաձև:***

Ապացուցում: Դիցուք միավոր շրջանագծի OA սկզբնական շառավիղը պտտելով α, β և $\alpha-\beta$ անկյուններով, համապատասխանաբար, ստանում ենք OB, OC և OD շառավիղները (նկ. 16): Այդ դեպքում, ըստ սինուսի և կոսինուսի սահմանման, A, B, C, D կետերը կունենան հետևյալ կոորդինատները՝

$A(1;0)$, $B(\cos\alpha;\sin\alpha)$, $C(\cos\beta;\sin\beta)$,

$D(\cos(\alpha-\beta);\sin(\alpha-\beta))$:



Նկ. 16

Պարզ է, որ OC շառավիղը $\alpha-\beta$ անկյունով պտտելով՝ կստանանք OB-ն: Հետևաբար՝ BOC և DOA կենտրոնական անկյունները հավասար են: Ուստի հավասար են նաև նրանց հենման BC և AD աղեղները և այդ աղեղների ձգած լարերը՝ $BC=AD$: Օգտվելով երկրաչափությունից հայտնի՝ երկու կետերի հեռավորության բանաձևից՝ ստանում ենք՝

$AD=\sqrt{(1-\cos(\alpha-\beta))^2+(0-\sin(\alpha-\beta))^2}$, $BC=\sqrt{(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2}$:

Քանի որ $AD=BC$, ուրեմն՝

$$(1-\cos(\alpha-\beta))^2+\sin^2(\alpha-\beta)=$$

$$=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2$$

Բացելով փակագծերը և օգտվելով $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ նույնությունից՝ ստանում ենք

(1) բանաձևը:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \qquad (2)$$

Այս բանաձևը կոչվում է ***երկու անկյունների գումարի կոսինուսի բանաձև:***

Ապացուցում: Օգտվելով (1) նույնությունից և հաշվի առնելով, որ $\cos(-\beta)=\cos\beta$, $\sin(-\beta)=-\sin\beta$, ստանում ենք՝

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha-(-\beta))=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)=$$
$$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta:$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \qquad (3)$$

Այս բանաձևը կոչվում է ***երկու անկյունների գումարի սինուսի բանաձև:***

Ապացուցում: Կիրառելով բերման բանաձևեր և (1) նույնությունը՝ կստանանք՝

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right)=$$
$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta:$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \qquad (4)$$

Այս բանաձևը կոչվում է ***երկու անկյունների տարբերության սինուսի բանաձև:***

Ապացուցում: Կիրառելով (3) բանաձևը α և $-\beta$ անկյունների համար և հաշվի առնելով, որ $\sin(-\beta)=-\sin\beta$, $\cos(-\beta)=\cos\beta$, կստանանք՝

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha+(-\beta))=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)=$$
$$=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta:$$

Ստացված (1)-(4) նույնությունները հնարավորություն են տալիս կամայական α-ի և β-ի դեպքում $\alpha\pm\beta$ անկյունների սինուսը և կոսինուսն արտահայտել α-ի և β-ի սինուսով և կոսինուսով:

Օրինակ 1: Կիրառելով (4) և (1) բանաձևերը՝ ստանում ենք՝

$$\sin 15^\circ=\sin\left(45^\circ-30^\circ\right)=\sin 45^\circ\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\sin 30^\circ=$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{4},$$

$$\cos 105^\circ=\cos\left(60^\circ+45^\circ\right)=\cos 60^\circ\cos 45^\circ-\sin 60^\circ\sin 45^\circ=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}\left(1-\sqrt{3}\right)}{4}:$$

(1)-(4) նույնություններից ստացվում են բանաձևեր $\alpha \pm \beta$ անկյան տանգենսի և կոտանգենսի համար: Իրոք, եթե $\cos(\alpha+\beta) \neq 0$, ապա

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}: \qquad (5)$$

Եթե $\cos\alpha\cos\beta \neq 0$, ապա (5) հավասարության աջ մասի համարիչն ու հայտարարը բաժանելով $\cos\alpha\cos\beta$-ի՝ ստանում ենք՝

$$\mathbf{tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\,\alpha+tg\,\beta}{1-tg\,\alpha\, tg\,\beta}}: \qquad (6)$$

Նույն ձևով ստացվում են հետևյալ բանաձևերը, որոնք ճիշտ են, եթե որոշված են դրանցում առկա եռանկյունաչափական ֆունկցիաները:

$$\mathbf{tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\,\alpha-tg\,\beta}{1+tg\,\alpha\, tg\,\beta}},$$

$$\mathbf{ctg(\alpha+\beta)=\frac{ctg\,\alpha\, ctg\,\beta-1}{ctg\,\alpha+ctg\,\beta},\quad ctg(\alpha-\beta)=\frac{ctg\,\alpha\, ctg\,\beta+1}{ctg\,\beta-ctg\,\alpha}}: \qquad (7)$$

Օրինակ 2: Հաշվենք $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$-ն, եթե $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\beta=\frac{24}{25}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ և $\frac{3}{2}\pi<\beta<2\pi$: Քանի որ α-ն պատկանում է երկրորդ քառորդին, ուրեմն՝

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\frac{4}{5} \text{ և } \operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{3}{4}:$$

Հանգունորեն ստանում ենք՝

$$\sin\beta=-\sqrt{1-\cos^2\beta}=-\frac{7}{25},\quad \operatorname{tg}\beta=\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=-\frac{7}{24}:$$

Հետևաբար՝ $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\frac{-\frac{3}{4}-\frac{7}{24}}{1-\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{24}}=-\frac{4}{3}:$

Պատասխան՝ $-4/3$:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Գրեք երկու անկյունների գումարի և տարբերության կոսինուսի բանաձևերը:
2. Գրեք երկու անկյունների գումարի և տարբերության սինուսի բանաձևերը:
3. Գրեք $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$-ի և $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$-ի բանաձևերը:
4. Գրեք $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)$-ի և $\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)$-ի բանաձևերը:

Առաջադրանքներ

126. Ձևափոխել արտահայտությունը.

ա) $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$, բ) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$, գ) $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$,

դ) $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$, ե) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$, զ) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$:

127. Հաշվել $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ և $\operatorname{ctg}\alpha$ մեծությունները, եթե՝

ա) $\alpha=15^\circ$, բ) $\alpha=75^\circ$, գ) $\alpha=105^\circ$, դ) $\alpha=165^\circ$:

➢ **128.** Ապացուցել բերման բանաձևերը՝ օգտվելով երկու անկյունների գումարի և տարբերության սինուսի և կոսինուսի բանաձևերից:

Պարզեցնել արտահայտությունը (129-130).

129. ա) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\sin\alpha$, բ) $\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)-\cos\alpha$,

գ) $2\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)-\cos\alpha$, դ) $\sqrt{2}\cos\alpha-2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$:

130. ա) $\dfrac{\sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{4}+\alpha\right)+\cos\alpha}{\sqrt{2}\cos\left(\frac{5\pi}{4}-\alpha\right)+\sin\alpha}$, բ) $\dfrac{\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\alpha\right)+\frac{1}{2}\sin\alpha}{\sin\left(\frac{7\pi}{6}-\alpha\right)+\frac{1}{2}\cos\alpha}$:

131. Հաշվել արտահայտության արժեքը.

ա) $\sin 27^\circ\cos 3^\circ+\cos 27^\circ\sin 3^\circ$, բ) $\cos 87^\circ\cos 27^\circ+\sin 87^\circ\sin 27^\circ$:

Ապացուցել հավասարությունը (132-133).

132. ա) $\left(\sin\frac{\pi}{15}+\cos\frac{\pi}{10}\right)^2+\left(\cos\frac{\pi}{15}+\sin\frac{\pi}{10}\right)^2=3$,

բ) $\left(\cos\frac{\pi}{9}-\cos\frac{2\pi}{9}\right)^2+\left(\sin\frac{\pi}{9}+\sin\frac{2\pi}{9}\right)^2=1$:

➢ **133.** ա) $\dfrac{\cos 23^\circ-\operatorname{tg}22^\circ\sin 23^\circ}{\sin 8^\circ+\operatorname{tg}22^\circ\cos 8^\circ}=\sqrt{2}$, բ) $\dfrac{\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{9}\cos\frac{\pi}{18}+\sin\frac{\pi}{18}}{\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9}-\sin\frac{\pi}{9}}=\sqrt{3}$:

➢ **134.** Ապացուցել նույնությունը.

ա) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$,

բ) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\cos^2\beta-\cos^2\alpha$:

135. Գտնել՝

ա) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$-ն, եթե $\sin\alpha=-\frac{3}{\sqrt{10}}$ և $\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi$,

բ) $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{4}-\alpha\right)$-ն, եթե $\sin\alpha=-\frac{5}{\sqrt{34}}$ և $\frac{3}{2}\pi<\alpha<2\pi$:

136. Հաշվել՝

ա) $\sin(\alpha+\beta)$-ն, եթե $\sin\alpha=\frac{4}{5}$, $\cos\beta=-\frac{4}{5}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$,

բ) $\sin(\alpha-\beta)$-ն, եթե $\sin\alpha=\frac{24}{25}$, $\cos\beta=-\frac{4}{5}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$:

Կրկնության համար

137. Պարզեցնել արտահայտությունը.

ա) $\left(\frac{5(m-2)}{m^3-8}-\frac{m+2}{m^2+2m+4}\right)\cdot\frac{2m^2+4m+8}{m-3}$, բ) $\left(\frac{n+2}{3n}-\frac{2}{n-2}-\frac{n-14}{3n^2-6n}\right):\frac{n+2}{6n}\cdot\frac{1}{n-5}$:

§7. Կրկնակի անկյան եռանկյունաչափական ֆունկցիաների բանաձևերը

Նախորդ պարագրաֆում տեսանք, որ կամայական α-ի և β-ի համար

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta:$$

Այս նույնության մեջ տեղադրելով $\beta=\alpha$, ստանում ենք՝

$$\mathbf{\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}: \qquad (1)$$

Այստեղից և $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ նույնությունից ստանում ենք հետևյալ բանաձևերը.

$$\mathbf{\cos2\alpha=1-2\sin^2\alpha,\qquad \cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1}: \qquad (2)$$

Նման ձևով երկու անկյունների գումարի սինուսի, տանգենսի և կոտանգենսի բանաձևերում վերցնելով $\beta=\alpha$, ստանում ենք՝

$$\mathbf{\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,} \qquad (3)$$

$$\mathbf{\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha},\quad \operatorname{ctg}2\alpha=\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\alpha}}: \qquad (4)$$

(1)-(4) բանաձևերն անվանում են ***կրկնակի անկյան եռանկյունաչափական ֆունկցիաների բանաձևեր:***

Նշենք, որ (4) բանաձևերից առաջինը ճիշտ է, եթե որոշված են $\operatorname{tg}\alpha$-ն և $\operatorname{tg}2\alpha$-ն, իսկ երկրորդը՝ եթե որոշված են $\operatorname{ctg}\alpha$-ն և $\operatorname{ctg}2\alpha$-ն

Օրինակ 1: Գտնենք $\sin 2\alpha$-ն, եթե $\cos\alpha = 0{,}6$ և $-\pi/2 < \alpha < 0$:

Քանի որ α-ն պատկանում է չորրորդ քառորդին, ուրեմն՝ $\sin\alpha < 0$, և

$$\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -0{,}8:$$

Հետևաբար՝ $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = -2\cdot 0{,}8\cdot 0{,}6 = -0{,}96$:

Պատասխան՝ $-0{,}96$:

Օրինակ 2: Գտնենք $\cos 2\alpha$-ն, եթե $\cos\alpha = 1/3$:

Համաձայն (2) բանաձևի՝ $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2\cdot\dfrac{1}{9} - 1 = -\dfrac{7}{9}$:

Պատասխան՝ $-7/9$:

Եռանկյունաչափական արտահայտությունները ձևափոխելիս հաճախ կիրառվում են (2) առնչություններից անմիջապես ստացվող հետևյալ բանաձևերը, որոնք անվանում են ***աստիճանի իջեցման բանաձևեր.***

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2},\quad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}: \qquad (5)$$

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ձևակերպեք կրկնակի անկյան եռանկյունաչափական ֆունկցիաների բանաձևերը:
2. Արտածեք կրկնակի անկյան եռանկյունաչափական ֆունկցիաների բանաձևերը
3. Արտածեք աստիճանի իջեցման բանաձևերը:

Առաջադրանքներ

138. Պարզեցնել արտահայտությունը.

ա) $\dfrac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}$, բ) $\dfrac{\sin 2\alpha}{2\cos^2\alpha}$, գ) $\dfrac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha} - \cos\alpha$,

դ) $\cos 2\alpha - \cos^2\alpha$, ե) $\sin^2\alpha + \cos 2\alpha$, զ) $\sin^2\alpha - \cos^2\alpha$:

139. Գտնել արտահայտության արժեքը.

ա) $2\sin\dfrac{\pi}{12}\cos\dfrac{\pi}{12}$, բ) $\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ$,

գ) $8\sin^2\dfrac{\pi}{8}\cos^2\dfrac{\pi}{8}$, դ) $2\left(\sin^2\dfrac{\pi}{8} - \cos^2\dfrac{\pi}{8}\right)^2$:

140. Հաշվել արտահայտության արժեքը.

ա) $\dfrac{2\operatorname{tg}15^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 15^\circ}$, բ) $\dfrac{2\sqrt{3}\operatorname{tg}75^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 75^\circ}$, գ) $\dfrac{\operatorname{ctg}^2\frac{3\pi}{8}-1}{2\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{8}}$ ։

141. Օգտվելով աստիճանի իջեցման բանաձևերից՝ հաշվել արտահայտության արժեքը.

ա) $\sin^2\dfrac{\pi}{8}+2\sin^2\dfrac{\pi}{12}$, բ) $\cos^2\dfrac{\pi}{12}-\sin^2\dfrac{\pi}{8}$,

գ) $4\cos^2\dfrac{\pi}{8}-6\cos^2\dfrac{\pi}{12}$, դ) $2\sin^2\dfrac{\pi}{12}+8\cos^2\dfrac{\pi}{8}$ ։

Պարզեցնել արտահայտությունը (142-143).

142. ա) $\sin\dfrac{\pi-\alpha}{2}\cos\dfrac{\pi-\alpha}{2}$, բ) $2\cos^2\dfrac{\pi+\alpha}{4}-2\sin^2\dfrac{\pi+\alpha}{4}$ ։

143. ա) $\dfrac{\sin 2\alpha-2\sin\alpha}{\cos\alpha-1}$, բ) $\sin 2\alpha\operatorname{ctg}\alpha-1$, գ) $\dfrac{\cos 2\alpha-\cos^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}$,

դ) $(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)\sin 2\alpha$, ե) $(\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha)\sin 2\alpha$ ։

Ապացուցել նույնությունը (144-145).

144. ա) $1+\sin 2\alpha=(\sin\alpha+\cos\alpha)^2$, բ) $1-\sin 2\alpha=(\sin\alpha-\cos\alpha)^2$,

գ) $\dfrac{\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}$, դ) $\dfrac{1-\cos\alpha+\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha-\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha$ ։

➤**145.** ա) $\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos 2\alpha}$, բ) $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}2\alpha=\dfrac{1}{\sin 2\alpha}$,

գ) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{2}{\sin 2\alpha}$, դ) $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha=2\operatorname{ctg}2\alpha$ ։

Պարզեցնել արտահայտությունը (146-147).

146. ա) $\dfrac{1+\sin 2\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}$, բ) $1-2\sin^2\dfrac{\alpha}{8}$, գ) $1-8\cos^2\alpha\sin^2\alpha$ ։

147. ա) $2\cos^2\alpha-\cos 2\alpha$, բ) $\dfrac{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}$,

գ) $\dfrac{1-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}$, դ) $\dfrac{\cos^2 2\alpha-4\cos^2\alpha+3}{\cos^2 2\alpha+4\cos^2\alpha-1}$ ։

➤**148.** Ապացուցել նույնությունը.

ա) $\dfrac{2}{\sin 4x}-\operatorname{ctg}2x=\operatorname{tg}2x$, բ) $\dfrac{\sin 4x}{1+\cos 4x}\cdot\dfrac{\cos 2x}{1+\cos 2x}=\operatorname{tg}x$ ։

149. Հաշվել՝

ա) $25\sin 2\alpha$ -ն, եթե $\cos\alpha=-0{,}6$ և $\pi<\alpha<\dfrac{3}{2}\pi$,

բ) $18\cos 2\alpha$ -ն, եթե $\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{11}}{6}$ ։

Կրկնության համար

150. 60 գ 15% -անոց սպիրտի լուծույթից վերցրեցին որոշ քանակությամբ լուծույթ և տեղը լցրեցին նույն կշռով 20% -անոց սպիրտի լուծույթ, որից հետո ստացվեց 16% -անոց սպիրտի լուծույթ: Քանի՞ գրամ լուծույթ էին վերցրել:

151. 80 գ 15% -անոց սպիրտի լուծույթից վերցրեցին որոշ քանակությամբ լուծույթ և տեղը լցրեցին նույն կշռով թորած ջուր, որից հետո ստացվեց 12% -անոց սպիրտի լուծույթ: Ինչքա՞ն սպիրտի լուծույթ վերցրին:

§8. Կես անկյան եռանկյունաչափական ֆունկցիաների բանաձևերը

Նախորդ պարագրաֆի (5) նույնություններում α -ի փոխարեն վերցնելով $\alpha/2$, կստանանք հետևյալ բանաձևերը, որոնց աջ կողմում նշանը պետք է ընտրել այնպես, որ աջ և ձախ մասերի նշանները համընկնեն.

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1\ \ \cos\alpha}{2}},\qquad \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}: \tag{1}$$

Օրինակ 1: Դիցուք $\sin\alpha=-\frac{4}{5}$ և $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$: Գտնենք $\sin\frac{\alpha}{2}$-ը և $\cos\frac{\alpha}{2}$-ը:

Նախ անհրաժեշտ է գտնել $\cos\alpha$ -ն: Քանի որ α -ն երրորդ քառորդում է՝ ուրեմն՝ $\cos\alpha<0$ և

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\frac{16}{25}}=-\frac{3}{5}:$$

$\sin\frac{\alpha}{2}$-ը և $\cos\frac{\alpha}{2}$-ը հաշվելու համար անհրաժեշտ է իմանալ $\frac{\alpha}{2}$-ի քառորդը: Խնդրի պայմանի համաձայն՝ $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$, որտեղից հետևում է, որ $\frac{\pi}{2}<\frac{\alpha}{2}<\frac{3\pi}{4}$: Ուրեմն՝ $\alpha/2$ -ը երկրորդ քառորդում է, որտեղ սինուսը դրական է, իսկ կոսինուսը՝ բացասական: Կիրառելով (1) բանաձևերը՝ ստանում ենք՝

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}{2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5},\qquad \cos\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}}=-\frac{\sqrt{5}}{5}:$$

Պատասխան՝ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $-\frac{\sqrt{5}}{5}$:

Օգտվելով (1) բանաձևերից՝ կարող ենք ստանալ բանաձև կես անկյան տանգենսի համար, որտեղ դարձյալ նշանը որոշվում է ըստ $\alpha/2$ -ի քառորդի.

$$\mathbf{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}: \qquad (2)$$

Օրինակ 2: Հաշվենք $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$ -ը:

Քանի որ $\frac{\pi}{8}$ -ը առաջին քառորդում է, ուրեմն՝ $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}>0$ և

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}=\sqrt{\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)^2}{2}}=\sqrt{2}-1:$$

Պատասխան՝ $\sqrt{2}-1$:

$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ -ի համար կարելի է ստանալ բանաձևեր, որոնցում նշանի ընտրության հարց չի առաջանում: Իրոք, եթե $\sin\frac{\alpha}{2}\neq 0$, ապա

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}:$$

$$\mathbf{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}: \qquad (3)$$

Նման ձևով կստանանք, որ եթե $\cos\frac{\alpha}{2}\neq 0$, ապա

$$\mathbf{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}: \qquad (4)$$

(1)–(4) նույնությունները կոչվում են ***կես անկյան բանաձևեր:***

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Որո՞նք են կես անկյան եռանկյունաչափական ֆունկցիաների բանաձևերը:
2. Ինչպե՞ս է որոշվում նշանը կես անկյան (1) և (2) բանաձևերում:
3. Արտածեք (4) բանաձևը:

Առաջադրանքներ

152. Հաշվել α անկյան սինուսը, կոսինուսը և տանգենսը, եթե՝

ա) $\alpha=22{,}5^\circ$, բ) $\alpha=\frac{3\pi}{8}$, գ) $\alpha=\frac{5\pi}{12}$, դ) $\alpha=165^\circ$:

153. Պարզեցնել արտահայտությունը.

ա) $\cos\alpha+\sin\alpha\,\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}$, բ) $\cos\alpha-\sin\alpha\,\mathrm{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$, գ) $\sin^2\alpha-2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\cos\alpha$,

դ) $2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}+\cos\alpha$, ե) $\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-\dfrac{\cos\alpha}{2}$, զ) $\dfrac{1+\cos\alpha}{\mathrm{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2}}+\cos\alpha$:

154. Ապացուցել նույնությունը.

ա) $1+\sin\alpha=2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)$, բ) $1-\sin\alpha=2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)$,

գ) $\dfrac{\cos\dfrac{\alpha}{2}-\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}+\sin\dfrac{\alpha}{2}}=\dfrac{1}{\cos\alpha}-\mathrm{tg}\,\alpha$, դ) $\mathrm{ctg}\dfrac{\alpha}{2}-\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}=2\,\mathrm{ctg}\,\alpha$:

155. Հավասարասրուն եռանկյան գագաթի անկյան կոսինուսը 1/9 է: Գտնել հիմքին առընթեր անկյան կոսինուսը:

156. Գտնել՝

ա) $\sqrt{3}\sin\dfrac{\alpha}{2}$ -ը, եթե $\cos\alpha=\dfrac{5}{6}$ և $0<\alpha<\pi$,

բ) $8\cos\dfrac{\alpha}{2}$ -ը, եթե $\cos\alpha=\dfrac{1}{8}$ և $-\pi<\alpha<0$:

157. Ապացուցել, որ՝

ա) $\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{12}+\mathrm{ctg}\dfrac{\pi}{12}=4$, բ) $\mathrm{ctg}\dfrac{\pi}{8}-\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{8}=2$,

գ) $\dfrac{\mathrm{ctg}\dfrac{\pi}{12}-\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{12}}{\mathrm{ctg}\dfrac{\pi}{8}+\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{8}}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}$, դ) $\dfrac{\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{12}-\mathrm{ctg}\dfrac{\pi}{12}}{\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{8}-\mathrm{ctg}\dfrac{\pi}{8}}=\sqrt{3}$:

158. Հաշվել՝

ա) $\sqrt{6}\sin\dfrac{\alpha}{2}$ -ը, եթե $\mathrm{ctg}\,\alpha=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ և $\dfrac{5}{2}\pi<\alpha<3\pi$,

բ) $\sqrt{11}\cos\dfrac{\alpha}{2}$ -ը, եթե $\mathrm{tg}\,\alpha=\dfrac{6\sqrt{2}}{7}$ և $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$:

Կրկնության համար

159. Ի՞նչ կշռային հարաբերությամբ պետք է խառնել 25% -անոց աղի լուծույթը մաքուր աղի հետ 40% -անոց աղի լուծույթ ստանալու համար:

160. Ի՞նչ կշռային հարաբերությամբ պետք է խառնել 15% -անոց աղի լուծույթը թորած ջրի հետ 12% -անոց աղի լուծույթ ստանալու համար:

§9. Եռանկյունաչափական ֆունկցիաների արտադրյալի և գումարի բանաձևերը

Այս պարագրաֆում կստանանք բանաձևեր եռանկյունաչափական ֆունկցիաների արտադրյալը գումարի և գումարը արտադրյալի ձևափոխելու համար: Գումարելով

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \qquad (1)$$

և

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \qquad (2)$$

նույնությունները, և ստացված հավասարության երկու մասերը բաժանելով 2-ի, ստանում ենք՝

$$\mathbf{\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)):} \qquad (3)$$

Իսկ եթե (2)-ից հանենք (1)-ը և ստացվածը բաժանենք 2-ի, կստանանք՝

$$\mathbf{\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)):} \qquad (4)$$

Նման ձևով

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \quad \text{և} \quad \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

նույնություններից կստանանք՝

$$\mathbf{\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)):} \qquad (5)$$

Ստացված (3)-(5) բանաձևերը հնարավորություն են տալիս եռանկյունաչափական ֆունկցիաների ***արտադրյալը ձևափոխել գումարի:***

Օրինակ 1: Գտնենք $\sin 37{,}5^\circ\cdot\sin 7{,}5^\circ$ արտահայտության արժեքը: Կիրառելով (4) բանաձևը՝ ստանում ենք՝

$$\sin 37{,}5^\circ\cdot\sin 7{,}5^\circ=\frac{1}{2}\left(\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}:$$

Պատասխան՝ $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)/4$:

Եթե (3) նույնության մեջ տեղադրենք $\alpha=\dfrac{x+y}{2}$ և $\beta=\dfrac{x-y}{2}$, կստանանք՝

$$\mathbf{\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}:} \qquad (6)$$

Հանգունորեն (4) և (5) նույնություններից, համապատասխանաբար, ստացվում են՝

$$\mathbf{\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}}, \quad (7)$$

$$\mathbf{\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}}: \quad (8)$$

Վերջին բանաձևում y-ի փոխարեն տեղադրելով $-y$, ստանում ենք՝

$$\mathbf{\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}}: \quad (9)$$

(6)-(9) բանաձևերը կոչվում են ***եռանկյունաչափական ֆունկցիաների գումարի բանաձևեր***: Դրանք հնարավորություն են տալիս եռանկյունաչափական ֆունկցիաների գումարը և տարբերությունը ձևափոխել արտադրյալի:

Օրինակ 2: Ստուգենք, որ $\sin 61^\circ - \sin 59^\circ = \sin 1^\circ$: Իրոք,

$$\sin 61^\circ - \sin 59^\circ = 2\sin\frac{61^\circ - 59^\circ}{2}\cdot\cos\frac{61^\circ + 59^\circ}{2} = 2\sin 1^\circ\cdot\cos 60^\circ = \sin 1^\circ:$$

Նկատենք, որ գումարման (6)-(9) բանաձևերում գումարվում կամ հանվում են նույնանուն ֆունկցիաներ: Սակայն այդ բանաձևերը կիրառվում են նաև այն դեպքում, երբ ֆունկցիաներից մեկը սինուսն է, մյուսը՝ կոսինուսը: Օրինակ՝

$$\sin x + \cos y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos y = 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x-y}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x+y}{2}\right):$$

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ինչի՞ է հավասար երկու անկյունների կոսինուսների արտադրյալը:
2. Ինչի՞ է հավասար երկու անկյունների սինուսների արտադրյալը:
3. Ձևափոխեք գումարի $\sin x\cos y$ արտադրյալը:
4. Ձևափոխեք արտադրյալի $\cos\alpha \pm \cos\beta$ արտահայտությունը:
5. Ձևափոխեք արտադրյալի $\sin\alpha \pm \sin\beta$ արտահայտությունը:

Առաջադրանքներ

Գտնել արտահայտության արժեքը (161-163).

161. ա) $\sin 37{,}5^\circ\cdot\sin 7{,}5^\circ$, բ) $\cos 37{,}5^\circ\cdot\cos 7{,}5^\circ$,
գ) $\sin 37{,}5^\circ\cdot\cos 7{,}5^\circ$, դ) $\sin 75^\circ\cdot\sin 15^\circ$:

162. ա) $\sin 75^\circ\cdot\cos 15^\circ$, բ) $\cos 67{,}5^\circ\cdot\sin 22{,}5^\circ$,
գ) $\cos 67{,}5^\circ\cdot\cos 22{,}5^\circ$, դ) $\cos 97{,}5^\circ\cdot\cos 37{,}5^\circ$:

163. ա) $\cos\frac{5\pi}{12}\cdot\cos\frac{\pi}{4}$, բ) $\cos\frac{5\pi}{12}\cdot\sin\frac{\pi}{4}$,
գ) $\sin\frac{\pi}{12}\cdot\cos\frac{\pi}{4}$, դ) $\sin\frac{\pi}{12}\cdot\sin\frac{\pi}{4}$:

Արտահայտությունը ներկայացնել արտադրյալի տեսքով (164-166).

164. ա) $\sin\alpha+\sin 5\alpha$, բ) $\sin 8x-\sin 2x$,

գ) $\cos 3y-\cos y$, դ) $\cos 2x+\cos 4x$:

165. ա) $\sin 12^\circ+\sin 24^\circ$, բ) $\cos\frac{11}{12}\pi+\cos\frac{3}{4}\pi$,

գ) $\cos\frac{\pi}{6}-\cos\frac{7\pi}{12}$, դ) $\sin\frac{2\pi}{5}+\sin\frac{\pi}{5}$:

166. ա) $\sin x+\cos 3x$, բ) $\sin 2x-\cos 2y$,

գ) $\cos y+\sin 3y$, դ) $\cos 4x-\sin 2y$:

***167.** a և b էջերով ուղղանկյուն եռանկյան մի անկյունը 15° է: Գտնել ներքնաձիգի երկարությունը, եթե՝ ա) $a+b=\sqrt{54}$, բ) $a-b=\sqrt{50}$:

168. Ցույց տալ, որ

ա) $\dfrac{\sin 47^\circ+\sin 13^\circ}{\cos 62^\circ+\cos 28^\circ}=\sqrt{0{,}5}$, բ) $\dfrac{\sin 41^\circ-\sin 19^\circ}{\cos 34^\circ-\cos 56^\circ}=\sqrt{1{,}5}$:

➤169. Ապացուցել նույնությունը.

ա) $\dfrac{\sin(\alpha+30^\circ)-\cos(\alpha+60^\circ)}{\sin(\alpha+60^\circ)-\cos(\alpha+30^\circ)}=\sqrt{3}$, բ) $\dfrac{\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)}=\sqrt{2}$:

170. Ապացուցել, որ

ա) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$, բ) $\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$:

171. Ձևափոխել արտահայտությունը, օգտվելով նախորդ վարժությունից.

ա) $\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}3x$, բ) $\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}3x$, գ) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$, դ) $\operatorname{tg}\frac{4\pi}{5}-\operatorname{tg}\frac{3\pi}{5}$:

Ներկայացնել արտադրյալի տեսքով (172-173).

172. ա) $1/2+\cos x$, բ) $\sqrt{3}/2+\sin 2\alpha$, գ) $1-\sin x$,

դ) $1/2+\sin 4x$, ե) $\sqrt{3}-2\sin 2\alpha$, զ) $\sqrt{2}+2\cos x$:

➤173. ա) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x$, բ) $\cos x-\cos 3x+\cos 5x-\cos 7x$,

գ) $1-\cos 4x+\cos 5x-\cos 9x$, դ) $1+\cos 2x+\sin 8x+\sin 6x$:

Կրկնության համար

➤174. Գյուղից կայարան հեռավորությունը 60 կմ է: Մոտոցիկլավարը գյուղից դուրս եկավ հեծանվորդից 1,25 ժամ ուշ, և կայարան հասավ այն ժամանակ, երբ հեծանվորդը կայարանից հեռու էր 21 կմ: Գտնել հեծանվորդի արագությունը, եթե այն 18 կմ/ժ-ով փոքր է մոտոցիկլավարի արագությունից:

➤175. Գյուղից դեպի քաղաք, որոնց հեռավորությունը 120 կմ է, մեկնեց մարդատար ավտոմեքենան: 30 ր անց քաղաքից գյուղ մեկնեց բեռնատարը և մարդատարին հանդիպեց քաղաքից 45 կմ հեռավորությամբ: Գտնել բեռնատարի արագությունը, եթե այն մարդատար մեքենայի արագությունից փոքր է 5 կմ/ժ-ով:

§10. Եռանկյունաչափական արտահայտությունների նույնական ձևափոխություններ

Նույնական են համարվում այն ձևափոխությունները, որոնք չեն փոփոխում արտահայտության թույլատրելի արժեքների բազմությունը, և ձևափոխությունից հետո ստացված արտահայտության արժեքը յուրաքանչյուր թույլատրելի արժեքի դեպքում համընկնում է սկզբնական արտահայտության արժեքին:

Կատարելով նույնական ձևափոխություններ և կիրառելով մեզ արդեն հայտնի եռանկյունաչափական նույնությունները՝ կարելի է ստանալ նոր նույնություններ:

Օրինակ 1: Ստանանք բանաձև $\sin 3\alpha$ -ի համար: Կիրառելով գումարի սինուսի և կրկնակի անկյան բանաձևերը՝ ստանում ենք՝

$$\sin 3\alpha = \sin(\alpha + 2\alpha) = \sin\alpha\cos 2\alpha + \cos\alpha\sin 2\alpha =$$

$$= \sin\alpha\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right) + 2\sin\alpha\cos^2\alpha =$$

$$= \sin\alpha\left(1 - 2\sin^2\alpha\right) + 2\sin\alpha\left(1 - \sin^2\alpha\right) = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha :$$

Այսպիսով՝ $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$:

Օրինակ 2: Պարզեցնենք

$$\frac{\sin\alpha - 2\sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos\alpha - 2\cos 2\alpha + \cos 3\alpha}$$

արտահայտությունը: Համարիչում ու հայտարարում առաջին և երրորդ անդամների գումարը դարձնելով արտադրյալ՝ կստանանք՝

$$\frac{2\sin 2\alpha\cos\alpha - 2\sin 2\alpha}{2\cos 2\alpha\cos\alpha - 2\cos 2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha(\cos\alpha - 1)}{\cos 2\alpha(\cos\alpha - 1)} = \operatorname{tg} 2\alpha :$$

Օրինակ 3: Ապացուցենք, որ $\sqrt{3}\cos 15^\circ + \sin 15^\circ = 2\sin 75^\circ$:

Իրոք, օգտվելով երկու անկյունների գումարի սինուսի բանաձևից՝ կստանանք՝

$$\sqrt{3}\cos 15^\circ + \sin 15^\circ = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 15^\circ + \frac{1}{2}\sin 15^\circ\right) =$$

$$= 2\left(\sin 60^\circ\cos 15^\circ + \cos 60^\circ\sin 15^\circ\right) = 2\sin 75^\circ :$$

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ո՞ր ձևափոխությունն է կոչվում նույնական:
2. Արտածեք բանաձև, որը $\cos 3\alpha$ -ն արտահայտում է $\cos\alpha$ -ով:

Առաջադրանքներ

Ապացուցել նույնությունը (176-179).

176. ա) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=\cos 2\alpha$, բ) $(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)\sin 2\alpha=2$,

գ) $\dfrac{\cos^2\alpha}{1+\sin\alpha}+\sin\alpha=1$, դ) $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}=\cos 2\alpha$:

177. ա) $\cos^2(\pi+\alpha)+\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=1$,

բ) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\sin(\pi-\alpha)=\dfrac{1}{2}\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+2\alpha\right)$:

178. ա) $(1+\operatorname{ctg}^2\alpha)(1-\sin^2\alpha)=\operatorname{ctg}^2\alpha$, բ) $(1+\operatorname{tg}^2\alpha)(1-\cos^2\alpha)=\operatorname{tg}^2\alpha$:

179. ա) $\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}+\dfrac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}=1$, բ) $\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}-\dfrac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}=\cos 2\alpha$:

➢**180.** 4α անկյան սինուսն ու կոսինուսն արտահայտեք α անկյան սինուսով և կոսինուսով:

181. Պարզեցնել արտահայտությունը.

ա) $\dfrac{\sin(45^\circ+\alpha)+\sin(45^\circ-\alpha)}{\sin(45^\circ+\alpha)-\sin(45^\circ-\alpha)}$, բ) $\dfrac{\cos(\alpha+60^\circ)-\cos(\alpha-60^\circ)}{\cos(\alpha+60^\circ)+\cos(\alpha-60^\circ)}$:

Ապացուցել հավասարությունը (182-183).

* **182.** ա) $\cos\dfrac{2\pi}{7}+\cos\dfrac{4\pi}{7}+\cos\dfrac{6\pi}{7}=-\dfrac{1}{2}$,

բ) $\cos\dfrac{\pi}{5}+\cos\dfrac{3\pi}{5}=\dfrac{1}{2}$, գ) $\sin\dfrac{3\pi}{10}-\sin\dfrac{\pi}{10}=\dfrac{1}{2}$:

183. ա) $8\cos 10^\circ\cos 20^\circ\cos 40^\circ=\operatorname{ctg}10^\circ$,

ա) $16\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 60^\circ\cos 80^\circ=1$:

➢**184.** Ապացուցել, որ եթե $0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$, ապա՝

ա) $\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}=2\cos\dfrac{x}{2}$, բ) $\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}=2\sin\dfrac{x}{2}$:

Ապացուցել նույնությունը (185-186).

➢**185.** ա) $\dfrac{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)-\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}=\operatorname{tg}\beta$, բ) $\dfrac{\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)-\operatorname{tg}(45^\circ-\alpha)}{\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)+\operatorname{tg}(45^\circ-\alpha)}=\sin 2\alpha$:

➢**186.** ա) $\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos^3\alpha}=1+\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^3\alpha$,

բ) $(\operatorname{tg}2\alpha-2\operatorname{tg}\alpha)(\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha)=2\operatorname{tg}^2\alpha$:

Ապացուցել հավասարությունը (187-188).

187. ա) $\sin^4\dfrac{\pi}{8}+\cos^4\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{3}{4}$, բ) $\sin^4\dfrac{\pi}{12}+\cos^4\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{7}{8}$:

գ) $\sin^2 10^\circ+\sin^2 50^\circ+\sin^2 70^\circ=1{,}5$,

դ) $\cos^2 50^\circ+\cos^2 70^\circ-\cos^2 80^\circ=0{,}5$:

188. ա) $\dfrac{2\cos 50^\circ+\cos 70^\circ}{\sqrt{3}\sin 70^\circ}=1$, բ) $\dfrac{2\sin 70^\circ-\sqrt{3}\cos 10^\circ}{\sin 10^\circ}=1$:

Կրկնության համար

189. Գտնել արտահայտության թույլատրելի արժեքների բազմությունը.

ա) $x+\dfrac{1}{x^2-4}$, բ) $\dfrac{x}{x^2-5x+6}$, գ) $\sqrt{x^2-7x+10}$, դ) $\dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2+x-6}}$:

Գլուխ 3
Ֆունկցիա

§1. Թվային ֆունկցիա

Դուք արդեն ծանոթ եք ֆունկցիայի գաղափարին՝ որպես կամայական բազմությունների տարրերի համապատասխանության: Այս գլխում կուսումնասիրենք միայն թվային ֆունկցիաներ, այսինքն՝ այնպիսի ֆունկցիաներ, որոնք որոշված են թվային բազմությունում և ընդունում են թվային արժեքներ: Հիշեցնենք, որ թվային է կոչվում այն բազմությունը, որի տարրերը թվեր են:

Ասում են, որ X թվային բազմությունում որոշված է f թվային ֆունկցիա, եթե այն X բազմության ամեն մի x թվի համապատասխանեցնում է որևէ y թիվ՝ $y = f(x)$:

Ֆունկցիայի՝ $y = f(x)$ գրելաձևում x-ը և y-ը փոփոխականներ են, իսկ f տառը խորհրդանշում է այն կանոնը, որով x փոփոխականի յուրաքանչյուր արժեքին (X բազմությունից) համապատասխանում է y փոփոխականի որոշակի արժեք: Նման դեպքում ասում են, որ y-ը x-ից ֆունկցիա է, կամ՝ y-ը ***ֆունկցիոնալ կախվածության մեջ է*** x-ից: x փոփոխականն անվանում են ***անկախ փոփոխական***, իսկ y-ը՝ ***կախյալ փոփոխական***: x փոփոխականն անվանում են նաև ***ֆունկցիայի արգումենտ***:

X բազմությունն անվանում են f ***ֆունկցիայի որոշման տիրույթ*** և նշանակում՝ $D(f)$:

Անկախ փոփոխականը սովորաբար նշանակում են x տառով, կախյալը՝ y, իսկ թվային ֆունկցիաները՝ f, g, F, φ և այլ տառերով:

f ֆունկցիայի որոշման տիրույթը նշելու համար ընդունված է նաև գրության հետևյալ ձևը՝ $f: X \to Y$: Սա նշանակում է, որ $D(f) = X$ և f-ն ընդունում է արժեքներ Y բազմությունից:

Եթե f ֆունկցիան $a \in X$ թվին համապատասխանեցնում է b թիվը, ապա ասում են, որ a կետում f ***ֆունկցիայի արժեքը*** b-ն է կամ՝ f ***ֆունկցիան*** a ***կետում ընդունում է*** b ***արժեքը*** և գրում են՝ $f(a) = b$: Այս դեպքում ասում են նաև, որ b թիվը f ֆունկցիայի արժեք է, իսկ այդպիսի բոլոր b-երի բազմությունն անվանում են f ***ֆունկցիայի արժեքների բազմություն*** կամ ***արժեքների տիրույթ*** և նշանակում՝ $E(f)$: Այս նշանակումներով կարող ենք գրել՝ $f: D(f) \to E(f)$:

«Տրված է f ֆունկցիան» ասելով հասկանում ենք, որ տրված են նրա որոշման $X = D(f)$ տիրույթը և այն կանոնը, որով X բազմության ամեն մի x թվին համապատասխանում է որևէ $f(x)$ թիվ: Հաճախ այդ կանոնը տրվում է ինչ-որ արտահայտությամբ, որը ցույց է տալիս, թե ինչ գործողություններ պետք է կատարել x թվով՝ $f(x)$-ը ստանալու համար:

Դիցուք f ֆունկցիայի որոշման տիրույթն X բազմությունն է և այդ բազմության ամեն մի թվին ֆունկցիան համապատասխանեցնում է նրա քառակուսին: Այս ֆունկցիան տալու համար կօգտագործենք գրության հետևյալ համարժեք ձևերը՝

ա) $y = x^2$, $x \in X$,

բ) $f(x) = x^2$, $x \in X$,

գ) x^2, $x \in X$:

Օրինակ 1: $f(x) = b$, $x \in X$, ֆունկցիան իր որոշման տիրույթի կամայական կետում ընդունում է միևնույն՝ b արժեքը: Այսպիսի ֆունկցիան կոչվում է ***հաստատուն ֆունկցիա***:

Օրինակ 2: $x+1$, $x \in X$, ֆունկցիան X բազմության կամայական x թվին համապատասխանեցնում է $x+1$ թիվը:

Եթե ֆունկցիան տրված է արտահայտությամբ և նշված չէ որոշման տիրույթը, ապա ֆունկցիայի որոշման տիրույթ համարվում է այդ արտահայտության թույլատրելի արժեքների բազմությունը:

Օրինակ 3: $f(x) = x+1$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթը $(-\infty; \infty)$-ն է: Ակնհայտ է, որ $E(f) = (-\infty; \infty)$:

Չնայած երկրորդ և երրորդ օրինակներում ֆունկցիաները որոշվում են նույն արտահայտությամբ, այդ ֆունկցիաները նույնն են միայն այն դեպքում, երբ $X = (-\infty; \infty)$: Մնացած դեպքերում այդ ֆունկցիաների որոշման տիրույթները տարբեր են, հետևաբար, տարբեր են նաև ֆունկցիաները:

Օրինակ 4: Գիտենք, որ քառակուսու մակերեսը հավասար է նրա կողմի երկարության քառակուսուն: Փաստորեն, եթե x-ով նշանակենք քառակուսու կողմի երկարությունը, իսկ y-ով՝ մակերեսը, ապա $y = x^2$: Քառակուսու մակերեսի ֆունկցիոնալ կախվածությունը նրա կողմի երկարությունից տրվում է $y = x^2$ բանաձևով:

Այս օրինակում բնական է $y = x^2$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթը համարել $(0; \infty)$ միջակայքը*), քանի որ քառակուսու կողմի երկարությունն արտահայտվում է դրական թվով: Ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը նույնպես $(0; \infty)$ միջակայքն է, քանի որ յուրաքանչյուր y դրական թիվ $x = \sqrt{y}$ կողմով քառակուսու մակերեսն է:

---

*) *Այսուհետև միջակայք կանվանենք նաև* $(-\infty; \infty)$, $(-\infty; a)$, $(a; \infty)$ *տեսքի բազմությունները, որտեղ* $a \in \mathbf{R}$:

Օրինակ 5: Եթե y-ով նշանակենք x մակերեսով քառակուսու կողմի երկարությունը, ապա կստանանք $y=\sqrt{x}$, $x\in(0;\infty)$ ֆունկցիան կամ քառակուսու կողմի երկարության ֆունկցիոնալ կախվածությունը քառակուսու մակերեսից:

Օրինակ 6: Գտնենք $f(x)=\sqrt{4+x^2}$ ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը:

Երբ x-ը փոփոխվում է $(-\infty;+\infty)$ միջակայքում, x^2 արտահայտությունն ընդունում է $[0;+\infty)$ միջակայքի բոլոր արժեքները, ուստի $(4+x^2)$ արտահայտության արժեքների բազմությունը կլինի $[4;+\infty)$ միջակայքը, իսկ $\sqrt{4+x^2}$ արտահայտության արժեքների բազմությունը՝ $[2,+\infty)$ միջակայքը: Հետևաբար՝ $E(f)=[2,+\infty)$:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ո՞ր բազմությունն են անվանում թվային:
2. Ի՞նչ է թվային ֆունկցիան:
3. Ո՞րն է անկախ փոփոխականը և ո՞րը՝ կախյալ:
4. Ի՞նչ ենք հասկանում, ասելով՝ «տրված է f ֆունկցիան»:
5. Ո՞ր բազմությունն են անվանում f ֆունկցիայի արժեքների բազմություն:
6. Ո՞ր ֆունկցիան են անվանում հաստատուն ֆունկցիա:
7. Ո՞րն է ֆունկցիայի որոշման տիրույթը, եթե ֆունկցիան տրված է արտահայտությամբ, և նշված չէ նրա որոշման տիրույթը:
8. Ի՞նչ բանաձևով է տրվում քառակուսու մակերեսի ֆունկցիոնալ կախվածությունը նրա կողմի երկարությունից:

Առաջադրանքներ

190. Գտնել f ֆունկցիայի արժեքները տրված x կետերում.

ա) $f(x)=x+1/x$, $x=-2$, $x=3$, $x=1/3$,

բ) $f(x)=\sqrt{4x-x^2}+1$, $x=0$, $x=2$, $x=4$,

գ) $f(x)=\sin^2 2x$, $x=-\dfrac{\pi}{12}$, $x=0$, $x=\dfrac{\pi}{3}$,

դ) $f(x)=x^3+\sqrt[3]{x}$, $x=-1$, $x=0$, $x=8$:

191. Դիցուք $f(x)=\dfrac{3x-5}{x^2-1}$:

ա) Գտնել f ֆունկցիայի որոշման տիրույթը;

բ) Գտնել f ֆունկցիայի արժեքները $x=-2$, $x=0{,}5$, $x=3$ կետերում:

➢գ) Պատկանո՞ւմ են արդյոք $-7;\ 0;\ 2{,}5$ թվերը f ֆունկցիայի արժեքների բազմությանը:

➢**192.** Գտնել այն կետը, որտեղ $f(x)=\dfrac{5x}{4x^2-3}$ ֆունկցիան ընդունում է՝

ա) 5 արժեքը, բ) 2,5 արժեքը, գ) -5 արժեքը:

193. Որոշ երկրներում (օրինակ, ԱՄՆ-ում) մարմինների ջերմաստիճանն ընդունված է չափել ոչ թե Ցելսիուսի սանդղակով, որը կիրառում ենք մենք, այլ Ֆարենհեյթի սանդղակով: Ֆարենհեյթի սանդղակով T աստիճանի ֆունկցիոնալ կախվածությունն ըստ Ցելսիուսի t աստիճանից տրվում է $T=1{,}8t+32$ բանաձևով: Գտնել ջերմաստիճանն ըստ Ֆարենհեյթի, եթե ըստ Ցելսիուսի այն հավասար է՝

ա) 0°, բ) -15°, գ) -40°, դ) 10°:

194. Օգտվելով նախորդ խնդրում բերված բանաձևից, գրեք ըստ Ցելսիուսի t աստիճանի ֆունկցիոնալ կախվածության բանաձևը՝ ըստ Ֆարենհեյթի T աստիճանից և գտեք ջերմաստիճանն ըստ Ցելսիուսի, եթե ըստ Ֆարենհեյթի այն հավասար է՝

ա) 23°, բ) 0°, գ) -40°, դ) 84°:

➢**195.** Գտնել ֆունկցիայի որոշման տիրույթը.

ա) $y=\dfrac{1}{x^4-10x^2+9}$, բ) $y=\dfrac{3x+3}{x^2-6x+8}$,

գ) $y=\dfrac{5x^6-2}{\sqrt{5x-12}}$, դ) $y=\sqrt{2x^2+5x-18}$:

➢**196.** Գտնել ֆունկցիայի որոշման և արժեքների տիրույթները.

ա) $y=3x+5,\ x\in[-1;\,1]$, բ) $y=2-x,\ \ x\in[-2;\,1]$,

գ) $y=x^2-3,\ x\in[-1;\,2]$, դ) $y=x^2+2x,\ \ x\in[-2;\,\infty)$,

ե) $y=2+\dfrac{4}{x-3}$, զ) $y=\dfrac{2+x}{x+1}$, է) $y=\sqrt{x^2+9}$ ը) $y=\sqrt{50-2x^2}$:

197. Գտնել ֆունկցիայի որոշման տիրույթը.

ա) $f(x)=\sqrt{x^2-16}+2x$, բ) $f(x)=\sqrt{36-x^2}+3x^3$,

➢գ) $y=\sqrt{6-x}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$, ➢դ) $y=\dfrac{\sqrt{x^2-4x-12}}{\sqrt{8-x}}$:

198. Գտնել 15 մ/վրկ հաստատուն արագությամբ շարժվող կետի անցած ճանապարհի ֆունկցիոնալ կախվածությունը շարժման սկզբից անցած ժամանակից, եթե՝

ա) ճանապարհը չափվում է մետրերով, իսկ ժամանակը՝ վայրկյաններով,

բ) ճանապարհը չափվում է կիլոմետրերով, իսկ ժամանակը՝ ժամերով:

199. Գտնել խորանարդի ծավալի ֆունկցիոնալ կախվածությունը նրա

ա) կողմի երկարությունից, բ) լրիվ մակերևույթի մակերեսից:

200. Ինչպե՞ս է արտահայտվում կանոնավոր եռանկյանն արտագծած շրջանագծի շառավղի ֆունկցիոնալ կախվածությունը՝ ա) եռանկյան միջնագծի երկարությունից, բ) եռանկյան կողմի երկարությունից:

➤**201.** Գտնել շրջանագծին ներգծած քառակուսու մակերեսի ֆունկցիոնալ կախվածությունը շրջանագծի շառավղից:

➤**202.** R շառավղով շրջանագծին ներգծած ուղղանկյան կողմերից մեկի երկարությունն x է: Գտնել ուղղանկյան մակերեսի ֆունկցիոնալ կախվածությունն x-ից: Գտնել այդ ֆունկցիայի որոշման տիրույթը:

Կրկնության համար

➤**203.** Եթե եռանիշ թվին ձախից կցագրենք 7 թվանշանը և ստացված թվից հանենք 6857, կստանանք եռանիշ թվի կրկնապատիկը: Գտնել եռանիշ թիվը:

➤**204.** Եթե երկնիշ թվին ձախից և աջից կցագրենք 2 թվանշանը, կստանանք երկնիշ թվից 32 անգամ մեծ թիվ: Գտնել երկնիշ թիվը:

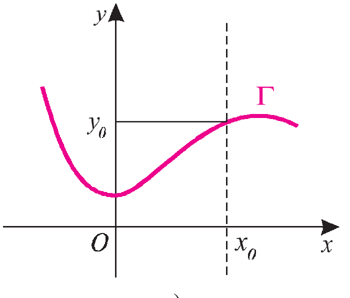
§2. Ֆունկցիայի գրաֆիկը

Թվային ֆունկցիաներն ուսումնասիրելիս հաճախ օգտվում են նրա գրաֆիկից:

f ֆունկցիայի գրաֆիկ անվանում են կոորդինատային հարթության այն $(x; y)$ կետերի բազմությունը, որոնց համար $y = f(x)$:

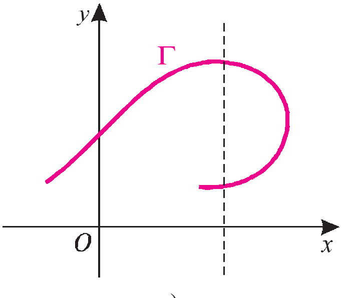
Սահմանումից հետևում է, որ ֆունկցիայի գրաֆիկը կոորդինատային հարթության ենթաբազմություն է: Սակայն կոորդինատային հարթության ամեն մի ենթաբազմություն չէ, որ ինչ-որ ֆունկցիայի գրաֆիկ է:

Եթե կոորդինատային հարթության Γ ենթաբազմությունը որևէ ֆունկցիայի գրաֆիկ է, ապա օրդինատների առանցքին զուգահեռ կամայական ուղիղ, որը հատում է



ա)

Նկ. 17



բ)

աբսցիսների առանցքը որևէ x_0 կետում, կա՛մ Γ-ի հետ չունի ընդհանուր կետ (եթե $x_0 \notin D(f)$), կա՛մ ունի մեկ ընդհանուր կետ՝ $(x_0; y_0)$, որտեղ $y_0 = f(x_0)$ (նկ. 17, ա):

Հետևաբար, եթե Γ բազմությունը օրդինատների առանցքին զուգահեռ որևէ ուղղի հետ հատվում է մեկից ավելի կետերում, այն որևէ ֆունկցիայի գրաֆիկ լինել չի կարող (նկ. 17, բ):

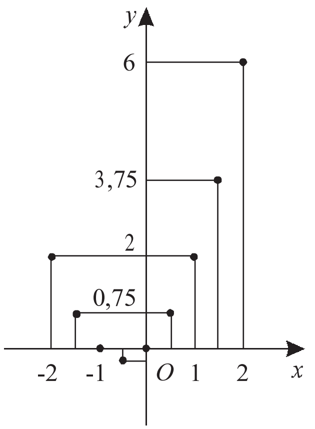
X միջակայքում տրված $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը մոտավոր պատկերելու համար կարելի է X միջակայքից ընտրել անկախ փոփոխականի մի քանի արժեք՝ $x_1,\cdots,x_n$, հաշվել այդ կետերում ֆունկցիայի $y_1,\ldots,y_n$ արժեքները, հարթության վրա նշել $M_1(x_1; y_1),\cdots,M_n(x_n; y_n)$ կետերը և, եթե հայտնի է, որ ֆունկցիայի գրաֆիկն ինչ-որ իմաստով ողորկ գիծ է, ապա ստացված $M_1,\cdots,M_n$ կետերը ողորկ կորով միացնել:

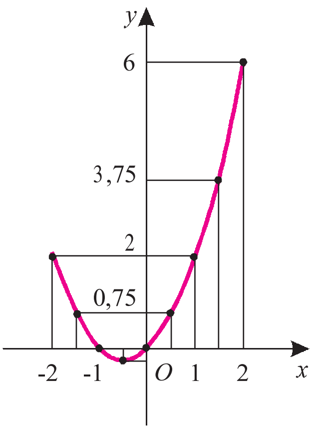
Օրինակ 1: Կառուցենք $f(x) = x^2 + x$, $x \in [-2; 2]$, ֆունկցիայի գրաֆիկը:

Հաշվելով ֆունկցիայի արժեքները $-2; -1{,}5; -1; -0{,}5; 0; 0{,}5; 1; 1{,}5; 2$ կետերում՝ ստանում ենք՝ $f(-2)=2$, $f(-1{,}5)=0{,}75$, $f(-1)=0$, $f(-0{,}5)=-0{,}25$, $f(0)=0$, $f(0{,}5)=0{,}75$, $f(1)=2$, $f(1{,}5)=3{,}75$, $f(2)=6$ և լրացնում աղյուսակը: Կոորդինատային հարթության վրա նշելով $(-2; 2)$, $(-1{,}5; 0;75)$, $(-1; 0)$, $(-0{,}5; -0;25)$, $(0; 0)$, $(0{,}5; 0;75)$, $(1; 2)$, $(1{,}5; 3{,}75)$, $(2; 6)$ կետերը, (նկ. 18ա) և ողորկ կորով հաջորդաբար միացնելով՝ կստանանք ֆունկցիայի (մոտավոր) գրաֆիկը (նկ. 18, բ):

x	y
-2	2
$-1{,}5$	$0{,}75$
-1	0
$-0{,}5$	$0{,}25$
0	0
$0{,}5$	$0{,}75$
1	2
$1{,}5$	$3{,}75$
2	6

Որոշ հարցերում նույնիսկ այս մոտավոր գրաֆիկը կարևոր տեղեկություններ է տալիս ֆունկցիայի մասին: Օրինակ՝ եթե ֆունկցիայի գրաֆիկն առաջին և երկրորդ քառորդներում է, ապա ֆունկցիան ընդունում է միայն դրական արժեքներ: Եթե ֆունկցիայի գրա-

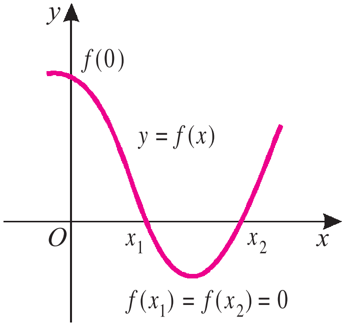




Նկ. 18

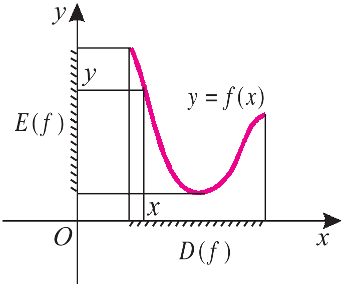
ֆիկն առաջին և չորրորդ քառորդներում է, ապա ֆունկցիան բացասական x-երի համար որոշված չէ:

Ֆունկցիայի գրաֆիկի և աբսցիսների առանցքի հատման կետերը ցույց են տալիս, թե որ կետերում է ֆունկցիան ընդունում 0 արժեքը, իսկ օրդինատների առանցքի հետ հատման (միակ) կետը որոշվում է ֆունկցիայի՝ զրո կետում ընդունած արժեքով (եթե



ա)

Նկ. 19

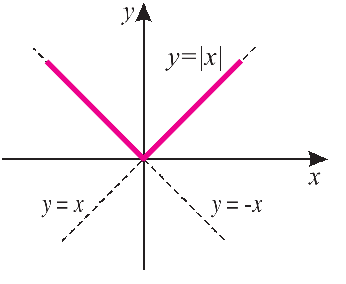


բ)

զրո կետում ֆունկցիան որոշված է, նկ. 19, ա):

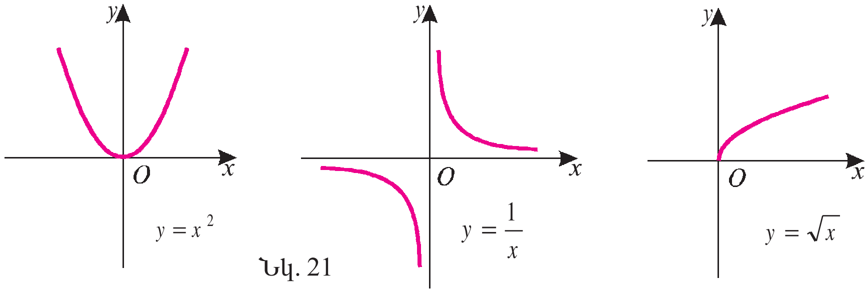
Եթե աբսցիսների առանցքի x կետով անցնող և այդ առանցքին ուղղահայաց ուղիղը հատվում է f ֆունկցիայի գրաֆիկի հետ, ուրեմն՝ $x \in D(f)$: Եթե օրդինատների առանցքի y կետով անցնող և այդ առանցքին ուղղահայացն է հատվում f ֆունկցիայի գրաֆիկի հետ, ուրեմն՝ $y \in E(f)$: Հետևաբար՝ ֆունկցիայի գրաֆիկի պրոյեկցիան x-երի առանցքի վրա կհամընկնի ֆունկցիայի որոշման տիրույթին, իսկ y-ների առանցքի վրա պրոյեկցիան կլինի ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը (նկ. 19, բ):

Օրինակ 2. Դիտարկենք $y = |x|$ ֆունկցիան: Ինչպես գիտենք, այն ոչ բացասական x-երի դեպքում համընկնում է $y = x$ ֆունկցիային, իսկ բացասական x-երի դեպքում՝ $y = -x$ ֆունկցիային: Գիտենք նաև, որ $y = x$ և $y = -x$ ֆունկցիաների գրաֆիկները, համապատասխանաբար I ու III և II ու IV քառորդների կիսորդներն են: Հետևաբար՝ $y = |x|$ ֆունկցիայի գրաֆիկը կունենա 20-րդ նկարում պատկերված տեսքը:



Նկ. 20

21-րդ նկարում պատկերված են մեզ ծանոթ ևս երեք ֆունկցիաների գրաֆիկներ. $y = x^2$ (պարաբոլ), $y = \dfrac{1}{x}$ (հիպերբոլ) և $y = \sqrt{x}$:



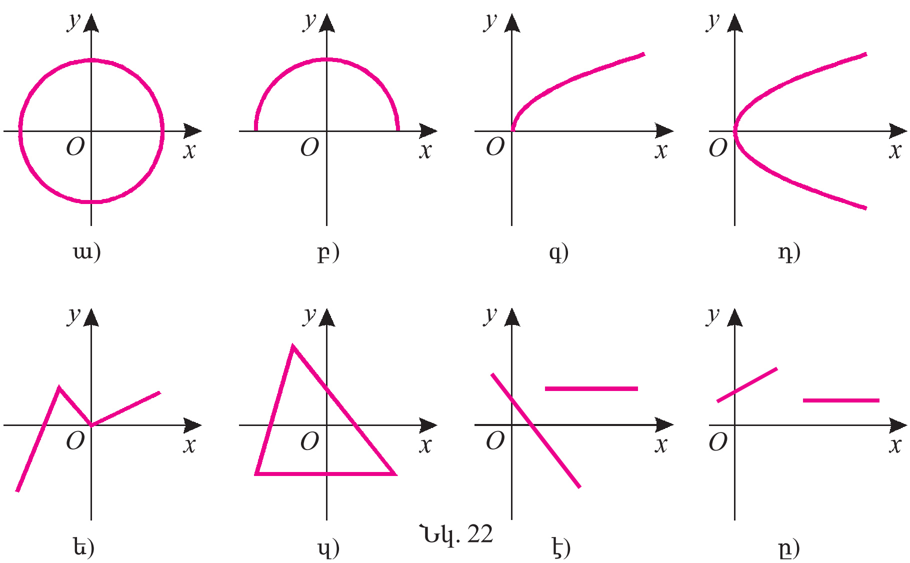
Նկ. 21

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ո՞ր կետերի բազմությունն են անվանում ֆունկցիայի գրաֆիկ:
2. Արդյո՞ք կոորդինատային հարթության վրա գտնվող ամեն մի գիծ ինչ-որ ֆունկցիայի գրաֆիկ է:
3. Կարո՞ղ է արդյոք ֆունկցիայի գրաֆիկը հատել օրդինատների առանցքը երկու կետում: Իսկ աբսցիսների առա՞նցքը:
4. Ինչպե՞ս կառուցել տրված ֆունկցիայի մոտավոր գրաֆիկը:
5. Ի՞նչ կարելի է ասել ֆունկցիայի մասին, եթե նրա գրաֆիկն առաջին և երկրորդ քառորդներում է:
6. Ի՞նչ են ցույց տալիս ֆունկցիայի գրաֆիկի և աբսցիսների առանցքի հատման կետերը:
7. Ինչո՞վ է որոշվում ֆունկցիայի գրաֆիկի և օրդինատների առանցքի հատման կետը:

Առաջադրանքներ

205. Նկ. 22-ում պատկերված գծերից որո՞նք են ֆունկցիայի գրաֆիկ:



Նկ. 22

206. Պատկերել ֆունկցիայի գրաֆիկը.

ա) x^2+1, $x \in [-3;3]$, բ) x^3-1, $x \in [-2;2]$, գ) $\dfrac{16}{x^2+4}$, $x \in [0;4]$, դ) $\sqrt{x}+1$, $x \in [0;9]$:

207. Պատկանո՞ւմ է արդյոք հարթության տրված կետը $y=\sqrt{2x-5}$ ֆունկցիայի գրաֆիկին.

ա) $(0, \sqrt{5})$, բ) $(3; 1)$, գ) $(4; 1,7)$, դ) $(5; \sqrt{5})$:

208. Գտնել f ֆունկցիայի գրաֆիկի և կոորդինատային առանցքների հատման կետերի կոորդինատները, եթե՝

ա) $y=5x-9$, բ) $y=15-3x$,

գ) $y=3x^2-2x-8$, դ) $y=x^2-121$:

209. Գտնել f և g ֆունկցիաների գրաֆիկների հատման կետի (կետերի) կոորդինատները, եթե՝

ա) $f(x)=2x-1,\ g(x)=9-3x$, բ) $f(x)=5-x,\ g(x)=7+x$,

գ) $f(x)=2-3x,\ g(x)=4-5x^2$, դ) $f(x)=x^2,\ g(x)=x+2$:

210. Պատկերել որևէ ֆունկցիայի գրաֆիկ, որի համար՝

ա) $D(f)=[-1;5]$, $E(f)=[0;4]$,

բ) $D(f)=[-2;0]\bigcup[1;5]$, $E(f)=[-3;3]$:

211. Նկ. 23-ում գրաֆիկորեն տրված f ֆունկցիայի համար գտնել.

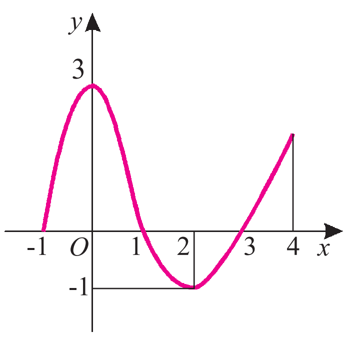
1) $D(f)$-ը, 2) $E(f)$-ը, 3) $f(0)$-ն,

4) այն կետերը, որոնցում ֆունկցիան ընդունում է 0 արժեքը, -1 արժեքը,

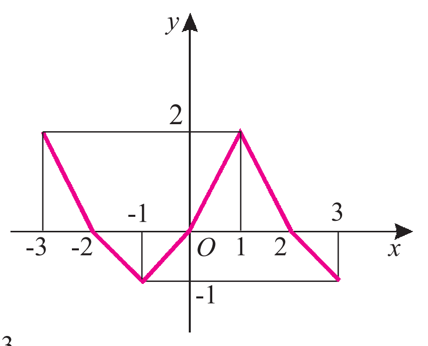
5) այն բազմությունը, որտեղ ֆունկցիան դրական է,

6) այն բազմությունը, որտեղ ֆունկցիան բացասական է,

7) $f(x)=-0,5$ հավասարմանը բավարարող x-երի քանակը:



ա)



բ)

Նկ. 23

Կրկնության համար

212. Քառանիշ թվի առաջին թվանշանը 7 է: Եթե այդ թվանշանը տեղափոխենք վերջին տեղը, թիվը կփոքրանա 864 -ով: Գտնել սկզբնական թիվը:

213. Հնգանիշ թվի առաջին թվանշանը 1 է: Եթե այդ թվանշանը տեղափոխենք վերջին տեղը, թիվը կմեծանա 2187 -ով: Գտնել սկզբնական թիվը:

§3. Գործողություններ ֆունկցիաների հետ

Դիցուք տրված են f և g ֆունկցիաները: Դիտարկենք մի նոր՝ F ֆունկցիա, որի արժեքն x կետում հավասար է այդ կետում f և g ֆունկցիաների արժեքների գումարին՝

$$F(x)=f(x)+g(x) \; :$$

Բնականաբար, F ֆունկցիան որոշված է այն x կետերում, որտեղ որոշված են և՛ f, և՛ g ֆունկցիաները՝ $D(F)=D(f)\cap D(g)$: Այս կերպ սահմանված F ֆունկցիան անվանում են f և g ***ֆունկցիաների գումար***՝ $F=f+g$:

Ակնհայտ է, որ եթե f -ը և g -ն որոշվում են ինչ-որ արտահայտություններով, ապա F ֆունկցիան կորոշվի այդ արտահայտությունների գումարով:

Օրինակ 1: Դիցուք $f(x)=x^2+1$, $x\in[-15;10]$ և $g(x)=x^3-x^2+2$, $x\in[-5;18]$: Այդ դեպքում $F(x)=x^3+3$ և $D(F)=[-15;10]\cap[-5;18]=[-5;10]$:

Համանմանորեն սահմանվում են f և g ***ֆունկցիաների տարբերությունը և արտադրյալը***: Օրինակ՝ f և g ֆունկցիաների արտադրյալն այն F ֆունկցիան է, որի արժեքն x կետում հավասար է այդ կետում f և g ֆունկցիաների արժեքների արտադրյալին՝

$$F(x)=f(x)\cdot g(x):$$

Պարզ է, որ այստեղ նույնպես $D(F)=D(f)\cap D(g)$:

Փոքր-ինչ այլ է պատկերը, երբ սահմանում ենք f և g ***ֆունկցիաների քանորդը***, այն F ֆունկցիան, որի արժեքն x կետում հավասար է այդ կետում f և g ֆունկցիաների արժեքների հարաբերությանը՝

$$F(x)=\frac{f(x)}{g(x)}:$$

Այս դեպքում F ֆունկցիան x կետում որոշված է, եթե այդ կետում որոշված են և՛ f, և՛ g ֆունկցիաները, ընդ որում, $g(x)\neq 0$:

Այժմ դիտարկենք F ֆունկցիան, որի արժեքն x կետում որոշվում է հետևյալ կերպ. նախ հաշվում ենք g ֆունկցիայի արժեքը x կետում, այնուհետև՝ f ֆունկցիայի արժեքը $g(x)$ կետում, այսինքն՝

$$F(x) = f(g(x)):$$

Այս կերպ սահմանված F ֆունկցիան անվանում են f և g ***ֆունկցիաների համադրույթ*** և գրում՝ $F = f \circ g$: Նման դեպքում ասում են նաև, որ F -ը ***բարդ ֆունկցիա*** է:

Հասկանալի է, որ f և g ֆունկցիաների համադրույթի որոշման տիրույթը բաղկացած է այն x կետերից, որոնք պատկանում են g ֆունկցիայի որոշման տիրույթին, և որոնց համար $g(x)$ -ը պատկանում է f ֆունկցիայի որոշման տիրույթին:

Օրինակ 2: Դիցուք $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ և $g(x) = x^4 + 3$:

Քանի որ կամայական x -ի համար $x^4 + 3 \neq 1$, ուրեմն՝ $D(f \circ g) = \mathbf{R}$, և

$$(f \circ g)(x) = \frac{1}{g(x)-1} = \frac{1}{x^4+3-1} = \frac{1}{x^4+2}:$$

Այժմ գտնենք $g \circ f$ -ը: Քանի որ g -ն որոշված է բոլոր x -երի համար, $g \circ f$ ֆունկցիան որոշված կլինի, եթե որոշված է f -ը: Այսինքն՝ $D(g \circ f) = D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$, և

$$(g \circ f)(x) = \left(\frac{1}{x-1}\right)^4 + 3 = \frac{1}{(x-1)^4} + 3:$$

Այսպիսով՝ եթե նույնիսկ որոշված են $f \circ g$ և $g \circ f$ ֆունկցիաները, ապա, ընդհանրապես ասած, $f \circ g \neq g \circ f$:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ինչպե՞ս է սահմանվում երկու ֆունկցիաների՝ ա) գումարը, բ) արտադրյալը:
2. Ո՞րն է երկու ֆունկցիաների քանորդի որոշման տիրույթը:
3. Սահմանեք երկու ֆունկցիաների համադրույթը:
4. Ո՞րն է երկու ֆունկցիաների համադրույթի որոշման տիրույթը:
5. Մի՞շտ է ճիշտ արդյոք $f \circ g = g \circ f$ հավասարությունը:

Առաջադրանքներ

214. Դիցուք $f(x) = \sqrt{x-1}$ և $g(x) = \sqrt{3-x}$: Գտեք F ֆունկցիայի որոշման տիրույթը և այն արտահայտությունը, որով տրվում է ֆունկցիան, եթե՝

ա) $F = f + g$, բ) $F = f - g$, գ) $F = f \cdot g$, դ) $F = f/g$:

215. Դիցուք $f(x)=1+x^2$ և $g(x)=\dfrac{1}{1-x}$: Գտեք F ֆունկցիայի որոշման տիրույթը և այն արտահայտությունը, որով տրվում է այդ ֆունկցիան, եթե՝

ա) $F=f-g$, բ) $F=f\cdot g$, գ) $F=\dfrac{f}{g}$, դ) $F=\dfrac{g}{f}$,

ե) $F=f\circ g$, զ) $F=g\circ f$, է) $F=g\circ g$, ը) $F=f\circ f$:

➤**216.** Դիցուք f ֆունկցիան որոշված է $[-1;0]$ հատվածում: Գտնել F ֆունկցիայի որոշման տիրույթը, եթե՝

ա) $F(x)=f(x-1)$, բ) $F(x)=f(2x)$, գ) $F(x)=f(-x^2)$:

➤**217.** Դիցուք $f(x)=x^2$ և $g(x)=\sqrt{x}$: Գտեք F ֆունկցիայի որոշման տիրույթը և այն արտահայտությունը, որով տրվում է այդ ֆունկցիան, եթե՝

ա) $F=f\circ g$, բ) $F=g\circ f$, գ) $F=g\circ g$, դ) $F=f\circ f$:

Կրկնության համար

218. Քառակուսային եռանդամից անջատել լրիվ քառակուսի.

ա) $x^2-8x+21$, բ) $4x-2x^2-2$, գ) $3x^2-6x-10$:

219. Ապացուցել անհավասարությունը.

ա) $\dfrac{1}{x^2+x+1}\le\dfrac{4}{3}$, բ) $\dfrac{x^2+1}{2x^2+x+1}<2$, գ) $\dfrac{x^2+2x+2}{x^2+2x+3}\ge\dfrac{1}{2}$:

§4. Ֆունկցիայի գրաֆիկի ձևափոխություններ

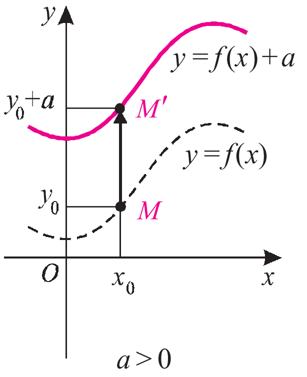
Այս պարագրաֆում կսովորենք $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի միջոցով կառուցել

$$y=f(x)+a,\quad y=f(x+a),\quad y=f(ax),\quad y=af(x),\quad y=|f(x)|$$

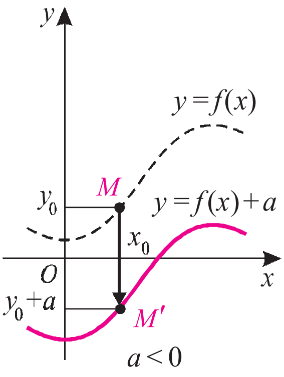
ֆունկցիաների գրաֆիկները, որտեղ a-ն զրոյից տարբեր հաստատուն է:

1. $y=f(x)+a$ *(զուգահեռ տեղաշարժ օրդինատների առանցքի ուղղությամբ):*

Եթե $y=f(x)$ ֆունկցիայի արժեքն x_0 կետում y_0 է, ապա $y=f(x)+a$ ֆունկցիայի արժեքն x_0 կետում կլինի y_0+a: Նշանակում է՝ եթե $M(x_0;\,y_0)$ կետը պատկանում է $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկին, ապա $M'(x_0;\,y_0+a)$ կետը կպատկանի $y=f(x)+a$ ֆունկցիայի գրաֆիկին (նկ. 24): Հետևաբար՝



ա)



բ)

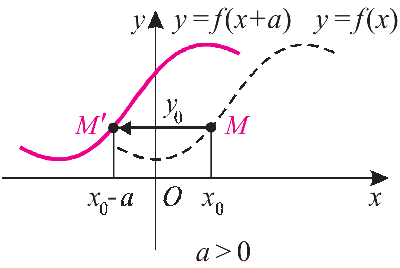
Նկ. 24

■ $y=f(x)+a$ ***ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցելու համար անհրաժեշտ է $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկն օրդինատների առանցքի ուղղությամբ a-ով տեղաշարժել:***

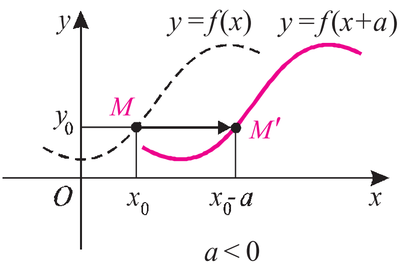
Ընդ որում, եթե a-ն դրական է, ապա $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկն a-ով բարձրանում է վեր (նկ. 24, ա), իսկ եթե a-ն բացասական է, ապա $|a|$-ով իջնում է վար (նկ. 24, բ):

2. ***$y=f(x+a)$ (տեղաշարժ աբսցիսների առանցքի ուղղությամբ):***

Եթե $y=f(x)$ ֆունկցիայի արժեքն x_0 կետում y_0 է, ապա $y=f(x+a)$ ֆունկցիան այդ նույն՝ y_0 արժեքն ընդունում է x_0-a կետում՝ $f((x_0-a)+a)=f(x_0)=y_0$: Նշանակում է՝ եթե $M(x_0;\ y_0)$ կետը պատկանում է $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկին, ապա $M'(x_0-a;\ y_0)$ կետը կպատկանի $y=f(x+a)$ ֆունկցիայի գրաֆիկին (նկ. 25): Հետևաբար՝



ա)



բ)

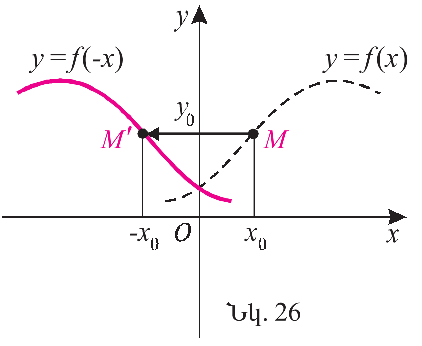
Նկ. 25

■ $y=f(x+a)$ ***ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցելու համար անհրաժեշտ է $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկն աբսցիսների առանցքի ուղղությամբ տեղաշարժել $-a$-ով:***

Ընդ որում, եթե a-ն դրական է, ապա $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկն a-ով տեղաշարժվում է ձախ (նկ. 25, ա), իսկ եթե a-ն բացասական է, ապա $|a|$-ով տեղաշարժվում է աջ (նկ. 25, բ):

3. $y = f(-x)$ (համաչափություն օրդինատների առանցքի նկատմամբ):

Եթե $y = f(x)$ ֆունկցիայի արժեքն x_0 կետում y_0 է, ապա $y = f(-x)$ ֆունկցիան այդ նույն՝ y_0 արժեքը կընդունի $-x_0$ կետում՝ $f(-(-x_0)) = f(x_0) = y_0$: Նշանակում է՝ եթե $M(x_0; y_0)$ կետը պատկանում է $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկին, ապա $M'(-x_0; y_0)$ կետը կպատկանի $y = f(-x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկին (նկ. 26): Քանի որ այդ կետերը համաչափ են օրդինատների առանցքի նկատմամբ, հետևաբար՝

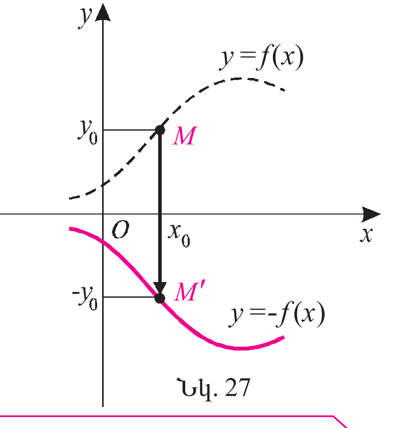


Նկ. 26

$y = f(-x)$ և $y = f(x)$ ֆունկցիաների գրաֆիկները համաչափ են օրդինատների առանցքի նկատմամբ:

4. $y = -f(x)$ (համաչափություն աբսցիսների առանցքի նկատմամբ):

Եթե $y = f(x)$ ֆունկցիայի արժեքն x_0 կետում y_0 է, ապա $y = -f(x)$ ֆունկցիայի արժեքն x_0 կետում կլինի $-y_0$: Նշանակում է՝ եթե $M(x_0; y_0)$ կետը պատկանում է $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկին, ապա $M'(x_0; -y_0)$ կետը կպատկանի $y = -f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկին (նկ. 27): Քանի որ այդ կետերը համաչափ են աբսցիսների առանցքի նկատմամբ, հետևաբար՝



Նկ. 27

$y = -f(x)$ և $y = f(x)$ ֆունկցիաների գրաֆիկները համաչափ են աբսցիսների առանցքի նկատմամբ:

Օրինակ 1: Կառուցենք $y = -x^2 - 6x - 7$ պարաբոլը: Քանի որ

$$-x^2 - 6x - 7 = -(x+3)^2 + 2,$$

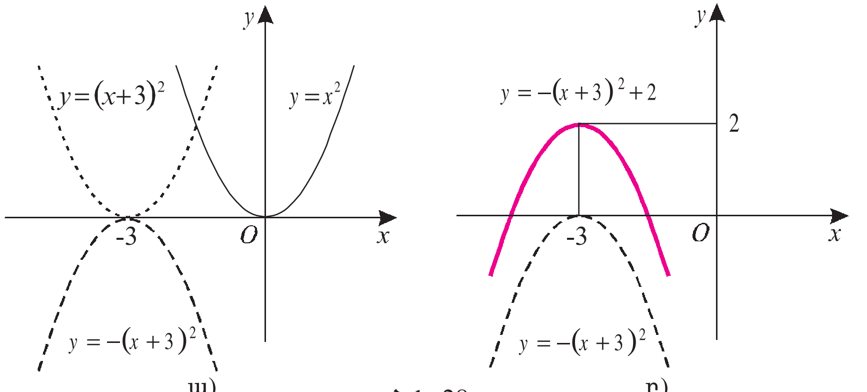
ուստի որոնելի պարաբոլը կստացվի, եթե՝

ա) $y = x^2$ պարաբոլը տեղաշարժենք 3 միավորով ձախ (կստացվի $y = (x+3)^2$ պարաբոլը, նկ. 28, ա),

բ) ստացված պատկերը համաչափ արտապատկերենք աբսցիսների առանցքի նկատմամբ (կստացվի $y=-(x+3)^2$ պարաբոլը, նկ. 28, ա),

գ) ստացված պարաբոլը բարձրացնենք 2 միավորով (նկ. 28, բ):

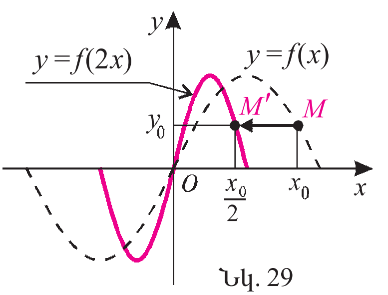
5. $y=f(ax)$ (սեղմում և ձգում աբսցիսների առանցքի երկայնքով):



Նկ. 28

Եթե $y=f(x)$ ֆունկցիայի արժեքն x_0 կետում y_0 է, ապա $y=f(ax)$ ֆունկցիայի արժեքն x_0/a կետում նույնպես կլինի y_0: Նշանակում է՝ եթե $(x_0;\, y_0)$ կետը պատկանում է $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկին, ապա $(x_0/a;\, y_0)$ կետը կպատկանի $y=f(ax)$ ֆունկցիայի գրաֆիկին:

Օրինակ 2: 29-րդ նկարում կետագծերով պատկերված է $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը: Տեսնենք, թե ինչպես պետք է այն ձևափոխել $y=f(2x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը ստանալու համար: Եթե $y=f(x)$ ֆունկցիայի արժեքն x_0 կետում y_0 է, ապա $y=f(2x)$ ֆունկցիայի արժեքն $x_0/2$ կետում նույնպես կլինի y_0, քանի որ



Նկ. 29

$$f\left(2\cdot\frac{x_0}{2}\right)=f(x_0)=y_0:$$

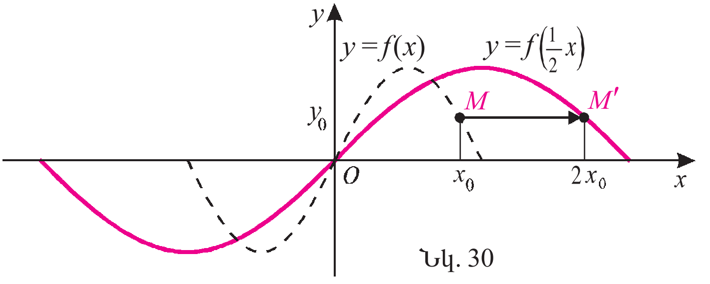
Նշանակում է՝ եթե $M(x_0;\, y_0)$-ն պատկանում է $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկին, ապա $M'(x_0/2;\, y_0)$ կետը կպատկանի $y=f(2x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկին: Հետևաբար՝

$y=f(2x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցելու համար անհրաժեշտ է $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը 2 անգամ «սեղմել» աբսցիսների առանցքի երկայնքով՝ դեպի օրդինատների առանցքը (նկ. 29):

Նման դատողություններով կարող ենք համոզվել, որ

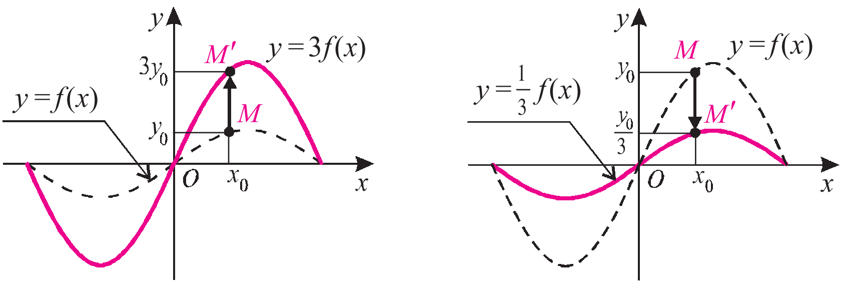
$y=f\left(\frac{1}{2}x\right)$ ֆունկցիայի գրաֆիկն ստանալու համար անհրաժեշտ է $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը 2 անգամ «ձգել» աբսցիսների առանցքի երկայնքով՝ հեռացնելով օրդինատների առանցքից (նկ. 30):

6. $y = af(x)$ *(սեղմում և ձգում օրդինատների առանցքի երկայնքով)*:



Նկ. 30

Օրինակ 3: Նկ. 31, ա-ում կետագծերով պատկերված է $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը: Տեսնենք, թե ինչպես պետք է այն ձևափոխել $y=3f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը ստանալու համար:



ա) Նկ. 31 բ)

Եթե $y = f(x)$ ֆունկցիայի արժեքն x_0 կետում y_0 է, ապա $y=3f(x)$ ֆունկցիայի արժեքն x_0 կետում կլինի $3y_0$: Նշանակում է՝ եթե $M(x_0;\,y_0)$ կետը պատկանում է $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկին, ապա $M'(x_0;3y_0)$ կետը կպատկանի $y=3f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկին: Հետևաբար՝

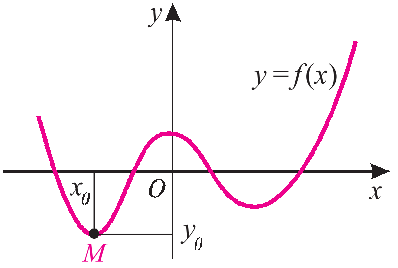
$y=3f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցելու համար անհրաժեշտ է $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը 3 անգամ «ձգել» օրդինատների առանցքի երկայնքով՝ հեռացնելով աբսցիսների առանցքից (նկ. 31ա):

Նման դատողություններով կարող ենք համոզվել, որ

$y=\frac{1}{3}f(x)$ ***ֆունկցիայի գրաֆիկն ստանալու համար անհրաժեշտ է $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը 3 անգամ «սեղմել» օրդինատների առանցքի երկայնքով դեպի աբսցիսների առանցքը*** (նկ. 31բ):

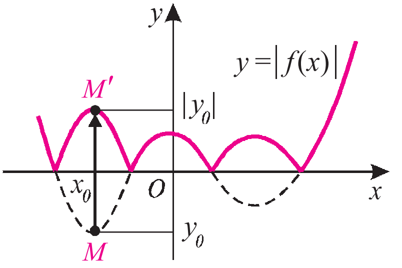
7. $y=|f(x)|$:

Եթե $y=f(x)$ ֆունկցիայի արժեքն x_0 կետում y_0 է, ապա $y=|f(x)|$ ֆունկցիայի արժեքն x_0 կետում կլինի $|y_0|$: Նշանակում է՝ եթե $M(x_0;\, y_0)$ կետը պատկանում է $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկին (նկ. 32, ա), ապա $M'(x_0;|y_0|)$ կետը կպատկանի $y=|f(x)|$ ֆունկցիայի գրաֆիկին (նկ. 32, բ): Եթե $y_0\ge 0$, ապա M և M' կետերը համընկնում են, իսկ $y_0<0$ դեպքում համաչափ են աբսցիսների առանցքի նկատմամբ:



ա)

Նկ. 32



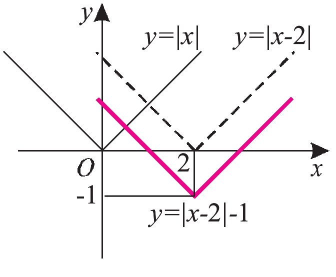
բ)

Հետևաբար՝

$y=|f(x)|$ ***ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցելու համար պետք է վերցնել $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի այն մասը, որն աբսցիսների առանցքի վրա է կամ նրանից վեր, իսկ աբսցիսների առանցքից ցած մասը համաչափ արտապատկերել աբսցիսների առանցքի նկատմամբ:***

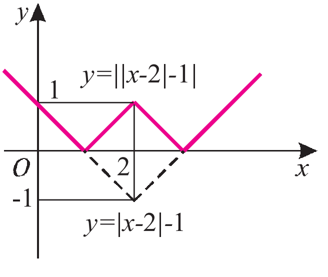
Օրինակ 4: Կառուցենք $f(x)=||x-2|-1|$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

$y=|x|$ ֆունկցիայի գրաֆիկը 2 միավորով տեղաշարժելով աջ՝ կստանանք՝



ա)

Նկ. 33



բ)

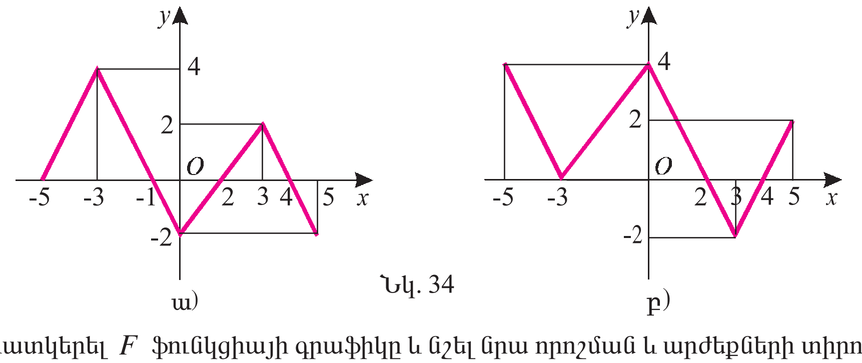
$y=|x-2|$ ֆունկցիայի գրաֆիկը (նկ. 33, ա): Այն 1 միավորով իջեցնելով ցած՝ կստանանք $y=|x-2|-1$ ֆունկցիայի գրաֆիկը: Մնում է ստացվածի այն մասը, որն աբսցիսների առանցքից ցած է, համաչափ արտապատկերել այդ առանցքի նկատմամբ (նկ. 33, բ):

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ելնելով $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկից, ինչպե՞ս կառուցել՝ ա) $y=f(x)+a$, բ) $y=f(x+a)$ ֆունկցիաների գրաֆիկները:
2. Ո՞ր առանցքի նկատմամբ են համաչափ՝ ա) $y=f(x)$ և $y=f(-x)$, բ) $y=f(x)$ և $y=-f(x)$ ֆունկցիաների գրաֆիկները:
3. Ո՞ր կետերն են պատկանում $y=f(2x)$ և $y=2f(x)$ ֆունկցիաների գրաֆիկներին, եթե $(x_0;\ y_0)$ կետը պատկանում է $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկին:
4. Ինչպե՞ս կառուցել $y=|f(x)|$ ֆունկցիայի գրաֆիկը, եթե տրված է $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

Առաջադրանքներ

Նկ. 34-ում պատկերված է $[-5;\ 5]$ հատվածում որոշված f ֆունկցիայի գրաֆիկը:



Նկ. 34

Պատկերել F ֆունկցիայի գրաֆիկը և նշել նրա որոշման և արժեքների տիրույթները, եթե (220-222).

220. ա) $F(x)=f(x)+2$, բ) $F(x)=f(x)-3$,

գ) $F(x)=f(x-4)$, դ) $F(x)=f(x+2)$,

ե) $F(x)=f(-x)$, զ) $F(x)=-f(x)$:

221. ա) $F(x)=2f(x)$, բ) $F(x)=f(2x)$, գ) $F(x)=0{,}5f(x)$, դ) $F(x)=f(0{,}5x)$:

222. ա) $F(x)=|f(x)|$, բ) $F(x)=|2-f(x)|$, գ) $F(x)=|f(-x)|+2$, դ) $F(x)=|f(-x)+1|$:

223. Ձևափոխելով $y=|x|$ ֆունկցիայի գրաֆիկը՝ կառուցել տրված ֆունկցիայի գրաֆիկը.

ա) $y=|x+2|$, բ) $y=-|x|$, գ) $y=|-x|$,

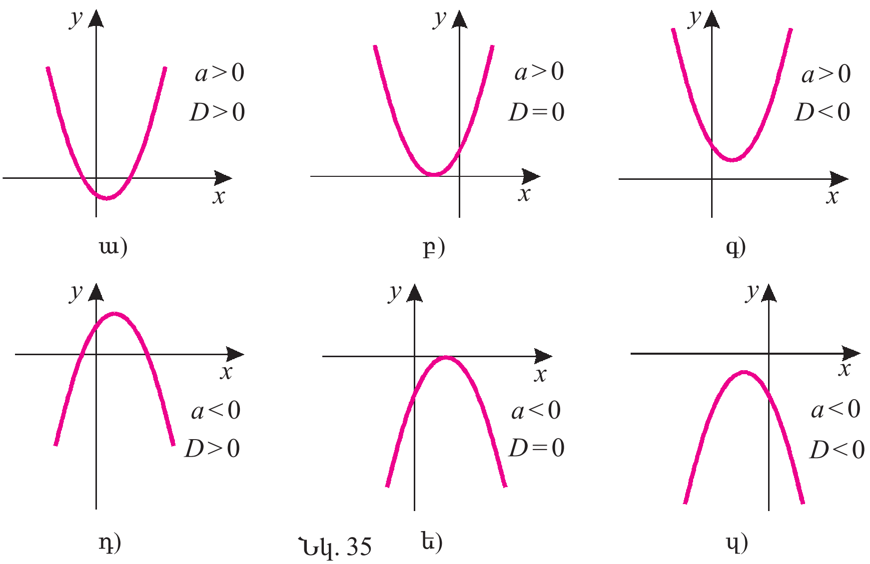
դ) $y=|x-4|+1$, ե) $y=|1-|1-x||$, զ) $y=1-|x|$:

224. Ձևափոխելով $y=x^2$ պարաբոլը՝ կառուցել տրված քառակուսային եռանդամի գրաֆիկը (տե՛ս օրինակ 1).

ա) x^2-2x-1, բ) $2x^2-8x+7$, գ) $-x^2+6x-4$:

225. Օգտվելով հետևյալ նույնությունից՝

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a},$$



Նկ. 35

ա) պարզել, թե ինչպես ձևափոխել $y=x^2$ պարաբոլը $y=ax^2+bx+c$ եռանդամի գրաֆիկն ստանալու համար,

բ) ապացուցել, որ եռանդամի $D=b^2-4ac$ տարբերիչի և a գործակցի՝ 35-րդ նկարում նշված պայմանների դեպքում եռանդամի գրաֆիկն ունի պատկերված տեսքը,

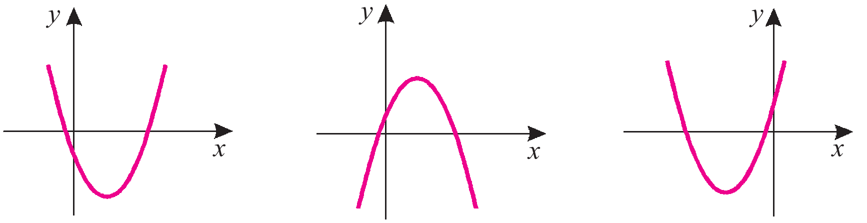
գ) գտնել եռանդամի գրաֆիկի գագաթի կոորդինատները:

226. Ապացուցել, որ x-ի կամայական արժեքի համար՝

ա) $3x^2-8x+7>0$, բ) $-5x^2+9x-5<0$,

գ) $-x^2+6x-9\le 0$, դ) $4x^2-12x+9\ge 0$:

* **227.** Որոշել a, b, c գործակիցների նշանները, եթե հայտնի է, որ $y=ax^2+bx+c$ պարաբոլն ունի 36-րդ նկարում բերված տեսքը:



ա) բ) Նկ. 36 գ)

228. Կառուցել ֆունկցիայի գրաֆիկը.

ա) $y=\left|x^2-4x+3\right|$, բ) $y=3\left|x^2-2\right|+2$, գ) $y=\left|x^2+2x\right|+1$:

229. Բանաձևով տալ ֆունկցիան, որի գրաֆիկն ստացվում է.

ա) $y=x^2$ պարաբոլը 3 միավոր ձախ և 2 միավոր ներքև տեղաշարժելով,

բ) $y=x^2$ պարաբոլը 5 միավոր աջ և 4 միավոր վերև տեղաշարժելով:

Կրկնության համար

* **230.** Գտնել արտահայտության արժեքը նշված միջակայքում՝

ա) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$, $x\in[1;2]$,

բ) $\sqrt{x+5+4\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}}$, $x\in[-1;3]$:

§5. Կոտորակագծային ֆունկցիա

Կոտորակագծային է կոչվում

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}$$

ֆունկցիան, որտեղ a-ն, b-ն, c-ն և d-ն իրական թվեր են:

Կհամարենք, որ $c\neq 0$ և $ad\neq bc$, քանի որ $c=0$ դեպքում ունենում ենք գծային ֆունկցիա, իսկ $ad=bc$ դեպքում ֆունկցիան հաստատուն է իր որոշման տիրույթում՝ $x\neq -d/c$:

Պարզագույն կոտորակագծային ֆունկցիան մեզ ծանոթ $y=1/x$ ֆունկցիան է, որի գրաֆիկը, ինչպես գիտենք, հիպերբոլ է (նկ. 37): Նշենք այս ֆունկցիայի հատկությունները:

ա) Ֆունկցիայի որոշման տիրույթն է՝

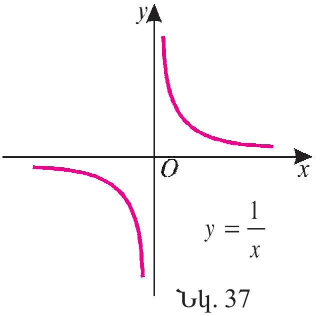
$$D(y) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) :$$

բ) Ֆունկցիայի արժեքների բազմությունն է՝

$$E(y) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) :$$

գ) Ֆունկցիան դրական է, երբ $x > 0$ և բացասական է, երբ $x < 0$:

դ) Ֆունկցիան նվազող է $(-\infty, 0)$ և $(0, +\infty)$ միջակայքերում:



Նկ. 37

ե) Երբ x-ն անվերջ մեծանում է կամ անվերջ փոքրանում (դեպի $-\infty$), ֆունկցիայի արժեքները ձգտում են զրոյի:

Այժմ դիտարկենք ընդհանուր դեպքը՝

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} :$$

Կատարելով բազմանդամների բաժանում՝ այս ֆունկցիան կարող ենք ներկայացնել

$$y = \alpha + \frac{\beta}{x+\gamma}$$

տեսքով, որտեղ α-ն, β-ն և γ-ն իրական թվեր են, ընդ որում, $\beta \neq 0$: Իսկ այս ֆունկցիայի գրաֆիկը կարող ենք ստանալ՝ ձևափոխելով $y = 1/x$ հիպերբոլը՝ տեղաշարժելով այն γ-ով աբսցիսների առանցքի երկայնքով, սեղմելով (կամ ձգելով) β անգամ օրդինատների առանցքի երկայնքով, և ստացվածը տեղաշարժելով α-ով օրդինատների առանցքի երկայնքով:

Հետևաբար՝ կարող ենք ասել, որ, եթե $c \neq 0$ և $ad \neq bc$, ապա

կոտորակագծային ֆունկցիայի գրաֆիկը հիպերբոլ է:

Օրինակ 1: Կառուցենք $y = \frac{2x-3}{x-1}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

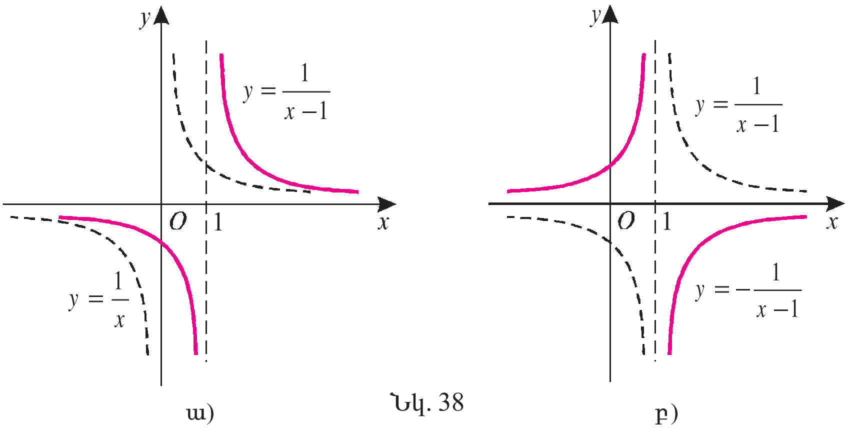
Ձևափոխելով $\frac{2x-3}{x-1}$ արտահայտությունը՝ ստանում ենք՝ $y = 2 - \frac{1}{x-1}$:

Հետևաբար՝ տրված ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցելու համար անհրաժեշտ է՝

1) $y = \frac{1}{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը 1 միավորով տեղաշարժել աջ (կստացվի $y = \frac{1}{x-1}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը, նկ. 38, ա),

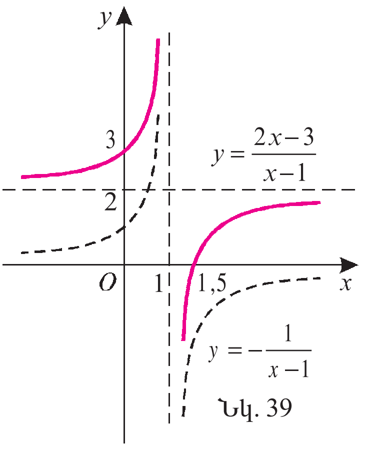
2) ստացված պատկերը համաչափ արտապատկերել աբսցիսների առանցքի

ձկատմամբ (կստացվի $y=-\dfrac{1}{x-1}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը, նկ. 38, բ),



Նկ. 38

3) ստացված պատկերը 2 միավորով տեղաշարժել վեր (նկ. 39):



Նկ. 39

Այժմ դժվար չէ նշել $y=\dfrac{2x-3}{x-1}$ ֆունկցիայի որոշ հատկություններ:

ա) Ֆունկցիայի որոշման տիրույթն է՝

$$D(y)=(-\infty,1)\cup(1,+\infty):$$

բ) Ֆունկցիայի արժեքների բազմությունն է՝

$$E(y)=(-\infty,2)\cup(2,+\infty):$$

գ) Ֆունկցիայի գրաֆիկը հատում է կոորդինատային առանցքները $(0;3)$ և $(1,5;\ 0)$ կետերում:

դ) Ֆունկցիան դրական է, երբ $x\in(-\infty,1)\cup(1,5,+\infty)$ և բացասական է, երբ $x\in(1,1,5)$:

ե) Ֆունկցիան աճող է $(-\infty,1)$ և $(1,+\infty)$ միջակայքերում:

զ) Երբ x-ն անվերջ մեծանում է կամ անվերջ փոքրանում (դեպի $-\infty$), ֆունկցիայի արժեքները ձգտում են 2-ի: Ֆունկցիայի արժեքներն անվերջ մեծանում են, երբ x-ը մոտենում է 1-ին ձախից, և անվերջ փոքրանում են (դեպի $-\infty$), երբ x-ը մոտենում է 1-ին աջից:

Հակիրճ եք դասը

1. Ո՞ր ֆունկցիան են անվանում կոտորակագծային:
2. Ո՞րն է պարզագույն կոտորակագծային ֆունկցիան, և ի՞նչ տեսք ունի նրա գրաֆիկը:

3. Նշել $y=1/x$ ֆունկցիայի հատկությունները:
4. Ի՞նչ է կոտորակագծային ֆունկցիայի գրաֆիկը:

Առաջադրանքներ

231. Կոտորակագծային ֆունկցիան ներկայացնել $y=\alpha+\dfrac{\beta}{x+\gamma}$ տեսքով.

ա) $y=\dfrac{2x-3}{x+1}$, բ) $y=\dfrac{x}{5x-20}$, գ) $y=\dfrac{3x-4}{2x-6}$:

232. Ձևափոխելով $y=1/x$ հիպերբոլը՝ կառուցել կոտորակագծային ֆունկցիայի գրաֆիկը և նշել հատկությունները.

ա) $y=\dfrac{1}{x-3}$, բ) $y=\dfrac{1}{x}+2$, գ) $y=-\dfrac{1}{x+1}$,

դ) $y=\dfrac{3x+6}{x+5}$, ե) $y=\dfrac{-2x+4}{3x-12}$, զ) $y=\dfrac{-5x-1}{x+8}$:

* **233.** Ձևափոխելով $y=1/x$ հիպերբոլը, կառուցել տրված ֆունկցիայի գրաֆիկը.

ա) $y=\left|\dfrac{x+3}{x-1}\right|$, բ) $y=\left|\dfrac{x+2}{x+1}\right|$, գ) $y=\left|\dfrac{x-3}{x-2}\right|-2$:

Կրկնության համար

234. Խանութում կար 1,75 տ խնձոր և 1,1 տ տանձ: Օրական վաճառվում էր 125 կգ խնձոր՝ կիլոգրամը 250 դրամով և 110 կգ տանձ՝ կիլոգրամը 300 դրամով:

ա) Վաճառքի առաջին օրը որքա՞ն էր խանութի հասույթը :

բ) Ընդամենը որքա՞ն հասույթ կլինի խնձորի վաճառքից:

գ) Քանի՞ օրում կսպառվեն և՛ խնձորը, և՛ տանձը:

դ) Քանի՞ օրում խնձորի վաճառքից ստացված հասույթը կգերազանցի տանձի վաճառքից ստացված հասույթը:

235. Ունենք 80 գ 25 %-անոց աղի լուծույթ:

ա) Գտնել աղի զանգվածն այդ լուծույթում:

բ) Քանի՞ տոկոս աղ է կա այդ լուծույթի 40 գրամում:

գ) Որքա՞ն մաքուր աղ պետք է ավելացնել լուծույթին, որպեսզի ջրի և աղի քանակները հավասարվեն:

դ) Որքա՞ն ջուր պետք է գոլորշիացնել լուծույթից, որպեսզի աղի պարունակությունը դառնա 80 %:

§6. Սահմանափակություն, մեծագույն և փոքրագույն արժեքներ

f ֆունկցիան անվանում են վերևից սահմանափակ, եթե գոյություն ունի այնպիսի M թիվ, որ $f(x)\le M$, երբ $x\in D(f)$ ։
f ֆունկցիան անվանում են ներքևից սահմանափակ, եթե գոյություն ունի այնպիսի m թիվ, որ $f(x)\ge m$, երբ $x\in D(f)$ ։

Օրինակ՝ $f(x)=|x|+2$ ֆունկցիան սահմանափակ է ներքևից 2-ով, $f(x)=1-|x|$ ֆունկցիան սահմանափակ է վերևից 1-ով, իսկ $f(x)=\sin x$ ֆունկցիան սահմանափակ է վերևից 1-ով, ներքևից՝ (-1)-ով։

f ֆունկցիան անվանում են սահմանափակ, եթե այն սահմանափակ է և՛ վերևից, և՛ ներքևից։

Պարզ է, որ f ֆունկցիան սահմանափակ է, եթե գոյություն ունի այնպիսի M թիվ, որ $|f(x)|\le M$, երբ $x\in D(f)$։

Եթե ֆունկցիայի արժեքների բազմությունում կա մեծագույն (փոքրագույն) թիվ, ապա այդ թիվն անվանում են ֆունկցիայի մեծագույն (փոքրագույն) արժեք։

Պարզ է, որ եթե ֆունկցիան ունի մեծագույն արժեք, ապա այն սահմանափակ է վերևից, իսկ փոքրագույն արժեք ունեցող ֆունկցիան սահմանափակ է ներքևից։

Օրինակ 1: $f(x)=\sin x$ ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը $[-1;1]$ հատվածն է։ Այդ հատվածի մեծագույն թիվը 1-ն է, իսկ փոքրագույնը՝ -1-ը։ Հետևաբար՝ ֆունկցիայի մեծագույն արժեքը 1 է, իսկ փոքրագույնը՝ -1։

Նշենք, որ ֆունկցիայի մեծագույն կամ փոքրագույն արժեքները գտնելու համար պարտադիր չէ գտնել նրա արժեքների բազմությունը։

Համոզվելու համար, որ f ֆունկցիայի մեծագույն արժեքը M թիվն է, բավական է ապացուցել, որ՝

ա) եթե $x\in D(f)$, ապա $f(x)\le M$, (f-ի արժեքները չեն գերազանցում M-ը),

բ) գոյություն ունի այնպիսի $x_0\in D(f)$, որ $f(x_0)=M$ (M թիվն ինքը f-ի արժեք է)։

Համանմանորեն, f ֆունկցիայի փոքրագույն արժեքը կլինի m-ը, եթե՝

ա) եթե $x\in D(f)$, ապա $f(x)\ge m$,

բ) գոյություն ունի այնպիսի $x_0\in D(f)$, որ $f(x_0)=m$ ։

Ինչպես կտեսնենք օրինակներում, ֆունկցիան կարող է մեծագույն կամ փոքրագույն արժեք չունենալ, նույնիսկ եթե այն սահմանափակ է:

Օրինակ 2: Դիցուք $f(x)=x^2$, $x\in \mathbf{R}$:

Քանի որ $f(x)=x^2\geq 0$ և $f(0)=0$, ուրեմն՝ ֆունկցիան ներքևից սահմանափակ է, և նրա փոքրագույն արժեքը զրոն է: Ֆունկցիան վերևից սահմանափակ չէ, հետևաբար՝ մեծագույն արժեք չունի:

Օրինակ 3: Դիցուք $f(x)=x^2$, $x\in [1;3]$:

Պարզ է, որ $1=f(1)\leq f(x)\leq f(3)=9$: Հետևաբար՝ ֆունկցիան սահմանափակ է, ընդ որում, այն ունի փոքրագույն և մեծագույն արժեքներ, որոնք, համապատասխանաբար, հավասար են 1-ի (երբ $x=1$) և 9-ի (երբ $x=3$):

Օրինակ 4: Դիցուք $f(x)=x^2$, $x\in (0;3)$:

Պարզ է, որ $E(f)=(0;9)$, և ֆունկցիան սահմանափակ է: Սակայն այն չունի մեծագույն և փոքրագույն արժեքներ, քանի որ $(0;9)$ միջակայքում չկան մեծագույն և փոքրագույն թվեր:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ո՞ր ֆունկցիան են անվանում վերևից (ներքևից) սահմանափակ:
2. Ո՞ր ֆունկցիան են անվանում սահմանափակ:
3. Ի՞նչ է ֆունկցիայի մեծագույն (փոքրագույն) արժեքը:
4. Որո՞նք են $\sin x$ և $\cos x$ ֆունկցիաների մեծագույն և փոքրագույն արժեքները:
6. Սահմանափակ ֆունկցիան ունի՞ արդյոք մեծագույն և փոքրագույն արժեքներ:

Առաջադրանքներ

Հետևյալ ֆունկցիաներից որո՞նք են վերևից սահմանափակ, որո՞նք են ներքևից սահմանափակ և որո՞նք՝ սահմանափակ (236-237).

236. ա) $y=x^2+7x+8$, բ) $y=6x-x^2-5$,

գ) $y=x^2+4x-1$, $x\in[-6;10]$, դ) $y=(x+1)^3-5$, $x\in[3;9]$:

237. ա) $y=\dfrac{1}{x-1}$, բ) $y=\dfrac{1}{x+1}$, $x\in(-1;\infty)$,

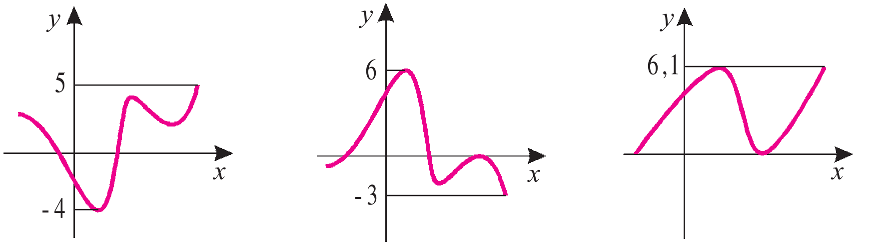
գ) $y=\dfrac{1}{2x^2-4x+4}$, դ) $y=\dfrac{3}{6x-7-4x^2}$:

238. Գտնել ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները և նշել կետերը, որտեղ ֆունկցիան ընդունում է այդ արժեքները.

ա) $y=2x^2+6x-4$, բ) $y=2x-x^2-1$, գ) $y=15\cos 3x$,

դ) $y=2\sin x-7$, ե) $y=\sqrt{9-|x|}$, զ) $y=\sqrt{7x-10-x^2}$:

239. Գտնել գրաֆիկորեն տրված ֆունկցիաների մեծագույն և փոքրագույն արժեքները (նկ. 40):



ա) Նկ. 40 բ) գ)

240. Ֆիզիկայի դասընթացից հայտնի է, որ թնդանոթից V_0 մ/վրկ արագությամբ և հորիզոնի նկատմամբ α անկյամբ արձակված արկը գետին է ընկնում կրակելու վայրից $\frac{V_0^2}{g}\cdot\sin 2\alpha$ մետր հեռավորությամբ: Հորիզոնի նկատմամբ ի՞նչ անկյունով կրակելու դեպքում այդ հեռավորությունը կլինի առավելագույնը:

➢**241.** Ինչպիսի՞ն պետք է լինեն 20 սմ պարագիծ ունեցող ուղղանկյան չափերը, որպեսզի նրա մակերեսը լինի մեծագույնը:

➢**242.** Եռանկյան երկու կողմերի գումարը 10 սմ է, իսկ նրանցով կազմված անկյունը՝ 45°: Ինչպիսի՞ն պետք է լինեն այդ կողմերը, որպեսզի եռանկյան մակերեսը լինի մեծագույնը:

Կրկնության համար

243. Եթե երկնիշ թիվը բաժանենք իր թվանշանների գումարին, ապա քանորդում կստանանք 6, իսկ մնացորդում՝ 5: Եթե նույն թվանշաններով կազմված, բայց հակառակ կարգով գրված թիվը բաժանենք իր թվանշանների գումարին, ապա քանորդում կստանանք 4, իսկ մնացորդում՝ 3: Գտնել սկզբնական երկնիշ թիվը:

244. Եթե երկնիշ թիվը բաժանենք իր թվանշանների գումարին, ապա քանորդում կստանանք 4, իսկ մնացորդում՝ 3: Եթե նույն թվանշաններով կազմված, բայց հակառակ կարգով գրված թիվը բաժանենք իր թվանշանների գումարին, ապա քանորդում կստանանք 6, իսկ մնացորդում՝ 8: Գտնել սկզբնական երկնիշ թիվը:

§7. Ֆունկցիայի պարբերականությունը

Զրոյից պարբեր T թիվն անվանում են f ֆունկցիայի պարբերություն, եթե $x\in D(f)$ պայմանից հետևում է՝ $x\pm T\in D(f)$ և

$$f(x+T)=f(x):$$

Այս դեպքում f ֆունկցիան անվանում են պարբերական ֆունկցիա:

Եթե T -ն f ֆունկցիայի պարբերություն է և $x \in D(f)$, ապա $f(x-T)=f(x)$: Իրոք, եթե $x \in D(f)$, ապա $x-T \in D(f)$ և

$$f(x)=f((x-T)+T)=f(x-T):$$

Հեշտ է ստուգել, որ եթե T -ն f ֆունկցիայի պարբերություն է, ապա T -ին պատիկ յուրաքանչյուր թիվ նույնպես պարբերություն է: Մասնավորապես՝

$$f(x+2T)=f(x+T+T)=f(x+T)=f(x):$$

Եթե պարբերական ֆունկցիան ունի փոքրագույն դրական պարբերություն, այն անվանում են հիմնական պարբերություն:
Եթե T -ն f ֆունկցիայի հիմնական պարբերությունն է, ասում են, որ f ֆունկցիան T -պարբերական է:

Օրինակ 1: Դիցուք $f(x)=\sin x$, $x \in \mathbf{R}$:

Գիտենք, որ $\sin(x+2\pi)=\sin x$: Ուրեմն՝ 2π -ն սինուսի համար պարբերություն է, և, հետևաբար, պարբերություն է կամայական $2\pi k$ տեսքի թիվ, որտեղ k -ն զրոյից տարբեր ամբողջ թիվ է: Համոզվենք, որ սինուսն այլ պարբերություն չունի: Իրոք, եթե T -ն պարբերություն է, ապա

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+T\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1:$$

Բերման բանաձև կիրառելով՝ ստանում ենք՝ $\cos T=1$, որտեղից $T=2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$: Քանի որ $2\pi k$ տեսքի թվերի մեջ փոքրագույն դրական թիվը 2π -ն է, ուրեմն՝

$f(x)=\sin x$ ֆունկցիան 2π -պարբերական է:

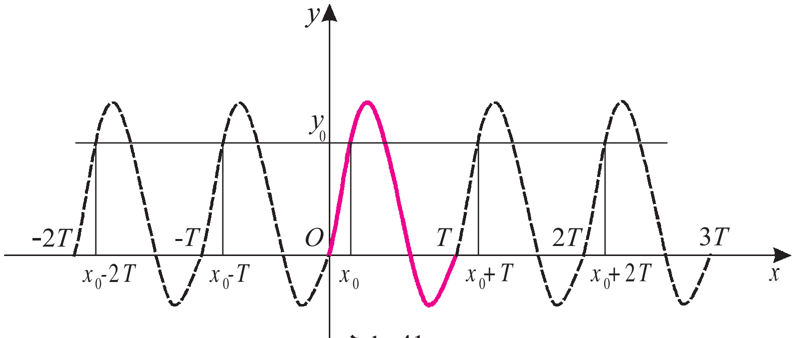
Նման ձևով կարող ենք համոզվել, որ՝

$f(x)=\cos x$ ֆունկցիան 2π -պարբերական է:
$f(x)=\operatorname{tg} x$ ֆունկցիան π -պարբերական է:
$f(x)=\operatorname{ctg} x$ ֆունկցիան π -պարբերական է:

Դիցուք f ֆունկցիան T -պարբերական է և $(x_0;\, y_0)$ կետը պատկանում է նրա գրաֆիկին (նկ. 41), այսինքն՝ $y_0=f(x_0)$: Քանի որ T -ն պարբերություն է, ուրեմն կամայական $k \in \mathbf{Z}$ ամբողջ թվի համար $y_0=f(x_0+Tk)$:

Այսինքն՝ $(x_0+Tk;\, y_0)$, $k \in \mathbf{Z}$, կետերը նույնպես կպատկանեն f ֆունկցիայի գրաֆիկին:

T -պարբերական ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցելու համար բավական է այն կառուցել T երկարությամբ որևէ հատվածի համար, այնուհետև ստացված պատկերն աբսցիսների առանցքի ուղղությամբ տեղաշարժել Tk -ով, $k \in \mathbf{Z}$ (նկ. 41):



Նկ. 41

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ո՞ր ֆունկցիան են անվանում պարբերական:
2. Ի՞նչ է հիմնական պարբերությունը:
3. Ի՞նչ է նշանակում, որ f -ը T -պարբերական ֆունկցիա է:
4. Որո՞նք են եռանկյունաչափական ֆունկցիաների հիմնական պարբերությունները:
5. Ինչպե՞ս կառուցել T -պարբերական ֆունկցիայի գրաֆիկը:

Առաջադրանքներ

245. Դիցուք T -ն f ֆունկցիայի պարբերություն է: Ապացուցել, որ յուրաքանչյուր $a \neq 0$ թվի դեպքում T -ն նաև F ֆունկցիայի պարբերություն է, եթե՝

ա) $F(x) = f(x+a)$, բ) $F(x) = f(x)+a$, գ) $F(x) = af(x)$:

246. Ապացուցել, որ T -ն տրված ֆունկցիայի պարբերություն է.

ա) $f(x) = \sin 2x$, $T = \pi$, բ) $f(x) = \cos\dfrac{x}{3}$, $T = 6\pi$,

գ) $f(x) = 4 - \operatorname{tg} x$, $T = \pi$, դ) $f(x) = 2\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}$, $T = 2\pi$,

ե) $f(x) = \sin x + \operatorname{ctg} x$, $T = 2\pi$, զ) $f(x) = \sin^2 x$, $T = \pi$:

***247.** Դիցուք f -ը T -պարբերական ֆունկցիա է: Ապացուցել, որ կամայական $k > 0$ թվի դեպքում $F(x) = f(kx)$ ֆունկցիայի հիմնական պարբերությունը T/k -ն է:

248. Օգտվելով նախորդ առաջադրանքից՝ գտնել ֆունկցիայի հիմնական պարբերությունը.

ա) $y = \sin 2x$, բ) $y = 3\sin \pi x$, գ) $y = \operatorname{tg} \pi x$,

դ) $y = \operatorname{tg} 8x$, ե) $y = 2\cos\dfrac{x}{3} - 4$, զ) $y = \cos\dfrac{\pi x}{6}$:

249. Ապացուցել, որ ֆունկցիան պարբերական է.

ա) $y = \sin 2x + \cos^2 x$, բ) $y = \operatorname{tg} x + \sin 2x$, գ) $y = \sin x + \cos x$,

դ) $\operatorname{ctg} x + \sin^2 x$, ե) $\sin 2x + \cos 3x$, զ) $\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2} + \operatorname{tg}\dfrac{x}{3}$:

Կրկնության համար

250. Գտնել հավասարման թույլատրելի արժեքների և լուծումների բազմությունները.

ա) $\sqrt{5x^2-4x}=1$, բ) $\sqrt{3x^2-12}=-8$, գ) $|x^2-5|=-4x$,

դ) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2-15x}}+\dfrac{1}{2}=0$, ե) $\dfrac{\sqrt{3x}}{\sqrt{3x^2-2}}=\dfrac{3}{5}$, զ) $\dfrac{2}{|x^2-9|}+7=0$:

251. Գտնել անհավասարման թույլատրելի արժեքների և լուծումների բազմությունները.

ա) $\sqrt{3x^2-48}\geq 0$, բ) $\sqrt{x^2+6x}<0$, գ) $\sqrt{x^2+8}\leq 0$,

դ) $|4x^5-6|+3\geq 0$, ե) $|x^3-27|\leq 0$, զ) $\dfrac{1}{|9x^2-18|}>0$:

§8. Զույգ և կենտ ֆունկցիաներ

f ֆունկցիան անվանում են զույգ, եթե

$$f(-x)=f(x),\ \textit{երբ}\ x\in D(f):$$

f ֆունկցիան անվանում են կենտ, եթե

$$f(-x)=-f(x),\ \textit{երբ}\ x\in D(f):$$

Բնականաբար, զույգ կամ կենտ ֆունկցիաների համար

$$x\in D(f)\ \textit{պայմանից հետևում է, որ}\ -x\in D(f),$$

այսինքն՝ այդ ֆունկցիաների որոշման տիրույթները համաչափ են զրո կետի նկատմամբ:

Օրինակ 1: Մեզ հայտնի՝

$$\sin(-x)=-\sin x,\quad \operatorname{tg}(-x)=-\operatorname{tg} x,\quad \operatorname{ctg}(-x)=-\operatorname{ctg} x,\quad \cos(-x)=\cos x$$

նույնություններից հետևում է, որ

սինուսը, տանգենսը և կոտանգենսը կենտ ֆունկցիաներ են, իսկ կոսինուսը զույգ ֆունկցիա է:

Օրինակ 2: $f(x)=|x|$ ֆունկցիան զույգ է, քանի որ $|-x|=|x|$, $x\in \mathbf{R}$:

Օրինակ 3: $(-x)^n=(-1)^n x^n$ նույնությունից հետևում է, որ x^n-ը զույգ ֆունկցիա է, եթե n-ը զույգ թիվ է, և կենտ ֆունկցիա է, եթե n-ը կենտ է:

Օրինակ 4: Պարզենք $f(x)=\dfrac{x+2}{x-2}-\dfrac{x-2}{x+2}$ ֆունկցիայի զույգությունը:

Ֆունկցիան որոշված է, երբ $x\neq\pm2$, և եթե $x\in D(f)$, ապա

$$f(-x)=\frac{-x+2}{-x-2}-\frac{-x-2}{-x+2}=\frac{x-2}{x+2}-\frac{x+2}{x-2}=-f(x):$$

Պատասխան՝ f ֆունկցիան կենտ է:

Նշենք, որ ամեն մի ֆունկցիա չէ, որ զույգ է կամ կենտ: Օրինակ՝ $f(x)=x+1$ ֆունկցիան ո՛չ զույգ է, ո՛չ կենտ, քանի որ $f(-x)=1-x$ ֆունկցիան չի համընկնում $f(x)=x+1$ և $-f(x)=-x-1$ ֆունկցիաներից ոչ մեկին:

Ենթադրենք $M(x_0;\ y_0)$ կետը պատկանում է f զույգ ֆունկցիայի գրաֆիկին, այսինքն՝ $y_0=f(x_0)$: Քանի որ

$$f(-x_0)=f(x_0)=y_0\,,$$

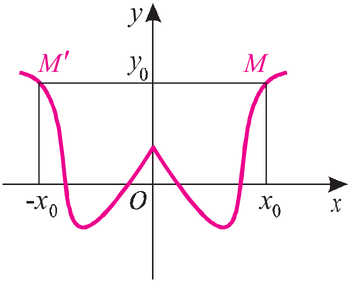
ուրեմն $M'(-x_0;\ y_0)$ կետը նույնպես պատկանում է այդ գրաֆիկին (նկ. 42, ա): Քանի որ նշված կետերը համաչափ են օրդինատների առանցքի նկատմամբ, հետևաբար՝

զույգ ֆունկցիայի գրաֆիկը համաչափ է օրդինատների առանցքի նկատմամբ (նկ. 42, ա):

Եթե $M(x_0;\ y_0)$ կետը պատկանում է f կենտ ֆունկցիայի գրաֆիկին, ապա

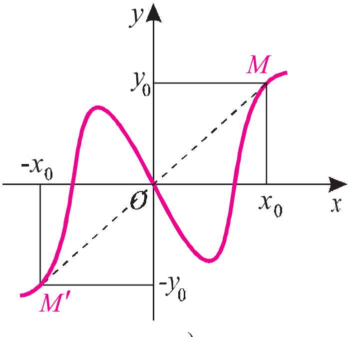
$$f(-x_0)=-f(x_0)=-y_0\,,$$

այսինքն՝ $M'(-x_0;\ -y_0)$ կետը նույնպես պատկանում է այդ գրաֆիկին (նկ. 42, բ): Քանի որ նշված կետերը համաչափ են կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ, հետևաբար՝



ա)

Նկ. 42



բ)

կենտ ֆունկցիայի գրաֆիկը համաչափ է կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ (նկ. 42, բ):

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ո՞ր ֆունկցիան է կոչվում զույգ և որը՝ կենտ ֆունկցիա:
2. Ո՞ր կետի նկատմամբ է համաչափ զույգ կամ կենտ ֆունկցիայի որոշման տիրույթը:
3. Եռանկյունաչափական ֆունկցիաներից որո՞նք են կենտ և որոնք՝ զույգ:

4. Բերեք ֆունկցիայի օրինակ, որը ո՛չ զույգ է, ո՛չ կենտ:

5. Ինչի՞ նկատմամբ է համաչափ՝ ա) զույգ ֆունկցիայի գրաֆիկը, բ) կենտ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

Առաջադրանքներ

252. Ապացուցել, որ ֆունկցիան զույգ է.

ա) $f(x)=x^2+1$, բ) $f(x)=\cos 2x$, գ) $f(x)=x\sin\frac{x}{2}$,

դ) $f(x)=|x|+x^4$, ե) $f(x)=\frac{x^2-2}{\sin^2 x}$, զ) $f(x)=x^3\operatorname{tg}2x$,

է) $f(x)=(x^3-x)\operatorname{ctg}x$, ը) $f(x)=\sin x\cdot\operatorname{tg}x$, թ) $f(x)=\frac{\sin x}{x}$:

253. Ապացուցել, որ ֆունկցիան կենտ է.

ա) $f(x)=x^5-x$, բ) $f(x)=x\cos x$, գ) $f(x)=x^2\sin 2x$,

դ) $f(x)=x^4\operatorname{ctg}x$, ե) $f(x)=\frac{\sin^3 x}{x^2+1}$, զ) $f(x)=\frac{\cos 4x}{x}$,

է) $f(x)=\operatorname{tg}^3 x+3x$, ը) $f(x)=x\sin x^2$, թ) $f(x)=x\operatorname{ctg}^2 x$:

254. Ապացուցել, որ կամայական f ֆունկցիայի համար

ա) $F(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$ ֆունկցիան զույգ է (եթե $D(F)\neq\varnothing$),

բ) $F(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$ ֆունկցիան կենտ է (եթե $D(F)\neq\varnothing$):

Պարզել, թե հետևյալ ֆունկցիաներից որո՞նք են զույգ, որոնք՝ կենտ, և որո՞նք են ո՛չ զույգ, ո՛չ կենտ (255-256).

255. ա) $y=\sin x+2x$, բ) $y=\cos x-x$, գ) $y=\operatorname{tg}x-x^3$,

դ) $y=\sin(x^2)+x^{12}$, ե) $y=\operatorname{tg}^2 x-x^4+1$, զ) $y=\sin(2x+1)$,

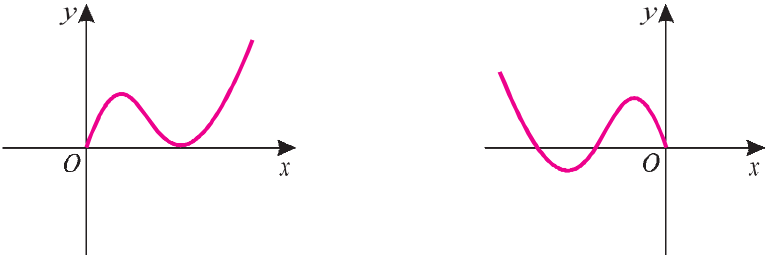
է) $y=\sin(x^2-1)$, ը) $y=\cos(\operatorname{ctg}x)+x$, թ) $y=x\sin x$:

256. ա) $y=(x+1)^2+(x-1)^2$, բ) $y=x^5-2x^2+1$, գ) $y=\frac{x+4}{x-4}+\frac{x-4}{x+4}$,

դ) $y=\frac{3}{2x}$, ե) $y=\frac{5x}{x-7}$, զ) $y=\frac{4x-13}{5x+27}$:

257. ա) Նկ. 43, ա-ում պատկերված է $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը ոչ բացասական x-երի համար: Լրացնել այդ ֆունկցիայի գրաֆիկը, եթե հայտնի է, որ այն՝ ա) զույգ է, բ) կենտ է:

բ) Նկ. 43, բ-ում պատկերված է $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը ոչ դրական x-երի համար: Պատկերել այդ ֆունկցիայի գրաֆիկը, եթե հայտնի է, որ այն՝ ա) զույգ է, բ) կենտ է:



ա) Նկ. 43 բ)

Կրկնության համար

258. Ապացուցել, որ եթե $a > b > 2$, ապա

ա) $\dfrac{1}{b^2-4b+5} > \dfrac{1}{a^2-4a+5}$, բ) $\dfrac{1}{a^2-3a+2} < \dfrac{1}{b^2-3b+2}$:

§9. Ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքերը և էքստրեմումները

f ֆունկցիան կոչվում է X բազմությունում աճող, եթե կամայական $x_1, x_2 \in X$ թվերի համար $x_1 < x_2$ անհավասարությունից հետևում է, որ $f(x_1) < f(x_2)$:

f ֆունկցիան կոչվում է X բազմությունում նվազող, եթե կամայական $x_1, x_2 \in X$ թվերի համար $x_1 < x_2$ անհավասարությունից հետևում է, որ $f(x_1) > f(x_2)$:

Ֆունկցիան կոչվում է աճող (նվազող), եթե այն աճող է (համապատասխանաբար՝ նվազող է) իր որոշման տիրույթում:

Աճող և նվազող ֆունկցիաներն ունեն ընդհանուր անվանում՝ ***մոնոտոն ֆունկցիաներ***:

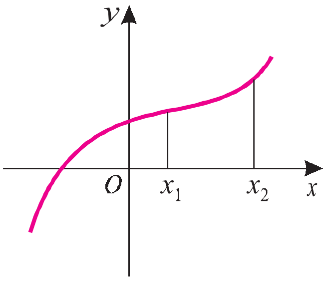
Մեզ առավելապես կհետաքրքրի այն դեպքը, երբ X բազմությունը, որտեղ ֆունկցիան մոնոտոն է, միջակայք է:

Δ միջակայքն անվանում են f ֆունկցիայի ***մոնոտոնության միջակայք***, եթե f ֆունկցիան այդ միջակայքի վրա մոնոտոն է, այսինքն՝ կա՛մ աճող է, կա՛մ նվազող:

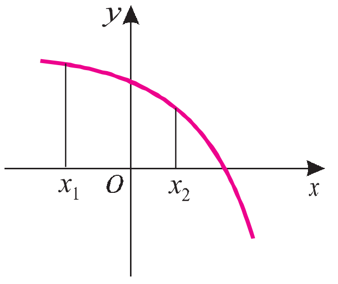
Օրինակ 1: $f(x) = x^2$ ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքերն են՝ $(-\infty; 0]$ և $[0; \infty)$: Դրանցից առաջինում ֆունկցիան նվազող է, իսկ երկրորդում՝ աճող:

Ֆունկցիայի աճող (նվազող) լինելը դրա գրաֆիկում արտահայտվում է նրանով, որ երբ կետը գրաֆիկի վրայով շարժվում է աջ, այն բարձրանում է վեր (իջնում է վար):

Նկ. 44-ում պատկերված գրաֆիկներից՝ ա)-ն աճող, իսկ բ)-ն նվազող ֆունկցիաների



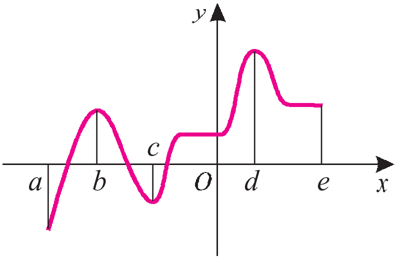
ա)



բ)

Նկ. 44

գրաֆիկներ են: Իսկ նկ. 45-ում պատկերված է ոչ մոնոտոն ֆունկցիայի գրաֆիկ: Այդ ֆունկցիան աճող է $[a;b]$ միջակայքում, նվազող՝ $[b;c]$-ում, սակայն իր որոշման տիրույթում՝ $[a,e]$-ում ո՛չ նվազող է և ոչ էլ աճող:



Նկ. 45

Ֆունկցիաների մոնոտոնության միջակայքերի համար ընդունված են հետևյալ նշանակումները.

ա) $f\uparrow[a,b]$ - f ֆունկցիան աճող է $[a;b]$ միջակայքում,

բ) $f\downarrow[a,b]$ - f ֆունկցիան նվազող է $[a;b]$ միջակայքում:

Օրինակ 2: Գտնենք ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքերը.

$$f(x)=\frac{1}{x^4+x^2+5}:$$

Ենթադրենք $0\le x_1<x_2$: Այդ դեպքում՝ $x_1^4+x_1^2+5<x_2^4+x_2^2+5$, հետևաբար՝

$$\frac{1}{x_1^4+x_1^2+5}>\frac{1}{x_2^4+x_2^2+5},$$

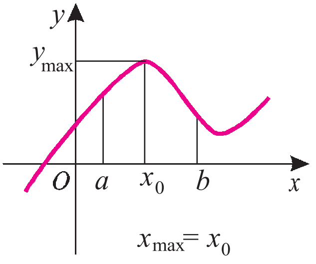
այսինքն՝ $f(x_1)>f(x_2)$: Ուրեմն՝ f-ը $[0;+\infty)$ միջակայքում նվազող է: Նման ձևով կստացվի, որ f-ը $(-\infty;0]$ միջակայքում աճող է:

Պատասխան. $f\uparrow(-\infty;0]$, $f\downarrow[0;+\infty)$:

x_0 կետը կոչվում է $y=f(x)$ ֆունկցիայի մաքսիմումի կետ, եթե գոյություն ունի x_0-ն պարունակող այնպիսի $(a;b)$ միջակայք, որին պատկանող կամայական x-ի համար $f(x_0)\ge f(x)$ (նկ. 46ա):

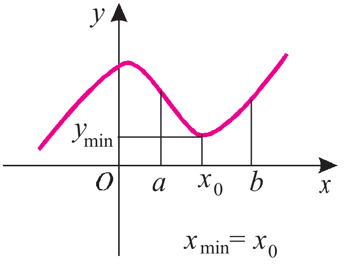
Այս դեպքում գրում են $x_{max}=x_0$: Ֆունկցիայի արժեքը մաքսիմումի կետում անվանում են ***ֆունկցիայի մաքսիմում*** և նշանակում՝ y_{max}:

x_0 կետը կոչվում է $y=f(x)$ ֆունկցիայի մինիմումի կետ, եթե գոյություն ունի x_0-ն պարունակող այնպիսի $(a;b)$ միջակայք, որին պատկանող կամայական x-ի համար $f(x_0)\leq f(x)$ (նկ. 46բ):



ա)

Նկ. 46



բ)

Այս դեպքում գրում են՝ $x_{min}=x_0$: Ֆունկցիայի արժեքը մինիմումի կետում անվանում են ***ֆունկցիայի մինիմում*** և նշանակում՝ y_{min}:

Ֆունկցիայի մաքսիմումի և մինիմումի կետերն ունեն ընդհանուր անվանում՝ ***էքստրեմումի կետեր***: Իսկ ֆունկցիայի մաքսիմումները և մինիմումները կոչվում են ***ֆունկցիայի էքստրեմումներ***:

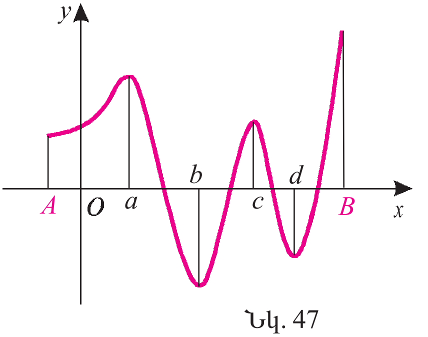
Դժվար չէ տեսնել, որ եթե f-ն աճող է որևէ $(a;\, x_0]$ միջակայքում և նվազող՝ որևէ $[x_0;\, b)$ միջակայքում, ապա x_0-ն մաքսիմումի կետ է (նկ. 46, ա): Իսկ եթե f-ը նվազող է որևէ $(a;\, x_0]$ միջակայքում և աճող՝ որևէ $[x_0;\, b)$ միջակայքում, ապա x_0-ն մինիմումի կետ է (նկ. 46, բ):

2-րդ օրինակում տեսանք, որ

$$f(x)=\frac{1}{x^4+x^2+5}$$

ֆունկցիան աճող է $(-\infty;\, 0]$-ում և նվազող՝ $[0;\infty)$-ում: Հետևաբար՝ $x_0=0$ կետը f ֆունկցիայի մաքսիմումի կետ է՝ $x_{max}=0$: Դժվար չէ տեսնել նաև, որ ֆունկցիան այդ կետում ընդունում է իր մեծագույն արժեքը՝ $f(0)=0{,}2$:

Սակայն պետք չէ կարծել, որ մաքսիմումի կետում ֆունկցիան միշտ ընդունում է իր մեծագույն արժեքը:



Նկ. 47

47-րդ նկարում պատկերված $[A;B]$ որոշման տիրույթով ֆունկցիայի մաքսիմումի կետերն a-ն և c-ն են: Սակայն իր մեծագույն արժեքը ֆունկցիան ընդունում է ոչ թե այդ կետերում, այլ հատվածի B ծայրակետում: Ֆունկցիայի մինիմումի կետերն են՝ b-ն և d-ն, ընդ որում, b-ում ֆունկցիան ընդունում է իր փոքրագույն արժեքը, իսկ d -ում՝ ոչ:

Հատվածում որոշված ֆունկցիան իր մեծագույն (փոքրագույն) արժեքը կարող է ընդունել մաքսիմումի (մինիմումի) կետում կամ հատվածի ծայրակետում:

Հանկացե՞լ եք դասը

1. Ե՞րբ են ասում, որ ֆունկցիան X բազմությունում աճող է (նվազող է):
3. Ո՞ր ֆունկցիաներն են կոչվում մոնոտոն:
4. Ո՞ր կետն են անվանում մաքսիմումի (մինիմումի) կետ:
5. Ի՞նչն են անվանում ֆունկցիայի մաքսիմում (մինիմում):
6. Որո՞նք են ֆունկցիայի էքստրեմումի կետերը և որոնք՝ էքստրեմումները:
7. Էքստրեմումի կետում ֆունկցիան ընդունո՞ւմ է արդյոք մեծագույն կամ փոքրագույն արժեք:

Առաջադրանքներ

259. Գտնել f ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքերը, էքստրեմումի կետերը և էքստրեմումները.

ա) $f(x)=2x-5$, բ) $f(x)=4-7x$, գ) $f(x)=2x^2-1$,

դ) $f(x)=3-5x^2$, ➤ե) $f(x)=|x-2|$, ➤զ) $f(x)=\dfrac{2}{1+|x|}$:

Գտնել f ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքերը, էքստրեմումի կետերը, մեծագույն և փոքրագույն արժեքները (260-261).

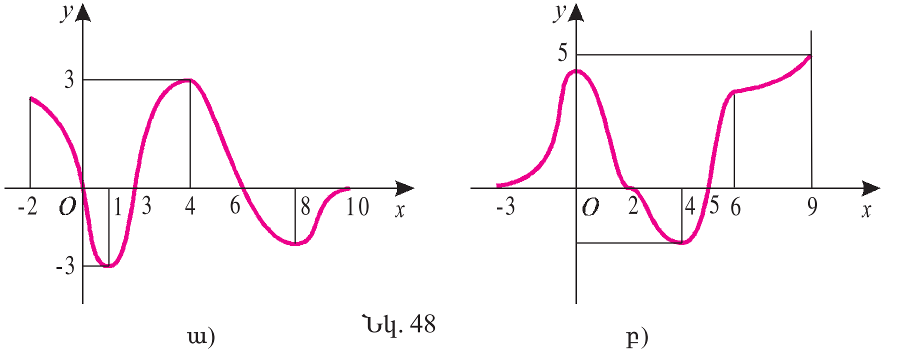
260. ա) $f(x)=-x^2+6x-8$, բ) $f(x)=\dfrac{3}{x-2}$,

գ) $f(x)=(x+2)^4+1$, դ) $f(x)=-(x+3)^5$:

261. ա) $f(x)=-\dfrac{1}{x+3}$, բ) $f(x)=\dfrac{1}{(x-2)^2}+1$,

➤գ) $f(x)=4|x|-x^2$, ➤դ) $f(x)=x^2-2|x|$:

262. Գտնել գրաֆիկորեն տրված ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքերը, էքստրեմումի կետերը, մեծագույն և փոքրագույն արժեքները (նկ. 48).



ա) Նկ. 48 բ)

➢**263.** Դիցուք f և g ֆունկցիաներն աճող են: Ապացուցել, որ եթե դիտարկվող ֆունկցիաների որոշման տիրույթները դատարկ չեն, ապա՝

ա) $f(x)+a$ ֆունկցիան աճող է (a -ն որևէ հաստատուն է),

բ) $f+g$ ֆունկցիան աճող է,

գ) եթե $k>0$, ապա $k\cdot f$ ֆունկցիան աճող է,

դ) $-f$ ֆունկցիան նվազող է,

ե) եթե $k<0$, ապա kf ֆունկցիան նվազող է,

զ) եթե f -ի և g -ի արժեքները ոչ բացասական են, ապա $f\cdot g$ ֆունկցիան աճող է,

է) եթե f -ի բոլոր արժեքները դրական են, ապա $1/f$ ֆունկցիան նվազող է:

264. Ապացուցել, որ $y=kx+b$ գծային ֆունկցիան՝

ա) աճող է, երբ $k>0$,   բ) նվազող է, երբ $k<0$:

265. Ապացուցել, որ՝

ա) $f(x)=x^4+3x$ ֆունկցիան $[0;\infty)$ միջակայքում աճող է,

բ) $f(x)=-x^3-2x$ ֆունկցիան նվազող է,

գ) $f(x)=x^6-0{,}5$ ֆունկցիան $(-\infty;0]$ միջակայքում նվազող է,

դ) $f(x)=x^5+1{,}5x$ ֆունկցիան աճող է:

266. Պատկերել այնպիսի ֆունկցիայի գրաֆիկ, որը՝

ա) աճող է $[-7;1]$ միջակայքում, նվազող՝ $[1;5]$-ում,

բ) նվազող է $[-3;0]$ և $[2;4]$ միջակայքերում, աճող՝ $[0;2]$-ում:

Կրկնության համար

267. Մեկ դետալ մշակելու համար առաջին բանվորը ծախսում է երկրորդից 7 ր քիչ ժամանակ: Քանի՞ դետալ կարող է մշակել նրանցից յուրաքանչյուրը 6 ժամում, եթե հայտնի է, որ այդ ընթացքում առաջին բանվորը մշակում է 42 դետալ ավելի, քան երկրորդը:

268. Երկու բրիգադներից յուրաքանչյուրը վերանորոգեց 10 կմ ճանապարհ, թեև երկրորդ բրիգադը առաջինից մեկ օր պակաս աշխատեց: Քանի՞ կմ վերանորոգեց բրիգադներից յուրաքանչյուրը մեկ օրում, եթե նրանք միասին մեկ օրում վերանորոգում են 4,5 կմ:

§10. Ֆունկցիայի հետազոտման ուրվագիծը և գրաֆիկի կառուցումը

Նախորդ պարագրաֆներում տեսանք, թե գրաֆիկում ինչպես են դրսևորվում ֆունկցիայի այնպիսի բնութագրիչները, ինչպիսիք են զույգությունը, պարբերականությունը, սահմանափակությունը, մեծագույն և փոքրագույն արժեքները, մոնոտոնության միջակայքերը և էքստրեմումները: Կարևոր է նաև պարզել ֆունկցիայի զրոները և նշանապահպանման միջակայքերը:

f ***ֆունկցիայի զրոներ*** կոչվում են $f(x)=0$ հավասարման լուծումները: Եթե $x_1, x_2, \cdots, x_n$ թվերն f ֆունկցիայի զրոներն են, ապա $(x_1;0), \cdots, (x_n;0)$ կետերը ֆունկցիայի գրաֆիկի և աբսցիսների առանցքի հատման կետերն են:

X միջակայքն անվանում են ֆունկցիայի նշանապահպանման միջակայք, եթե այդ միջակայքում ֆունկցիան ընդունում է նույն նշանի արժեքներ:

Եթե ֆունկցիան որևէ միջակայքում դրական է (բացասական է), ապա նրա գրաֆիկն այդ միջակայքում աբսցիսների առանցքից վերև (ներքև) է:

Ֆունկցիայի հետազոտման ուրվագիծը, որպես կանոն բաղկացած է հետևյալ քայլերից.

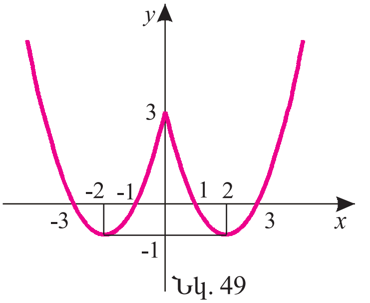
1) ***գտնել ֆունկցիայի որոշման տիրույթը և արժեքների բազմությունը,***
2) ***պարզել՝ ֆունկցիան պարբերակա՞ն է, թե՝ ոչ,***
3) ***պարզել ֆունկցիայի զույգությունը,***
4) ***որոշել ֆունկցիայի գրաֆիկի և կոորդինատային առանցքների հատման կետերը,***
5) ***գտնել ֆունկցիայի նշանապահպանման միջակայքերը,***
6) ***գտնել ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքերը,***
7) ***գտնել ֆունկցիայի էքստրեմումի կետերը և էքստրեմումները,***
8) ***եթե ֆունկցիայի որոշման տիրույթը բաղկացած է մեկ կամ մի քանի միջակայքերից, պարզել ֆունկցիայի վարքն այդ միջակայքերի ծայրակետերին մոտենալիս:***

Օրինակ 2: Հետազոտենք $f(x)=x^2-4|x|+3$ ֆունկցիան:

Ակնհայտ է, որ $D(f)=\mathbf{R}$: Ֆունկցիան զույգ է, քանի որ

$$f(-x)=(-x)^2-4|-x|+3=x^2-4|x|+3=f(x):$$

Նախ ուսումնասիրենք ֆունկցիան ոչ բացասական x-երի դեպքում: Այդ x-երի համար այն համընկնում է x^2-4x+3 քառակուսային եռանդամին, որի արմատներն են $x_1=1$ և $x_2=3$: Քանի որ $y=x^2-4x+3$ պարաբոլի ճյուղերն ուղղված են վեր և գագաթի աբսցիսն է՝ $x_0=2$, հետևաբար՝ $x_{\min}=2$ և $y_{\min}=f(2)=-1$: Ֆունկցիան նվազող է $[0;\,2]$ միջակայքում և աճող՝ $[2;\infty)$ միջակայքում: Հաշվի առնելով, որ ֆունկցիան զույգ է և $f(0)=3$, ստանում ենք 49-րդ նկարում պատկերված գրաֆիկը:



Նկ. 49

Այսպիսով՝

1) $D(f)=\mathbf{R}$, $E(f)=[-1;+\infty)$,

2) ֆունկցիան պարբերական չէ,

3) ֆունկցիան զույգ է,

4) ֆունկցիայի գրաֆիկը կոորդինատային առանցքների հետ հատվում է $(-3;\,0)$, $(-1;\,0)$, $(0;\,3)$, $(1;\,0)$ և $(3;\,0)$ կետերում,

5) ֆունկցիան դրական է $(-\infty;-3)$, $(-1;\,1)$ և $(3;\,\infty)$ միջակայքերում, բացասական՝ $(-3;-1)$ և $(1;\,3)$ միջակայքերում,

6) ֆունկցիան աճող է $[-2;\,0]$ և $[2;\infty)$ միջակայքերում, նվազող՝ $(-\infty;-2]$ և $[0;\,2]$ միջակայքերում,

7) էքստրեմումի կետերն են՝

$$x_{\min}=-2,\ x_{\min}=2 \text{ և } y_{\min}=-1;\ x_{\max}=0 \text{ և } y_{\max}=3,$$

8) ֆունկցիան վերևից սահմանափակ չէ, իսկ փոքրագույն արժեքը -1 է:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ո՞ր կետերն են անվանում ֆունկցիայի զրոներ:
2. Ո՞ր միջակայքերն են անվանում ֆունկցիայի նշանապահպանման միջակայքեր:
3. Ի՞նչ քայլերից է բաղկացած ֆունկցիայի հետազոտման ուրվագիծը:
4. Գրաֆիկում ինչպե՞ս է դրսևորվում ֆունկցիայի պարբերականությունը:
5. Գրաֆիկում ինչպե՞ս է դրսևորվում ֆունկցիայի զույգությունը:
6. Գրաֆիկում ինչպե՞ս են դրսևորվում ֆունկցիայի նշանապահպանման միջակայքերը:

Առաջադրանքներ

Հետազոտել ֆունկցիան և կառուցել նրա գրաֆիկը (269-272).

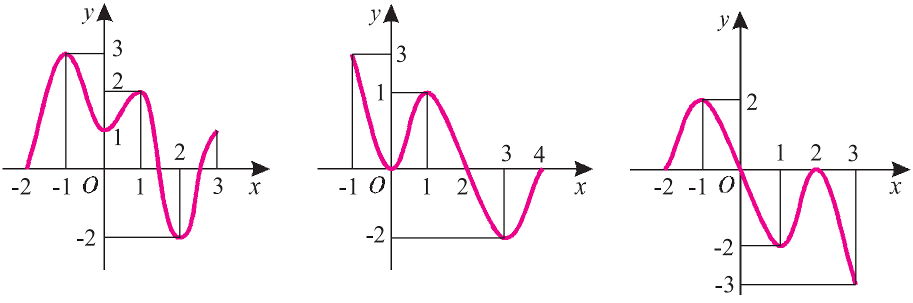
269. ա) $f(x)=5-3x$, բ) $f(x)=2x-7$, գ) $f(x)=x+8$, դ) $f(x)=-4x-1$:

270. ա) $f(x)=3-x^2-2x$, բ) $f(x)=x^2-3x+2$, գ) $f(x)=2x^2+x+2$,   դ) $f(x)=x-x^2-1$:

271. ա) $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$, բ) $f(x)=\dfrac{1}{x}+2$, գ) $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$, դ) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x}$:

272. ա) $f(x)=\sqrt{x-3}$, բ) $f(x)=\sqrt{x+1}$, գ) $f(x)=3-\sqrt{3-x}$, դ) $f(x)=\sqrt{x-4}-2$:

273. Հետազոտել 50-րդ նկարում գրաֆիկորեն տրված ֆունկցիաները.



ա)   բ)   գ)

Նկ. 50

Կրկնության համար

274. Մանկապարտեզի 25 երեխաներին բաժանեցին 60 խաղալիք, ընդ որում, յուրաքանչյուր աղջկա տվեցին մեկ խաղալիք ավելի, քան յուրաքանչյուր տղայի, իսկ բոլոր աղջիկներն ստացան այնքան խաղալիք, որքան բոլոր տղաները: Քանի՞ աղջիկ և քանի՞ տղա կար մանկապարտեզում:

275. Պապիկն իր 33 թոռներին և ծոռներին բաժանեց 180 խաղալիք այնպես, որ յուրաքանչյուր ծոռ ստացավ մեկ խաղալիք ավելի, քան յուրաքանչյուր թոռ: Քանի՞ թոռ և քանի՞ ծոռ ունի պապիկը, եթե հայտնի է, որ բոլոր ծոռներն ստացան այնքան խաղալիք, որքան բոլոր թոռները:

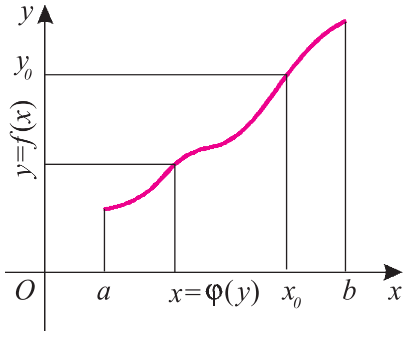
§11. Հակադարձ ֆունկցիան և դրա գրաֆիկը

Դիտարկենք D բազմությունում որոշված $y=f(x)$ ֆունկցիան, որի արժեքների տիրույթը E-ն է: Նշանակում է՝ E բազմությանը պատկանող կամայական y_0 կետի համար գոյություն ունի այնպիսի x_0 կետ D բազմությունից, որ

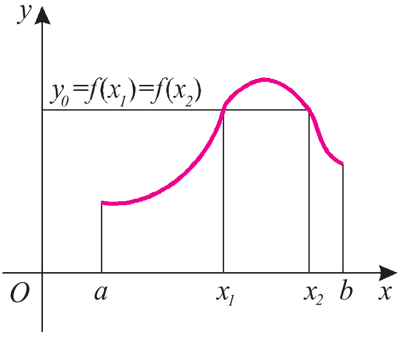
$$f(x_0)=y_0: \qquad (1)$$

Եթե f ֆունկցիան D բազմության տարբեր կետերում ընդունում է տարբեր արժեքներ, ապա (1) հավասարմանը բավարարող x_0 կետը կլինի միակը: Այս դեպքում կասենք, որ f ***ֆունկցիան փոխմիարժեք է*** D ***բազմությունում***:

51-րդ նկարում բերված են $[a,b]$ հատվածի վրա որոշված երկու ֆունկցիաների գրաֆիկներ, որոնցից առաջինը փոխմիարժեք է, իսկ երկրորդը՝ ոչ, քանի որ երկրորդ ֆունկցիան x_1 և x_2 տարբեր կետերում ընդունում է միևնույն արժեքը՝ $f(x_1)=f(x_2)=y_0$:



ա)



բ)

Նկ. 51

Եթե f-ը փոխմիարժեք է, ապա E բազմության յուրաքանչյուր y_0 կետի (1) բանաձևով կհամապատասխանի մի որոշակի x_0 թիվ D-ից, և մենք կունենանք E բազմության վրա որոշված φ ֆունկցիա, որը կանվանենք f-ի ***հակադարձ ֆունկցիա***:

Հակադարձ ֆունկցիայի արժեքը E բազմության y կետում հավասար է այն x թվին D-ից, որի համար $f(x)=y$, այսինքն (տե՛ս նկ. 51, ա)՝ $\varphi(y)=\varphi(f(x))=x$:

Եթե ֆունկցիան ունի հակադարձ, այն անվանում են ***հակադարձելի***:

Հեշտ է տեսնել, որ այս դեպքում φ ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը D-ն է և f ֆունկցիան, իր հերթին, φ ֆունկցիայի հակադարձն է, այսինքն՝ $f(\varphi(y))=y$ կամայական y կետի համար E բազմությունից: Ուստի այս դեպքում ասում են նաև, որ f և φ ֆունկցիաները ***փոխհակադարձ*** են:

Փոխհակադարձ ֆունկցիաներից մեկի որոշման տիրույթը մյուսի արժեքների բազմությունն է:

Օրինակ 1: $y=x^2$, $x\in(0;2)$ ֆունկցիան աճող է: Նրա արժեքների բազմությունը $(0,4)$ միջակայքն է: Հետևաբար, այն ունի հակադարձ՝ որոշված $(0,4)$ միջակայքում: Հակադարձ ֆունկցիայի արժեքը $(0,4)$ միջակայքի որևէ y կետում հավասար է այն x թվին $(0,2)$ միջակայքից, որը բավարարում է $x^2=y$ հավասարմանը: Այդ թիվը $\sqrt{y}$-ն է, հետևաբար՝ $x=\sqrt{y}$: Այսպիսով՝ $(0,4)$ միջակայքում տրված $y=x^2$ ֆունկցիայի հակադարձը $x=\sqrt{y}$, $y\in(0;4)$ ֆունկցիան է:

Նկատենք, որ հակադարձ ֆունկցիայի՝ $x=\sqrt{y}$ բանաձևում անկախ փոփոխականը y-ն է, իսկ կախյալը՝ x-ը: Քանի որ որևէ ֆունկցիայի անկախ փոփոխականը սովորաբար նշանակվում է x, իսկ կախյալ փոփոխականը՝ y, ընդունված է ասել, որ $y=x^2$

ֆունկցիայի հակադարձը $y=\sqrt{x}$ ֆունկցիան է:

Ամփոփելով, կարող ենք ասել՝

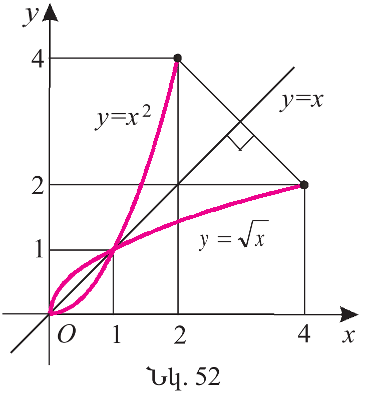
f փոխմիարժեք ֆունկցիայի հակադարձ ֆունկցիան գտնելու համար անհրաժեշտ է.

ա) $y=f(x)$ հավասարումից x-ն արտահայտել y-ով,

բ) ստացված բանաձևում փոխել x-ի և y-ի տեղերը:

Օրինակ 2: Դիտարկենք $f(x)=x^2$, $x\in(-2{,}2)$ ֆունկցիան:

Ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը $[0{,}4)$ միջակայքն է, և $(0{,}4)$-ին պատկանող յուրաքանչյուր y-ի համար $y=x^2$ հավասարումն ունի $(-2{,}2)$ միջակայքին պատկանող երկու արմատ՝ $x_1=\sqrt{y}$ և $x_2=-\sqrt{y}$: Ֆունկցիան հակադարձելի չէ:



Նկ. 52

1-ին օրինակում տեսանք, որ $y=x^2$, $x\in(0;2)$ և $y=\sqrt{x}$, $x\in(0;4)$ ֆունկցիաները հակադարձ են: 52-րդ նկարում պատկերված են այդ ֆունկցիաների գրաֆիկները: Դժվար չէ տեսնել, որ այդ գրաֆիկները համաչափ են $y=x$ ուղղի նկատմամբ: Պարզվում է, որ ընդհանրապես

փոխհակադարձ ֆունկցիաների գրաֆիկները համաչափ են $y=x$ ուղղի նկատմամբ:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ո՞ր ֆունկցիան է կոչվում փոխմիարժեք:
2. Ի՞նչ է հակադարձ ֆունկցիան, և ո՞ր ֆունկցիաներն ունեն հակադարձ:
3. Որո՞նք են f ֆունկցիայի հակադարձ ֆունկցիայի որոշման տիրույթը և արժեքների բազմությունը:
4. Ինչպե՞ս են գտնում f ֆունկցիայի հակադարձ ֆունկցիան:
5. Ի՞նչ կապ կա ֆունկցիայի և իր հակադարձի գրաֆիկների միջև:

Առաջադրանքներ

Գտնել ֆունկցիայի հակադարձը (276-277).

276. ա) $y=2x+5$, բ) $y=x^3$, գ) $y=\sqrt[3]{x}$, դ) $y=\sqrt{5x-2}$:

277. ա) $y=\dfrac{x-10}{3}$, $x\in(0;1)$, բ) $y=\dfrac{1}{x^2}$, $x\in(0;\infty)$,

գ) $y=x^4$, $x\in(0;\infty)$, դ) $y=x^4$, $x\in(-\infty;0)$:

278. Դիցուք φ ֆունկցիան (a,b) միջակայքում տրված f ֆունկցիայի հակադարձն է: Գտնել $\varphi(t_0)$-ն, եթե՝

ա) $f(x)=x^2-5x+6$, $(a,b)=(3;5)$, $t_0=2$,

բ) $f(x)=x^2-2x+3$, $(a,b)=(-\infty;1)$, $t_0=3$,

գ) $f(x)=|2x+3|$, $(a,b)=(0;10)$, $t_0=7$:

279. x-ի ո՞ր արժեքների համար է ճիշտ հավասարությունը.

ա) $\left(\sqrt[3]{x}\right)^3=x$, բ) $\sqrt[3]{x^3}=x$, գ) $\left(x^{1/2}\right)^2=x$,

դ) $\left(\sqrt[4]{x}\right)^4=x$, ե) $\sqrt[4]{x^4}=x$, զ) $\sqrt[4]{x^4}=-x$:

➢**280.** Ապացուցել, որ՝

ա) f զույգ ֆունկցիան հակադարձելի չէ, եթե $D(f)\neq\{0\}$;
բ) հակադարձելի կենտ ֆունկցիայի հակադարձը կենտ ֆունկցիա է:

281. Ապացուցել, որ $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ կոտորակագծային ֆունկցիան հակադարձելի է և նրա հակադարձը նույնպես կոտորակագծային ֆունկցիա է $(c\neq 0,\ ad\neq bc)$:

282. Կառուցել ֆունկցիայի և իր հակադարձի գրաֆիկները.

ա) $y=x^2$, $x\in(0;3)$, բ) $y=x^2$, $x\in(-3;\ 0)$, գ) $y=x^3$, $x\in(-2;2)$;

* **283.** Ինչպիսի՞ն է այն ֆունկցիայի գրաֆիկը, որը համընկնում է իր հակադարձին: Բերել օրինակներ:

Կրկնության համար

➢**284.** Երեք թվեր, որոնց գումարը 12 է, կազմում են թվաբանական պրոգրեսիա: Եթե երրորդ թիվը փոխարինենք 8-ով, ապա կստացվի երկրաչափական պրոգրեսիա: Գտնել այդ թվերը:

➢**285.** Գտնել x-ի այն արժեքը, որի դեպքում x, $3x+1$, $12x+0{,}5$ թվերը կազմում են երկրաչափական պրոգրեսիա:

Գլուխ 4

Թվային արգումենտի եռանկյունաչափական ֆունկցիաներ և եռանկյունաչափական հավասարումներ

§1. Սինուս և կոսինուս ֆունկցիաների հատկությունները ու գրաֆիկները

$y=\sin x$ ֆունկցիան: Դիտարկենք $y=\sin x$ ֆունկցիան, որի արժեքն x կետում x ռադիան պտտման անկյան սինուսն է: Արդեն գիտենք, որ՝

1) ***սինուսի որոշման տիրույթն ամբողջ թվային առանցքն է, իսկ արժեքների բազմությունը՝ $[-1;1]$ հատվածը՝ $D(\sin)=\mathrm{R}$ և $E(\sin)=[-1;1]$,***

2) ***սինուսը կենտ և 2π-պարբերական ֆունկցիա է,***

3) **$\sin x=0$, *երբ* $x=\pi k$, $k\in\mathrm{Z}$:**

Քանի որ սինուսը դրական է I և II քառորդներում և բացասական՝ III և IV քառորդներում, հետևաբար՝

4) **$\sin x>0$, *երբ* $x\in(2\pi k;\ \pi+2\pi k)$, $k\in\mathrm{Z}$,**
   $\sin x<0$, *երբ* $x\in(\pi+2\pi k;\ 2\pi+2\pi k)$, $k\in\mathrm{Z}$,

5) ***սինուսի մեծագույն արժեքը 1 է, ընդ որում,***

$$\sin x=1,\ \text{երբ}\ x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathrm{Z},$$

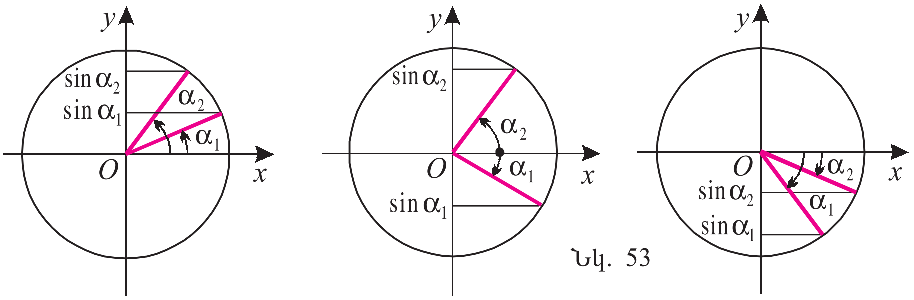
6) ***սինուսի փոքրագույն արժեքը −1 է, ընդ որում,***

$$\sin x=-1,\ \text{երբ}\ x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathrm{Z}:$$

Այժմ պարզենք սինուսի մոնոտոնության միջակայքերն ու էքստրեմումները: Եթե α_1 և α_2 թվերը պատկանում են $[-\pi/2;\pi/2]$ միջակայքին և $\alpha_1<\alpha_2$, ապա $\sin\alpha_1<\sin\alpha_2$ (նկ. 53):

Հետևաբար՝ $[-\pi/2;\pi/2]$ միջակայքում սինուսն աճող է: Հաշվի առնելով, որ սինուսը 2π-պարբերական ֆունկցիա է, ստանում ենք՝

7) ***սինուսն աճող է*** $\left[-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k;\dfrac{\pi}{2}+2\pi k\right]$, $k\in\mathrm{Z}$, ***միջակայքերում:***



Նկ. 53

Նման ձևով կստանանք՝

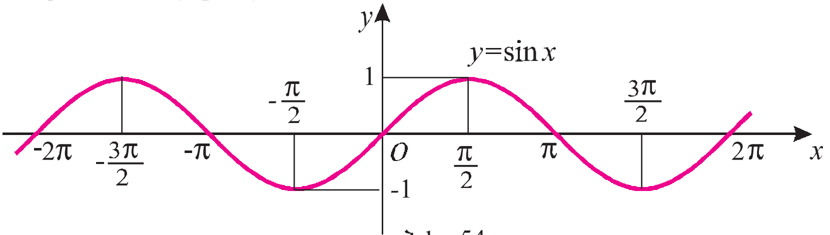
8) ***սինուսը նվազող է*** $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right]$, $k\in \mathbf{Z}$, ***միջակայքերում:***

Սինուսի 5-րդ և 6-րդ հատկություններից հետևում է, որ $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in \mathbf{Z}$ կետերը էքստրեմումի կետեր են: Իսկ 7-րդ և 8-րդ հատկություններից հետևում է, որ սինուսն ուրիշ էքստրեմումի կետեր չունի:

Այժմ կառուցենք $y=\sin x$ ֆունկցիայի գրաֆիկը: Քանի որ $\sin(\pm\pi)=\sin 0=0$, $\sin\frac{\pi}{2}=1$, $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$, ուստի՝

$$(-\pi; 0),\quad \left(-\frac{\pi}{2}; -1\right),\quad (0; 0),\quad \left(\frac{\pi}{2}; 1\right),\quad (\pi; 0)$$

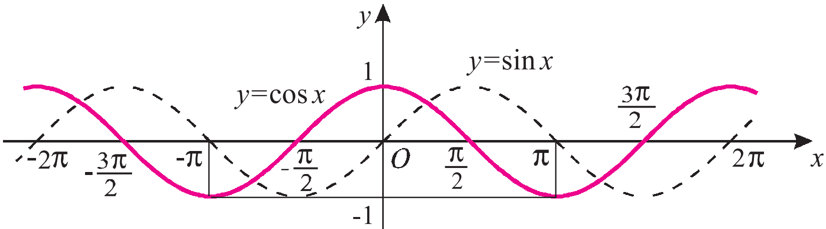
կետերը պատկանում են սինուսի գրաֆիկին: Այդ կետերն անընդհատորեն միացնելով և հաշվի առնելով 4-րդ - 8-րդ հատկությունները, կստանանք սինուսի մոտավոր գրաֆիկը $[-\pi; \pi]$ տեղամասում (նկ. 54):



Նկ. 54

Հաշվի առնելով, որ սինուսը 2π-պարբերական ֆունկցիա է, $[-\pi+2\pi k; \pi+2\pi k]$, $k\in \mathbf{Z}$, տեղամասերում նրա գրաֆիկը ստանալու համար անհրաժեշտ է $[-\pi; \pi]$ տեղամասում ստացված պատկերը $2\pi k$-ով տեղաշարժել աբսցիսների առանցքի երկայնքով (նկ. 54):

$y = \cos x$ ֆունկցիան: Նման ձևով կարելի է կառուցել կոսինուսի գրաֆիկը: Սակայն այն կարելի է կառուցել նաև՝ ելնելով $y=\sin x$ ֆունկցիայի գրաֆիկից: Համաձայն բերման բանաձևի՝ $\cos x=\sin(\pi/2+x)$: Հետևաբար՝ $y=\cos x$ ֆունկցիայի գրաֆիկը կստացվի $y=\sin x$ ֆունկցիայի գրաֆիկը $\pi/2$ միավորով ձախ տեղաշարժելով (նկ. 55):



Նկ. 55

Թվարկենք կոսինուսի հատկությունները.

1) ***կոսինուսի որոշման տիրույթն ամբողջ թվային առանցքն է, իսկ արժեքների բազմությունը՝*** $[-1;1]$ ***հատվածը՝***

$$D(\cos)=\mathrm{R},\ E(\cos)=[-1;1],$$

2) ***կոսինուսը զույգ և*** 2π ***-պարբերական ֆունկցիա է,***

3) $\cos x=0$, ***երբ*** $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in \mathrm{Z}$,

4) $\cos x>0$, ***երբ*** $x\in(-\pi/2+2\pi k;\pi/2+2\pi k)$, $k\in \mathrm{Z}$,

$\cos x<0$, ***երբ*** $x\in(\pi/2+2\pi k;3\pi/2+2\pi k)$, $k\in \mathrm{Z}$,

5) ***կոսինուսի մեծագույն արժեքը*** 1 ***է, ընդ որում,***

$$\cos x=1,\ \text{երբ}\ x=2\pi k,\ k\in \mathrm{Z},$$

6) ***կոսինուսի փոքրագույն արժեքը*** -1 ***է, ընդ որում***,

$$\cos x=-1,\ \text{երբ}\ x=\pi+2\pi k,\ k\in \mathrm{Z},$$

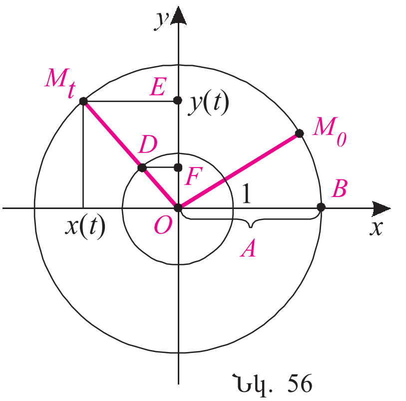
7) ***կոսինուսն աճող է*** $[-\pi+2\pi k;2\pi k]$, $k\in \mathrm{Z}$, ***միջակայքերում,***

8) ***կոսինուսը նվազող է*** $[2\pi k;\pi+2\pi k]$, $k\in \mathrm{Z}$, ***միջակայքերում:***

Ներդաշնակ տատանումներ: Բնության մեջ և տեխնիկայում բազմաթիվ երևույթներ ունեն պարբերական բնույթ, այսինքն՝ որոշակի ժամանակահատվածից հետո կրկնվում է արդեն կատարվածը: Օրինակ՝ երկրագնդի՝ իր առանցքի շուրջը պտույտի հետևանքով իրար են հաջորդում գիշերն ու ցերեկը, իսկ արեգակի շուրջը պտույտի հետևանքով ամեն տարի փոխվում են տարվա եղանակները:Ներքին այրման շարժիչի մխոցները, պարբերաբար շարժվելով, շարժման մեջ են դնում մեքենայի անիվները, որոնք էլ, իրենց հերթին, կատարելով պարբերական շարժում իրենց առանցքների շուրջը, մեքենան առաջ են մղում: Պարբերական շարժում է կատարում նաև ճոճանակը:

Պարբերական երևույթների նկարագրման և ուսումնասիրման համար բացառիկ նշանակություն ունեն սինուս և կոսինուս ֆունկցիաները: Բերենք մեկ օրինակ:

Դիցուք նյութական կետն ω հաստատուն անկյունային արագությամբ շարժվում է A շառավղով շրջանագծի վրայով, այսինքն՝ միավոր ժամանակում կետը գծում է ω ռադիան աղեղ: Ենթադրենք՝ այդ շրջանագծի կենտրոնը կոորդինատային հարթության սկզբնակետում, և ժամանակի $t=0$ պահին կետն M_0 դիրքում է (նկ. 56): Ժամանակի t պահին շրջանագծի վրա նյութական կետի դիրքը նշանակենք M_t-ով, իսկ M_t-ի աբսցիսը և օրդինատը, համապատասխանաբար, $x(t)$ և $y(t)$:



Նկ. 56

Գտնենք $x(t)$-ի և $y(t)$-ի փոփոխման օրենքը: Քանի որ կետը շարժվում է ω անկյունային արագությամբ, ուրեմն t ժամանակահատվածում այն կպտտվի ωt ռադիանով: Ենթադրենք՝ $\angle M_0OB=\varphi$: Այդ դեպքում OB շառավիղը $\omega t+\varphi$ ռադիանով պտտելիս կհայտնվի OM_t դիրքում: Հետևաբար՝ OM_t շառավղի և միավոր շրջանագծի հատման D կետի աբսցիսն ու օրդինատը, համապատասխանաբար, կլինեն $\cos(\omega t+\varphi)$ և $\sin(\omega t+\varphi)$: Օգտվելով ODF և OM_tE եռանկյունների նմանությունից՝ ստանում ենք՝

$$ա)\ x(t)=A\cos(\omega t+\varphi),\qquad բ)\ y(t)=A\sin(\omega t+\varphi): \qquad (1)$$

Երբ կետը պտտվում է շրջանագծով, նրա պրոյեկցիան աբսցիսների առանցքի վրա տատանվում է այդ առանցքի $[-A;A]$ հատվածում: Ընդ որում, այդ պրոյեկցիայի շարժումը տրվում է (1, ա) բանաձևով:

Հանգունորեն, շրջանագծով շարժվող կետի պրոյեկցիան օրդինատների առանցքի վրա կատարում է տատանումներ՝ շարժվելով ըստ (1, բ) բանաձևի: Նման տատանումները կոչվում են ներդաշնակ տատանումներ:

Ներդաշնակ պապանումներ են կոչվում (1, ա) կամ (1, բ) օրենքներով կապարվող շարժումները:

A թիվն անվանում են ներդաշնակ տատանման ***ամպլիպուդ*** (ցույց է տալիս աբսցիսների առանցքի վրա կետի պրոյեկցիայի առավելագույն շեղումը միջին դիրքից):

ω-ն կոչվում է ***անկյունային հաճախականություն***. այն ցույց է տալիս, թե քանի լրիվ տատանում է կատարում կետի պրոյեկցիան 2π միավոր ժամանակում: Իրոք, քանի որ միավոր ժամանակում կետը գծում է ω ռադիան աղեղ, ապա 2π միավոր ժամանակում այն կգծի $2\pi\cdot\omega$ ռադիան աղեղ, այսինքն՝ կետը կկատարի ω լրիվ պտույտ, իսկ կետի պրոյեկցիան կկատարի ω տատանում:

φ թիվը որոշում է կետի սկզբնական դիրքը ($t=0$ պահին) և կոչվում է ***սկզբնական փուլ***:

Այժմ համոզվենք, որ (1, ա)-ն ու (1, բ)-ն, ըստ էության, նույն կանոնն են: Իրոք՝

$$x(t)=A\cos(\omega t+\varphi)=A\sin\left(\omega t+\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)\right):$$

Այսինքն՝ (1, ա)-ն (1, բ)-ից տարբերվում է միայն սկզբնական փուլով:

Ներդաշնակ տատանման գրաֆիկն անվանում են ***սինուսոիդ***: Մասնավորապես սինուսոիդ են սինուս և կոսինուս ֆունկցիաների գրաֆիկները:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Թվարկեք սինուսի հատկությունները և կառուցեք գրաֆիկը:
2. Թվարկեք կոսինուսի հատկությունները և կառուցեք գրաֆիկը:
3. Ո՞րն է ներդաշնակ տատանման օրենքը:
4. Որո՞նք են ներդաշնակ տատանման ամպլիտուդը, անկյունային հաճախականությունը և սկզբնական փուլը:

Առաջադրանքներ

Գտնել ֆունկցիայի որոշման տիրույթը (286-287).

286. ա) $f(x)=\dfrac{1}{\sin x}$, բ) $f(x)=\dfrac{1}{1-\sin x}$, գ) $f(x)=\dfrac{2}{\cos x}$,

դ) $f(x)=\dfrac{1}{\cos x-1}$, ե) $f(x)=\dfrac{7}{\sin x+1}$, զ) $f(x)=-\dfrac{5}{\cos x+1}$:

287. ա) $f(x)=5\sqrt{\sin x}$, բ) $f(x)=\sqrt{-\cos x}+3$, գ) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\cos x}}$,

դ) $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{-\sin x}}$, ➤ե) $f(x)=\sqrt{\sin x\cos x}$, ➤զ) $f(x)=\sqrt{\cos^2 x-\sin^2 x}$:

288. Դասավորել աճման կարգով.

ա) $\sin 15^\circ$, $\sin(-15^\circ)$, $\sin 75^\circ$, բ) $\cos 22^\circ$, $\cos 75^\circ$, $\cos 145^\circ$,

գ) $\cos\left(-\dfrac{\pi}{13}\right)$, $\cos\left(-\dfrac{\pi}{9}\right)$, $\cos\dfrac{7\pi}{5}$, դ) $\sin\dfrac{5\pi}{3}$, $\sin\dfrac{4\pi}{3}$, $\sin\dfrac{\pi}{5}$:

289. Գտնել ֆունկցիայի էքստրեմումի կետերը և էքստրեմումները.

ա) $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$, բ) $f(x)=\cos 2x$,

գ) $f(x)=1-\sin x$, դ) $y=\sin^2 x$:

290. Գտնել ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները.

ա) $y=\sin x-1$, բ) $y=\cos x+1$,

գ) $y=2-3\cos x$, դ) $y=4+5\sin x$:

291. Ձևափոխելով $y=\sin x$ կամ $y=\cos x$ ֆունկցիայի գրաֆիկը, կառուցել տրված ֆունկցիայի գրաֆիկը և նշել հատկությունները.

ա) $y=\sin 3x$, բ) $y=-\cos x$, գ) $y=3\sin x$, դ) $y=2\cos\dfrac{x}{2}$:

➤**292.** Գտնել ներդաշնակ տատանման ամպլիտուդը, անկյունային հաճախականությունը և սկզբնական փուլը.

ա) $y=2\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$, բ) $y=-\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)$,

գ) $y=-3\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$, դ) $y=5\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{x}{2}\right)$:

Կրկնության համար

293. Աճող թվաբանական պրոգրեսիա կազմող երեք թվերի գումարը 42 է: Եթե այդ թվերին համապատասխանաբար ավելացնենք 1; 1 և 21, ստացված թվերը կկազմեն երկրաչափական պրոգրեսիա: Գտնել այդ երկրաչափական պրոգրեսիայի երրորդ անդամը:

294. Երեք թվեր, որոնց գումարը 30 է, կազմում են դրական տարբերությամբ թվաբանական պրոգրեսիա: Եթե առաջին թվից հանենք 5, իսկ երկրորդից՝ 4, ապա ստացված թվերը կկազմեն երկրաչափական պրոգրեսիա: Գտնել տրված թվերը:

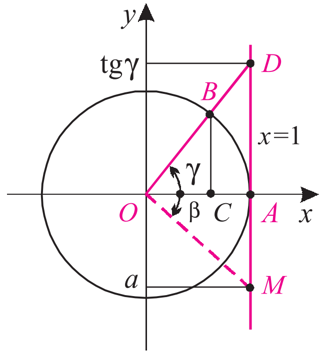
§2. Տանգենս և կոտանգենս ֆունկցիաների հատկությունները ու գրաֆիկները

$y=\mathrm{tg}\,x$ ֆունկցիան: Հետազոտենք $y=\mathrm{tg}\,x$ ֆունկցիան և կառուցենք նրա գրաֆիկը: Գիտենք, որ տանգենսը π-պարբերական և կենտ ֆունկցիա է: Գիտենք նաև, որ $\mathrm{tg}\,x$-ը որոշված է, երբ $x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$:

Կոորդինատային հարթության վրա վերցնենք միավոր շրջանագիծը և $x=1$ ուղիղը (նկ. 71): Դիցուք $\gamma\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ և OA սկզբնական շառավիղը γ անկյունով պտտելիս գրավում է OB դիրքը: Քանի որ $\Delta CBO \sim \Delta ADO$ և $AO=1$, ուստի

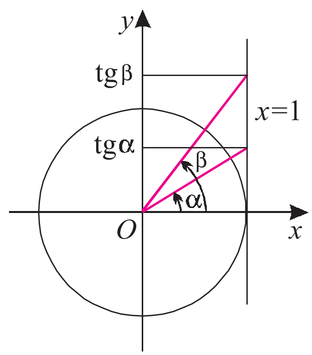
$$AD=\frac{AD}{AO}=\frac{BC}{CO}=\operatorname{tg}\gamma :$$

Այսպիսով՝ եթե OB ճառագայթն OA-ի հետ կազմում է γ անկյուն, ապա OB-ն հատում է $x=1$ ուղիղը $(1;\operatorname{tg}\gamma)$ կետում: Այս պատճառով $x=1$ ուղիղն անվանում են ***տանգենսների ուղիղ***:



Նկ. 57

Այժմ, եթե վերցնենք կամայական a թիվ և $x=1$ ուղղի $M(1;a)$ կետը միացնենք O կետին (նկ. 57), ապա ստացված β պտտման անկյան տանգենսը կլինի a և $\beta\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$: Նշանակում է՝ կամայական a թվի համար գոյություն ունի այնպիսի $\beta\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, որ $\operatorname{tg}\beta=a$: Բացի այդ, ինչպես հեշտ է տեսնել գծագրից (տե՛ս նկ. 58), եթե $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$, ապա $\operatorname{tg}\alpha<\operatorname{tg}\beta$: Այսպիսով՝ տանգենսը $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ միջակայքում աճող է և այդ միջակայքում ընդունում է յուրաքանչյուր իրական արժեք՝ $E(\operatorname{tg})=\mathbf{R}$:



Նկ. 58

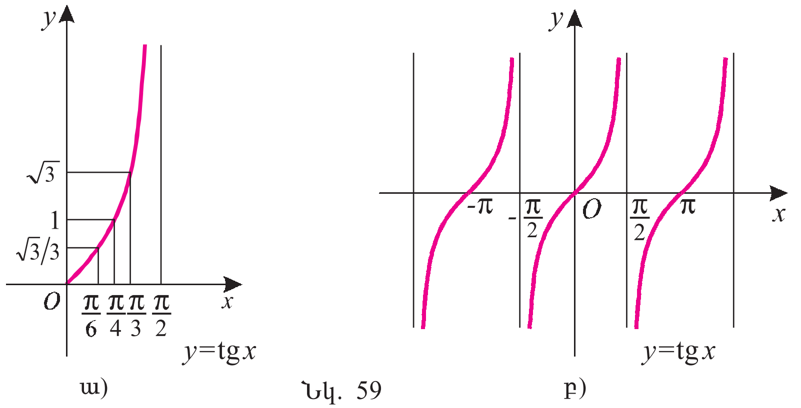
Քանի որ $\operatorname{tg}0=0$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$, ուրեմն հետևյալ կետերը պատկանում են տանգենսի գրաֆիկին:

$$(0;0),\quad \left(\frac{\pi}{6};\frac{\sqrt{3}}{3}\right),\quad \left(\frac{\pi}{4};1\right),\quad \left(\frac{\pi}{3};\sqrt{3}\right):$$

Նկատենք նաև, որ երբ x-ը մոտենում է $\pi/2$-ին, նրանից փոքր մնալով, $\operatorname{tg}x$-ը դառնում է մեծ նախօրոք տրված կամայական թվից: Հաշվի առնելով նաև, որ տանգենսը $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$ միջակայքում աճող է, այդ տեղամասում տանգենսի գրաֆիկի համար ստանում ենք նկ. 59, ա-ում պատկերված գիծը: Քանի որ տանգենսը կենտ և π-պարբերական ֆունկցիա է, նրա գրաֆիկը կլինի նկ. 59, բ-ում պատկերվածը: Այսպիսով՝

1) ***տանգենսի որոշման տիրույթը $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k;\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k\in\mathbf{Z}$, միջակայքերի միավորումն է, իսկ արժեքների բազմությունը՝ $E(\operatorname{tg})=\mathbf{R}$,***

2) ***տանգենսը կենտ և π-պարբերական ֆունկցիա է;***



Նկ. 59

3) ***տանգենսի գրաֆիկն աբսցիսների առանցքը հատում է*** $(\pi k;0)$, $k\in Z$, ***կետերում,***

4) $\mathbf{tg}\,x>0$, ***երբ*** $x\in(\pi k;\pi/2+\pi k)$, $k\in Z$,

$\mathbf{tg}\,x<0$, ***երբ*** $x\in(-\pi/2+\pi k;\pi k)$, $k\in Z$,

5) ***տանգենսն աճող է*** $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k;\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k\in Z$, ***միջակայքերից յուրաքանչյուրում*** (նկատենք, որ չի կարելի ասել, թե տանգենսն աճող ֆունկցիա է),

6) ***տանգենսն էքստրեմումի կետեր չունի,***

7) ***երբ*** x ***-ը մոտենում է*** $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$ ***կետին ձախից,*** $\mathbf{tg}\,x$ ***-ի արժեքներն անվերջ մեծանում են, իսկ աջից մոտենալիս*** $\mathbf{tg}\,x$ ***-ը, ընդունելով բացասական արժեքներ, անվերջ նվազում է՝ ձգտելով*** $-\infty$ ***-ի:***

$y=\mathrm{ctg}\,x$ ֆունկցիան: Քանի որ $\mathrm{ctg}\,x=-\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$, ուստի $y=\mathrm{ctg}\,x$ ֆունկցիայի գրաֆիկը ստացվում է $y=\mathrm{tg}\,x$ ֆունկցիայի գրաֆիկը $\pi/2$ միավորով ձախ տեղաշարժելով և աբսցիսների առանցքի նկատմամբ համաչափ արտապատկերելով (նկ. 60):

Կոտանգենսն ունի հետևյալ հատկությունները.

1) ***կոտանգենսի որոշման տիրույթը*** $(\pi k;\pi+\pi k)$, $k\in Z$, ***միջակայքերի միավորումն է, իսկ*** $E(\mathrm{ctg})=\mathbf{R}$,

2) ***կոտանգենսը կենտ և*** π ***-պարբերական ֆունկցիա է,***

3) ***կոտանգենսի գրաֆիկը աբսցիսների առանցքը հատում է*** $\left(\frac{\pi}{2}+\pi k;0\right)$, $k\in Z$, ***կետերում,***

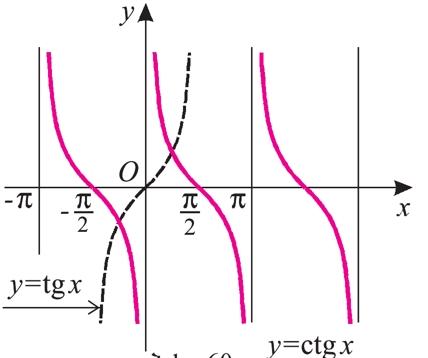
4) $\mathbf{ctg}\,x>0$, ***երբ*** $x\in(\pi k;\pi/2+\pi k)$, $k\in Z$,

$\mathbf{ctg}\,x<0$, ***երբ*** $x\in(\pi/2+\pi k;\ \pi+\pi k)$, $k\in Z$;

5) ***կոտանգենսը նվազող է*** $(\pi k;\pi+\pi k)$, $k\in Z$, ***միջակայքերից յուրաքանչյուրում*** (սակայն չի կարելի ասել, որ կոտանգենսը նվազող ֆունկցիա է),

6) ***կոտանգենսն էքստրեմումի կետեր չունի,***

7) ***երբ x-ը մոտենում է πk, $k \in Z$, կետին աջից, $\operatorname{ctg} x$-ի արժեքներն անվերջ մեծանում են, իսկ ձախից մոտենալիս $\operatorname{ctg} x$-ը, ընդունելով բացասական արժեքներ, նվազում է՝ ձգտելով $-\infty$-ի:***



Նկ. 60

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Պատկերեք տանգենսի գրաֆիկը և թվարկեք հատկությունները:
2. Ելնելով տանգենսի գրաֆիկից՝ պատկերեք կոտանգենսի գրաֆիկը:
3. Թվարկեք կոտանգենսի հատկությունները:

Առաջադրանքներ

295. Ձևափոխելով $y = \operatorname{tg} x$ կամ $y = \operatorname{ctg} x$ ֆունկցիայի գրաֆիկը՝ կառուցել տրված ֆունկցիայի գրաֆիկը և նշել հատկությունները.

ա) $f(x) = \operatorname{tg} x - 1$, բ) $f(x) = 1 - \operatorname{ctg} x$, գ) $f(x) = \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$,

դ) $f(x) = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, ե) $f(x) = |\operatorname{ctg} x|$, զ) $f(x) = |\operatorname{tg} 2x|$:

296. Դասավորել նվազման կարգով.

ա) $\operatorname{tg} 43^\circ$, $\operatorname{tg} 73^\circ$, $\operatorname{tg}(-50^\circ)$, բ) $\operatorname{ctg} 72^\circ$, $\operatorname{ctg} 13^\circ$, $\operatorname{ctg} 107^\circ$,

գ) $\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{5}$, $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{7}$, $\operatorname{ctg}\frac{6\pi}{5}$, դ) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{9}$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{7}$, $\operatorname{tg}\left(-\frac{7\pi}{9}\right)$:

➢**297.** Գտնել ֆունկցիայի որոշման տիրույթը.

ա) $f(x) = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$, բ) $f(x) = \frac{2}{\operatorname{ctg} x}$, գ) $f(x) = \sqrt{-\operatorname{ctg} x}$,

դ) $f(x) = \sqrt{\operatorname{tg} x}$, ե) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-\operatorname{tg} x}}$, զ) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ctg} x}}$:

➢**298.** Հետազոտել ֆունկցիան և կառուցել նրա գրաֆիկը.

ա) $f(x) = \operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$, բ) $f(x) = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, գ) $f(x) = \operatorname{ctg}\frac{x}{4}$:

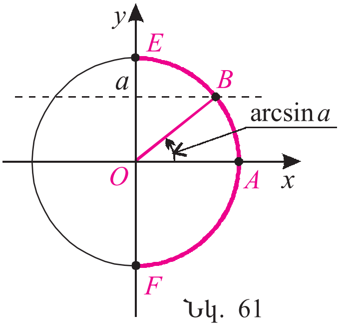
Կրկնության համար

➢**299.** Քանի՞ ժամում հեծանվորդը կանցնի 84 կմ, եթե նա առաջին ժամում անցնում է 15 կմ, իսկ յուրաքանչյուր հաջորդ ժամում՝ 1 կմ-ով պակաս, քան նախորդ ժամում:

➢**300.** Գնացքն առաջին ժամում անցնում է 50 կմ, իսկ յուրաքանչյուր հաջորդ ժամում՝ 2 կմ-ով ավելի, քան նախորդ ժամում: Քանի՞ ժամում գնացքը կանցնի 1470 կմ:

§3. Թվի արկսինուսը, արկկոսինուսը, արկտանգենսը և արկկոտանգենսը

Արկսինուս: Կոորդինատային հարթության վրա դիտարկենք միավոր շրջանագիծը և $y=a$ ուղիղը (նկ. 61): Պարզ է, որ եթե $|a|\le 1$, ապա այդ ուղիղը հատում է EAF կիսաշրջանագիծը միակ՝ B կետում: Նշանակում է՝ $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ միջակայքում գոյություն ունի միակ β թիվ, այնպիսին, որ $\sin\beta=a$: Այդ թիվն անվանում են a թվի արկսինուս և նշանակում՝ $\arcsin\alpha$:



Նկ. 61

a թվի արկսինուս կոչվում է $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ հատվածի այն թիվը, որի սինուսն a է:

Պարզ է, որ $\arcsin a$-ն որոշված է միայն այն դեպքում, երբ $a\in[-1;1]$, հակառակ դեպքում ($|a|>1$) գոյություն չունի թիվ, որի սինուսն a է:

Օրինակ 1: Գտնենք $\arcsin\frac{1}{2}$-ը: Ըստ սահմանման՝ պետք է գտնենք $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ հատվածի այն թիվը, որի սինուսը $1/2$ է:

Քանի որ $\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ և $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$, ուրեմն՝ $\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$:

Օրինակ 2: $\arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2}$, քանի որ

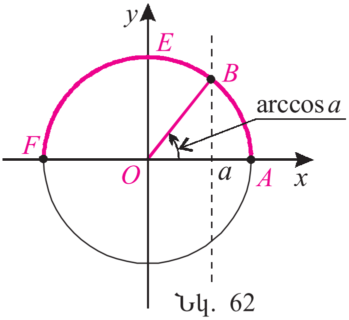
$$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1 \text{ և } -\frac{\pi}{2}\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]:$$

Օգտվելով սինուսի կենտությունից, կարելի է ապացուցել, որ

$$\mathbf{\arcsin(-a)=-\arcsin a}:$$

Օրինակ 3. $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=-\arcsin\frac{1}{2}=-\frac{\pi}{6}$, $\arcsin(-1)=-\arcsin 1=-\frac{\pi}{2}$:

Արկկոսինուս: Կոորդինատային հարթության վրա դիտարկենք միավոր շրջանագիծը և $x=a$ ուղիղը: Պարզ է, որ եթե $|a|\le 1$, ապա $x=a$ ուղիղը հատում է *FEA* կիսաշրջանագիծը միակ՝ *B* կետում (նկ. 62): Նշանակում է՝ $[0;\pi]$ միջակայքում գոյություն ունի միակ β թիվ, այնպիսին, որ $\cos\beta=a$: Այդ թիվն անվանում են a թվի արկկոսինուս և նշանակում՝ $\arccos a$:



Նկ. 62

$a\in[-1;1]$ թվի արկկոսինուս կոչվում է $[0;\pi]$ հատվածի այն թիվը, որի կոսինուսը a է:

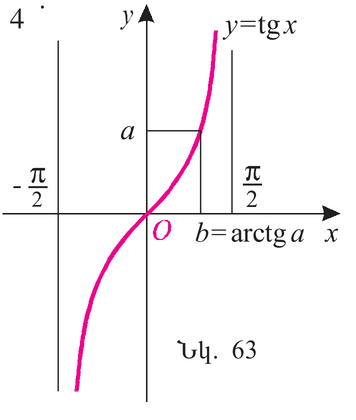
Օրինակ 4: $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$, քանի որ $\frac{\pi}{4}\in[0;\pi]$ և $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$:

Օգտվելով $\cos(\pi-x)=-\cos x$ նույնությունից՝ կարելի է ապացուցել, որ

$$\arccos(-a)=\pi-\arccos a:$$

Օրինակ 5: $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\pi-\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$:

Արկտանգենս: Տեսանք, որ տանգենսը $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ միջակայքում աճող է և ընդունում է կամայական իրական արժեք: Հետևաբար՝ կամայական $a\in\mathbf{R}$ թվի համար գոյություն ունի միակ b թիվը $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ միջակայքում, որի տանգենսն a է՝ $\operatorname{tg}b=a$ (նկ. 63): Այդ թիվն անվանում են a թվի արկտանգենս և նշանակում՝ $\operatorname{arctg}a$:



Նկ. 63

a թվի արկփանգենս կոչվում է $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ միջակայքի այն թիվը, որի փանգենսն a է:

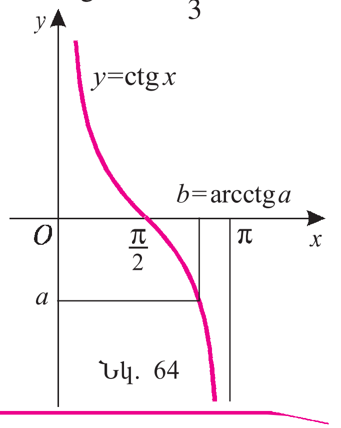
Օրինակ 6: $\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}$, քանի որ $\frac{\pi}{4}\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ և $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$:

Օգտվելով տանգենսի կենտությունից՝ կարելի է ապացուցել, որ

$$\operatorname{arctg}(-a)=-\operatorname{arctg}a:$$

Օրինակ 7: $\operatorname{arctg}(-1) = -\operatorname{arctg} 1 = -\frac{\pi}{4}$, $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\operatorname{arctg}\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}$:

Արկկոտանգենս: Քանի որ կոտանգենսը $(0; \pi)$ միջակայքում նվազող է և ընդունում է կամայական արժեք, ուրեմն կամայական a-ի համար գոյություն ունի միակ b թիվը $(0; \pi)$ միջակայքից, որի կոտանգենսը a է՝ $\operatorname{ctg} b = a$ (նկ. 64): Այդ թիվն անվանում են a թվի արկկոտանգենս և նշանակում՝ $\operatorname{arcctg} a$: Այսպիսով՝



Նկ. 64

***a* թվի արկկոտանգենս կոչվում է $(0; \pi)$ միջակայքի այն թիվը, որի կոտանգենսը *a* է:**

Օրինակ 8: $\operatorname{arcctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$, քանի որ $\frac{\pi}{6} \in (0; \pi)$ և $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$:

Օգտվելով $\operatorname{ctg}(\pi - x) = -\operatorname{ctg} x$ նույնությունից՝ կարելի է ապացուցել, որ

$$\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a:$$

Օրինակ 9: $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3}) = \pi - \operatorname{arcctg}\sqrt{3} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Սահմանեք $\arcsin a$-ն: Ո՞ր a-երի համար է այն որոշված:
2. Ինչի՞ է հավասար $\arcsin(-a)$-ն:
3. Սահմանեք $\arccos a$-ն: Ո՞ր a-երի համար է այն որոշված:
4. Ինչի՞ է հավասար $\arccos(-a)$-ն:
5. Ի՞նչ է թվի արկտանգենսը, և ինչի՞ է հավասար $\operatorname{arctg}(-a)$-ն:
6. Ի՞նչ է թվի արկկոտանգենսը, և ինչի՞ է հավասար $\operatorname{arcctg}(-a)$-ն:

Առաջադրանքներ

301. Լրացնել աղյուսակը:

a	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\arcsin a$									
$\arccos a$									

Գտնել արտահայտության արժեքը (302-303).

302. ա) $\arcsin 0+\arccos 1$, բ) $\arcsin 1+\arccos 0$,

գ) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}+\arccos\frac{1}{2}$, դ) $\arccos\frac{1}{2}-\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$:

303. ա) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, բ) $\arcsin(-1)+\arccos(-1)$,

գ) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\arcsin\frac{1}{2}$, դ) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$:

304. Իմաստ ունի՞ արդյոք արտահայտությունը.

ա) $\arcsin\frac{1}{3}$, բ) $\arcsin\frac{\sqrt{3}-1}{2}$, գ) $\arcsin\frac{\sqrt{3}+1}{2}$:

305. Ապացուցել հավասարությունը.

ա) $\arcsin\frac{1}{3}+\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)=0$, բ) $\arcsin(\sqrt{3}-1)+\arcsin(1-\sqrt{3})=0$:

306. Իմաստ ունի՞ արդյոք արտահայտությունը.

ա) $\arccos\sqrt{5}$, բ) $\arccos(\sqrt{5}-5)$, գ) $\arccos\frac{2}{3}$:

307. Ապացուցել հավասարությունը.

ա) $\arccos\frac{2}{3}+\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)=\pi$, բ) $\arccos(2-\sqrt{5})+\arccos\frac{1}{\sqrt{5}+2}=\pi$:

308. Գտնել արտահայտության արժեքը.

ա) $\arcsin\frac{1}{2}+\arccos\frac{1}{2}$, բ) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$,

գ) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}+\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$, դ) $\arcsin 1+\arccos 1$:

309. Լրացնել աղյուսակը:

a	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$
$\mathrm{arctg}\, a$							
$\mathrm{arcctg}\, a$							

310. Գտնել արտահայտության արժեքը.

ա) $\mathrm{arctg}\,1-\mathrm{arctg}\sqrt{3}$, բ) $\mathrm{arcctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+\mathrm{arctg}(-\sqrt{3})$,

գ) $\mathrm{arcctg}\,0+\mathrm{arcctg}(-\sqrt{3})$, դ) $\mathrm{arcctg}(-1)-\mathrm{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$,

ե) $\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}-\mathrm{arctg}\,0$, զ) $\mathrm{arctg}(-\sqrt{3})-\mathrm{arctg}\,1$:

311. Ապացուցել հավասարությունը.

ա) $\operatorname{arctg} 7+\operatorname{arctg}(-7)=0$, բ) $\operatorname{arcctg}(\sqrt{5}-5)+\operatorname{arcctg}(5-\sqrt{5})=\pi$,

գ) $\operatorname{arcctg}(1-\sqrt{3})+\operatorname{arcctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}+1}\right)=\pi$, դ) $\operatorname{arctg}(1-\sqrt{7})+\operatorname{arctg}\left(\frac{6}{\sqrt{7}+1}\right)=0$:

Կրկնության համար

312. Լուծել հավասարումը.

ա) $\frac{x-2}{4}+9\sqrt{\frac{x-2}{4}}=10$, բ) $\sqrt{4x+5}-\frac{2}{\sqrt{4x+5}}=\frac{7}{3}$:

313. Լուծել համակարգը.

ա) $\begin{cases} x^2+xy=-2 \\ y^2+xy=3, \end{cases}$ բ) $\begin{cases} (x-y)xy=30 \\ (x+y)xy=120: \end{cases}$

§4. Պարզագույն եռանկյունաչափական հավասարումների լուծման բանաձևերը

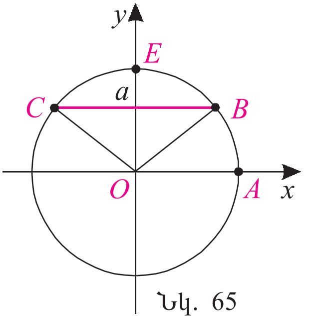
Այս պարագրաֆում մենք կլուծենք

$$\sin x=a,\ \cos x=a,\ \operatorname{tg} x=a \text{ և } \operatorname{ctg} x=a$$

պարզագույն եռանկյունաչափական հավասարումները:

1. $\sin x = a$ հավասարման լուծումը:

Քանի որ սինուսն արժեքներ է ընդունում միայն $[-1;1]$ միջակայքում, ուրեմն $|a|>1$ դեպքում $\sin x=a$ հավասարումն արմատ չունի:



Նկ. 65

Դիտարկենք $a=1$ դեպքը: Միավոր շրջանագծի վրա միակ կետը, որի օրդինատը 1 է, $E(0;1)$ կետն է (նկ. 65): Նշանակում է՝ $\sin x=1$ հավասարությունը ճիշտ է, եթե OA սկզբնական շառավիղը x ռադիան պտույտից հետո գրավում է OE դիրքը: Հետևաբար՝

$\sin x=1$ ***հավասարման լուծումն է***

$$x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\quad k\in Z: \tag{1}$$

Հանգունորեն կարող ենք համոզվել, որ

$\sin x = -1$ ***հավասարման լուծումն է՝***

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z} : \qquad (2)$$

Այժմ ենթադրենք $|a| < 1$: Դիցուք միավոր շրջանագիծը և $y = a$ ուղիղը հատվում են B և C կետերում (նկ. 65): $\sin x$ -ը կլինի a միայն այն դեպքում, երբ OA սկզբնական շառավիղն x ռադիան անկյունով պտտելիս հայտնվի OB կամ OC դիրքում: Համաձայն արկսինուսի սահմանման՝ այն կհայտնվի OB դիրքում, եթե $x = \arcsin a$: Իսկ եթե $x = \pi - \arcsin a$, ապա կստացվի OC դիրքը:

Հետևաբար՝ OA սկզբնական շառավիղը կհայտնվի OB կամ OC դիրքում, երբ այն պտտենք

$$\arcsin a + 2\pi k\,,\ k \in \mathbf{Z}, \text{ կամ } \pi - \arcsin a + 2\pi k\,,\ k \in \mathbf{Z}$$

անկյուններով: Այսինքն՝ $\sin x = a$ հավասարման արմատներն են՝

$$x = \arcsin a + 2\pi k, \quad k \in Z\,, \qquad (3)$$

$$x = \pi - \arcsin a + 2\pi k, \quad k \in Z : \qquad (4)$$

Լուծումների այս երկու բազմությունները կարելի է ներկայացնել մեկ բանաձևով.

$\sin x = a$ ***հավասարման լուծումն է՝***

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z} : \qquad (5)$$

Իրոք, եթե (5) բանաձևում n -ը զույգ է՝ $n = 2k$, ստանում ենք (3) բանաձևը, իսկ եթե n -ը կենտ է՝ $n = 2k + 1$, ստանում ենք (4) բանաձևը:

Քանի որ $\arcsin 0 = 0$, (5) բանաձևից կստանանք, որ

$\sin x = 0$ ***հավասարման լուծումն է՝***

$$x = \pi n\,,\ n \in \mathbf{Z} :$$

Դժվար չէ ստուգել, որ լուծումների (5) բազմությունը $a = 1$ դեպքում համընկնում է (1)-ի, իսկ $a = -1$ դեպքում՝ (2)-ի հետ:

Օրինակ 1: Լուծենք $\sin x = \frac{1}{2}$ հավասարումը:

Համաձայն (5) բանաձևի, $x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$:

Քանի որ $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, ուրեմն՝ $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$:

Պատասխան՝ $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$:

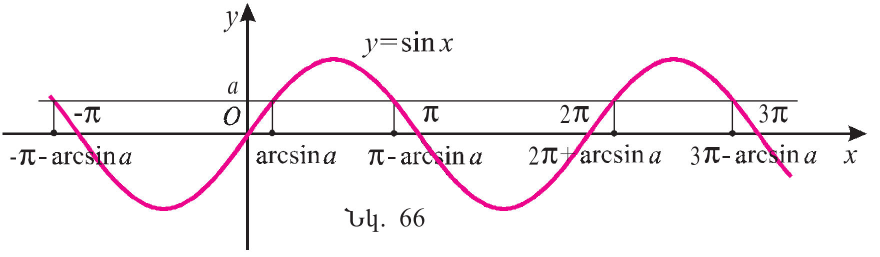
Օրինակ 2: Լուծենք $\sin x = -\frac{1}{3}$ հավասարումը:

Համաձայն (5) բանաձևի, $x = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right) + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$:

Քանի որ $\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right) = -\arcsin\frac{1}{3}$, ուրեմն $x = (-1)^{n+1}\arcsin\frac{1}{3} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$:

Պատասխան՝ $(-1)^{n+1}\arcsin\frac{1}{3} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$:

Մեկնաբանենք (3) և (4) բանաձևերը գրաֆիկորեն: $\sin x = a$ հավասարման արմատները $y = \sin x$ ֆունկցիայի գրաֆիկի և $y = a$ ուղղի հատման կետերի աբսցիսներն են (նկ. 66): Քանի որ $y = \sin x$ ֆունկցիան 2π-պարբերական է, բավական է գտնել $[-\pi, \pi]$ միջակայքի արմատները և գումարել պարբերությունները:

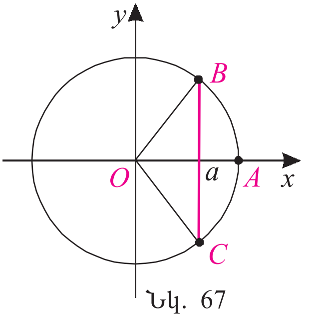


Նկ. 66

Ինչպես տեսնում ենք նկարում, $[-\pi, \pi]$ միջակայքում կա երկու արմատ, ընդ որում, այն արմատը, որը $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ միջակայքում է, $\arcsin a$-ն է, իսկ մյուսը՝ ($\pi - \arcsin a$)-ն: Գումարելով պարբերությունները՝ ստանում ենք (3) և (4) բանաձևերը:

2. $\cos x = a$ հավասարման լուծումը:

Քանի որ կոսինուսն արժեքներ է ընդունում միայն $[-1; 1]$ միջակայքում, ուրեմն, եթե $|a| > 1$, ապա $\cos x = a$ հավասարումն արմատ չունի:



Նկ. 67

Դիտարկենք $a = 1$ դեպքը: Միավոր շրջանագծի վրա միակ կետը, որի աբսցիսը 1 է, $A(1;0)$ կետն է (նկ. 67): Նշանակում է՝

$\cos x = 1$ ***հավասարման լուծումն է***

$$x = 2\pi k, \; k \in \mathbf{Z}: \qquad (6)$$

Հանգունորեն համոզվում ենք, որ

$\cos x = -1$ ***հավասարման լուծումն է***

$$x = \pi + 2\pi k, \; k \in \mathbf{Z}: \qquad (7)$$

Դիտարկենք $|a|<1$ դեպքը: Դիցուք միավոր շրջանագիծը և $x=a$ ուղիղը հատվում են B և C կետերում (նկ. 67): $\cos x$-ը կլինի a միայն այն դեպքում, երբ OA սկզբնական շառավիղը x ռադիան անկյունով պտտելիս հայտնվի OB կամ OC դիրքում: Համաձայն արկկոսինուսի սահմանման՝ այն կհայտնվի OB դիրքում, եթե $x=\arccos a$: Իսկ OC դիրքը կստացվի, եթե $x=-\arccos a$:

Հետևաբար՝ OA սկզբնական շառավիղը կհայտնվի OB կամ OC դիրքում, երբ այն պտտենք $\pm\arccos a+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$, անկյուններով: Ուստի՝

$\cos x=a$ *հավասարման լուծումն է՝*

$$\boldsymbol{x=\pm\arccos a+2\pi k,\quad k\in Z}: \qquad (8)$$

Մասնավորապես, երբ $a=0$, հաշվի առնելով, որ $\arccos 0=\pi/2$, ստանում ենք, որ $\cos x=0$ հավասարման լուծումն է՝ $x=\pm\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$: Ինքնուրույն համոզվեք, որ լուծումների այս բազմությունը կարելի է տալ ավելի պարզ բանաձևով.

$$\boldsymbol{\cos x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\quad k\in Z}:$$

Կարող եք ստուգել նաև, որ լուծումների (8) բազմությունը $a=1$ դեպքում համընկնում է (6)-ին, իսկ $a=-1$ դեպքում՝ (7)-ին:

Օրինակ 3: Լուծենք $\cos x=-1/2$ հավասարումը:

Համաձայն (8) բանաձևի՝ $x=\pm\arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right)+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$:

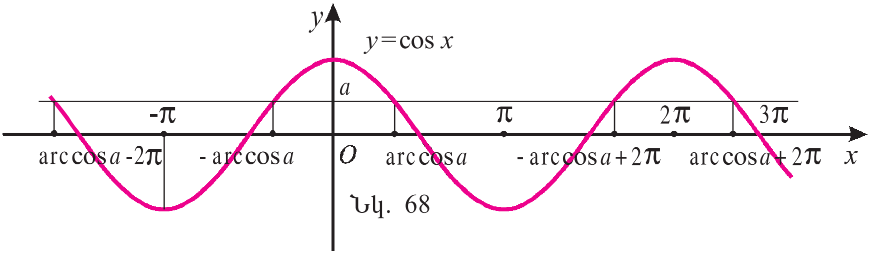
Քանի որ $\arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{2\pi}{3}$, ուրեմն՝ $x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$:

Պատասխան՝ $x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbf{Z}$:

Օրինակ 4: Լուծենք $2\cos x=\sqrt{5}$ հավասարումը:

Քանի որ $\dfrac{\sqrt{5}}{2}>1$, ուրեմն $\cos x=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ հավասարումն արմատ չունի:

Մեկնաբանենք (8) բանաձևը գրաֆիկորեն: $\cos x=a$ հավասարման արմատները $y=\cos x$ ֆունկցիայի գրաֆիկի և $y=a$ ուղղի հատման կետերի աբսցիսներն են (նկ. 68): Քանի որ $y=\cos x$ ֆունկցիան 2π-պարբերական է, բավական է գտնել $[-\pi,\pi]$ միջակայքի արմատները և գումարել պարբերությունները:

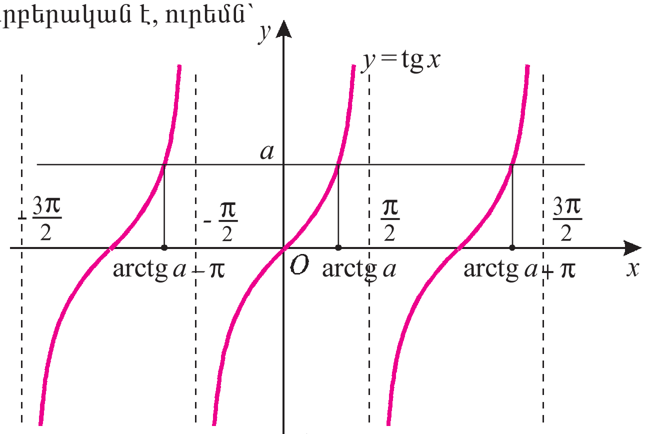


Նկ. 68

Ինչպես տեսնում ենք նկարում, $[-\pi,\pi]$ միջակայում կա երկու արմատ, որոնցից մեկը, որ $[0,\pi]$ միջակայքում է, ($\arccos a$)-ն է, իսկ մյուսը՝ ($-\arccos a$)-ն: Գումարելով պարբերությունները՝ ստանում ենք (8) բանաձևը:

3. $\operatorname{tg} x = a$ հավասարման լուծումը:

Գիտենք, որ յուրաքանչյուր a-ի դեպքում գոյություն ունի միակ թիվ $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ միջակայքում, որի տանգենսն a է, և այդ թիվը $\operatorname{arctg} a$-ն է (տե՛ս նկ. 69): Քանի որ տանգենսը π-պարբերական է, ուրեմն՝



Նկ. 69

$\operatorname{tg} x = a$ *հավասարման լուծումն է՝*

$$x=\operatorname{arctg} a+\pi k,\quad k\in \mathbf{Z}: \qquad (9)$$

Օրինակ 5: Լուծենք $\operatorname{tg} 2x=\sqrt{3}$ հավասարումը:

Համաձայն (9) բանաձևի՝ $2x=\operatorname{arctg}\sqrt{3}+\pi k$, $k\in \mathbf{Z}$: Քանի որ $\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$, ուստի՝ $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}k$, $k\in \mathbf{Z}$:

Պատասխան՝ $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}k$, $k\in \mathbf{Z}$:

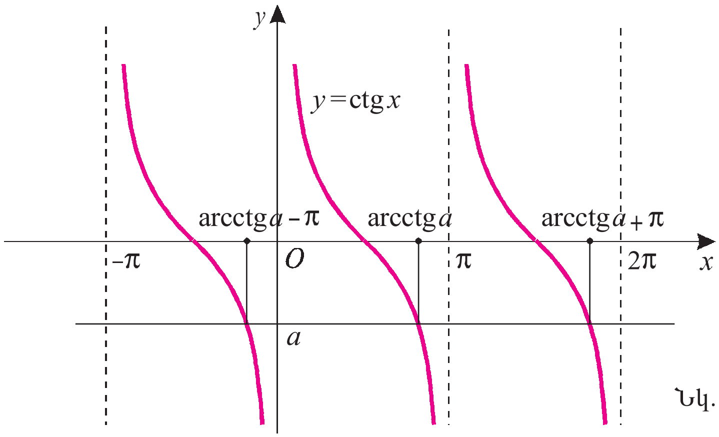
4. $\operatorname{ctg} x = a$ հավասարման լուծումը:

Գիտենք, որ յուրաքանչյուր a-ի դեպքում գոյություն ունի միակ թիվ $(0;\pi)$ միջակայքում, որի կոտանգենսը a է, և այդ թիվը $\operatorname{arcctg} a$-ն է (տե՛ս նկ. 70): Քանի որ կոտանգենսը π-պարբերական է, ուրեմն՝

$\operatorname{ctg} x = a$ *հավասարման լուծումն է՝*

$$x=\operatorname{arcctg} a+\pi k,\quad k\in \mathbf{Z}: \qquad (10)$$

Նշենք նաև, որ երբ $a\neq 0$, $\operatorname{ctg} x=a$ հավասարումը համարժեք է $\operatorname{tg} x=1/a$ հավասարմանը:



Նկ. 70

Օրինակ 6: Լուծենք $\operatorname{ctg}\frac{x}{2}=0$ հավասարումը:

Քանի որ $\operatorname{arcctg}0=\frac{\pi}{2}$, ուստի՝ $\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi k$, որտեղից՝ $x=\pi+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$:

Պատասխան՝ $\pi+2\pi k,\ k\in\mathbf{Z}$:

Օրինակ 7: Լուծենք $\operatorname{ctg}x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ հավասարումը:

Այն համարժեք է $\operatorname{tg}x=-\sqrt{3}$ հավասարմանը, որի լուծումն է՝ $x=-\frac{\pi}{3}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$:

Պատասխան՝ $-\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in\mathbf{Z}$:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Գրեք $\sin x=1$ և $\sin x=-1$ հավասարումների լուծումները:
2. Ո՞րն է $\sin x=a$ հավասարման լուծումը:
3. Ո՞րն է $\sin x=0$ հավասարման լուծումը:
4. Գրեք $\cos x=1$ և $\cos x=-1$ հավասարումների լուծումները:
5. Ո՞րն է $\cos x=a$ հավասարման լուծումը:
6. Ո՞րն է $\cos x=0$ հավասարման լուծումը:
7. Ո՞րոնք են $\operatorname{tg}x=a$ և $\operatorname{ctg}x=a$ հավասարումների լուծումները:

Առաջադրանքներ

Լուծել հավասարումը (314-319).

314. ա) $\sin x=\frac{1}{2}$, բ) $\sin 3x=1$, գ) $2\sin 4x=\sqrt{3}$,
դ) $2\sin x+1=0$, ե) $\sin 3x=0$, զ) $3\sin 2x=2$,
է) $\sin\frac{x}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, ը) $\sin\frac{x}{3}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, թ) $2\sin\frac{x}{5}=-\sqrt{2}$:

315. ա) $\cos x = -1$, բ) $\sqrt{2}\cos 2x - 1 = 0$, գ) $2\cos x - \sqrt{3} = 0$,

դ) $\cos\frac{x}{2} = -\frac{1}{2}$, ե) $2\cos 2x + \sqrt{2} = 0$, զ) $\cos 3x = 0$,

է) $2\cos 4x + \sqrt{3} = 0$, ը) $3\cos x = \sqrt{5}$, թ) $\cos\ \frac{x}{3} = 1$:

316. ա) $\operatorname{tg} x = 1$, բ) $\operatorname{tg} 2x = 3$, գ) $\sqrt{3}\operatorname{tg} 2x = 3$,

դ) $3\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$, ե) $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 0$, զ) $\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{x}{3} + 1 = 0$,

է) $\sqrt{2}\operatorname{tg} x = -2$, ը) $\operatorname{tg} 3x = -1$, թ) $\operatorname{tg} 5x = 7$:

317. ա) $\operatorname{ctg} 2x = 0$, բ) $\operatorname{ctg} 3x = -\sqrt{3}$, գ) $\operatorname{ctg}\frac{x}{2} = 1$,

դ) $\sqrt{3}\operatorname{ctg} 2x + 1 = 0$, ե) $\operatorname{ctg} x = -1$, զ) $\operatorname{ctg} 2x = 2$:

➤**318.** ա) $2\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}$, բ) $2\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{3}$,

գ) $\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 3$, դ) $\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = -1$:

➤**319.** ա) $\cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = -\frac{1}{2}$, բ) $2\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2}\right) = \sqrt{3}$,

գ) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = 1$, դ) $2\cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = \sqrt{2}$:

Կրկնության համար

➤**320.** Ապացուցել, որ երեք հաջորդական թվանշաններով գրված կամայական եռանիշ թիվ բաժանվում է 3-ի:

➤**321.** Ապացուցել, որ $\underbrace{22\cdots2}_{222\text{ հատ}}$ թիվը բաժանվում է 6-ի:

§5. Եռանկյունաչափական հավասարումներ

Հնարավոր չէ դասակարգել բոլոր եռանկյունաչափական հավասարումները և տալ դրանց լուծման եղանակները: Այս պարագրաֆում կքննարկենք եռանկյունաչափական հավասարումների լուծման որոշ եղանակներ:

1) Արտադրիչների վերլուծման եղանակ:

Օրինակ 1: Լուծենք $\sin x - \sin 2x = 0$ հավասարումը:
Կիրառելով $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ նույնությունը՝ ստանում ենք՝

$$\sin x(1 - 2\cos x) = 0$$

հավասարումը: Ուստի՝

$$\left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \cos x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pi k,\ k\in\mathbf{Z}\\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbf{Z}\end{array}\right.:$$

Պատասխան՝ $\pi k,\ \pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\ \ k\in\mathbf{Z}$:

2) $a\ \sin x\ +\ b\ \cos x\ =\ 0$ տեսքի համասեռ հավասարումներ ($ab\neq\ 0$):

Այս հավասարմանը բավարարող x-երի համար $\cos x\neq 0$: Իրոք, եթե $\cos x$-ը զրո է, ապա, տեղադրելով հավասարման մեջ, ստանում ենք, որ $\sin x$-ը ևս զրո է, որը հակասում է $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ նույնությանը: Հետևաբար՝ հավասարման երկու մասերը կարելի է բաժանել $a\cos x$-ի և ստանալ

$$\operatorname{tg} x=-b/a$$

պարզագույն հավասարումը:

Օրինակ 2: Լուծենք $2\sin 2x-3\cos 2x=0$ հավասարումը:

Քանի որ $\cos 2x\neq 0$, տրված հավասարման երկու մասերը բաժանելով $2\cos 2x$-ի ստանում ենք $\operatorname{tg} 2x=1{,}5$, որտեղից՝

$$2x=\operatorname{arctg}1{,}5+\pi k\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{3}{2}+\frac{\pi k}{2},\quad k\in\mathbf{Z}:$$

Պատասխան՝ $\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{3}{2}+\dfrac{\pi k}{2},\ \ k\in\mathbf{Z}$:

3) $a\sin x\ +\ \ b\ \cos x\ =\ c$ տեսքի հավասարումներ ($abc\ \neq\ \ 0$):

Տրված հավասարման երկու մասերը $\sqrt{a^2+b^2}$-ի բաժանելու և φ օժանդակ անկյուն ներմուծելու միջոցով այն բերվում է $\cos(x-\varphi)=\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ հավասարմանը:

Օրինակ 3: Լուծենք $\sin x+\sqrt{3}\cos x=1$ հավասարումը:

Հավասարման երկու մասերը բաժանելով 2-ի՝ ստանում ենք՝

$$\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\frac{1}{2}:$$

Հաշվի առնելով, որ $\dfrac{1}{2}=\sin\dfrac{\pi}{6}$ և $\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\cos\dfrac{\pi}{6}$, ստանում ենք

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$$

հավասարումը, որտեղից՝ $x-\dfrac{\pi}{6}=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\quad k\in\mathbf{Z}$:

Պատասխան՝ $-\dfrac{\pi}{6}+2\pi k;\ \dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ \ k\in\mathbf{Z}$:

4) Նույնական ձևափոխություններով քառակուսային հավասարման բեր-վող հավասարումներ:

Օրինակ 4: Լուծենք $\cos 4x + 2\cos^2 x = 1$ հավասարումը:

Տեղադրելով $\cos 4x$-ի փոխարեն $2\cos^2 2x - 1$, իսկ $2\cos^2 x$-ի փոխարեն՝ $1 + \cos 2x$, ստանում ենք՝

$$2\cos^2 2x + \cos 2x - 1 = 0:$$

Նշանակելով $\cos 2x = t$ և գտնելով ստացված

$$2t^2 + t - 1 = 0$$

քառակուսային հավասարման $t_1 = -1$, $t_2 = \dfrac{1}{2}$ արմատները՝ հանգում ենք հետևյալ համախմբին.

$$\left[\begin{aligned} &\cos 2x = -1 \\ &\cos 2x = \frac{1}{2} \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &2x = \pi + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z} \\ &2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z} \end{aligned}\right.:$$

Պատասխան՝ $\dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ \pm\dfrac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$:

5) $A\ \sin^2 x + B\ \sin x\cos x + C\ \cos^2 x = 0$ տեսքի համասեռ հավասարումներ ($AC \neq 0$):

Հավասարմանը բավարարող x-երի դեպքում $\cos x \neq 0$ (ինչո՞ւ), ուստի հավասարման երկու մասերը կարող ենք բաժանել $\cos^2 x$-ի և ստանալ նրան համարժեք քառակուսային հավասարում $\operatorname{tg} x$-ի նկատմամբ.

$$A\operatorname{tg}^2 x + B\operatorname{tg} x + C = 0:$$

Օրինակ 5: Լուծենք $3\sin x\cos x - 3\cos^2 x = \cos 2x$ հավասարումը:

$$3\sin x\cos x - 3\cos^2 x = \cos 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\sin x\cos x - 3\cos^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x + 3\sin x\cos x - 4\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 x + 3\operatorname{tg} x - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &\operatorname{tg} x = 1 \\ &\operatorname{tg} x = -4 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z} \\ &x = -\operatorname{arctg} 4 + \pi k,\ k \in \mathbf{Z} \end{aligned}\right.:$$

Պատասխան՝ $\dfrac{\pi}{4} + \pi k; -\operatorname{arctg} 4 + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ինչպե՞ս լուծել $a\sin x + b\cos x = 0$ տեսքի հավասարումը:
2. Ինչպե՞ս լուծել $\sin x + \cos x = 1$ հավասարումը:
3. Ինչպե՞ս լուծել $A\sin^2 x + B\sin x\cos x + C\cos^2 x = 0$ տեսքի հավասարումը:

Առաջադրանքներ

Լուծել հավասարումը (322-336).

322. ա) $2\sin^2 x-\sin x=0$, բ) $\sqrt{3}\sin x-\sin 2x=0$,

գ) $\mathrm{tg}^2 x-\mathrm{tg}\, x=0$, դ) $5\cos x=\sin 2x$:

323. ա) $2\sin x+\mathrm{tg}(\pi-x)=0$, բ) $\mathrm{ctg}\dfrac{x}{2}+\cos(\pi-x)=1$,

գ) $\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=\mathrm{ctg}(x+\pi)$, դ) $2\sin x\cos x+4\cos x=\sin x+2$:

324. ա) $\sin x+\cos x=0$, բ) $\sqrt{3}\cos x-\sin x=0$,

գ) $\cos x-2\sin x=0$, դ) $4\cos x+\sin x=0$:

325. ա) $\sin 8x+\sin 2x=0$, բ) $\cos 5x+\cos 9x=0$,

գ) $\sin 7x=\sin(\pi-3x)$, դ) $\cos 6x=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+4x\right)$,

ե) $\sin 9x-\cos x=0$, զ) $\sin 2x+\cos 6x=0$:

➢**326.** ա) $\cos x-\sqrt{3}\sin x=\sqrt{2}$, բ) $\cos 2x+\sin 2x=1$,

գ) $\cos x+\sin(-x)=-\sqrt{2}$, դ) $\mathrm{ctg}4x-\mathrm{ctg}6x=0$:

➢**327.** ա) $\sin(\pi+3x)+\cos(\pi-3x)=\sqrt{1{,}5}$,

բ) $\sin\dfrac{x-3\pi}{2}+\sqrt{3}\cos\dfrac{x+3\pi}{2}=\sqrt{3}$, գ) $\cos 2x+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-2x\right)=\sqrt{2}$:

328. ա) $2\sin^2 x+\sin x-1=0$, բ) $3\sin^2 x-5\sin x-2=0$,

գ) $6\cos^2 x+\cos x-1=0$, դ) $4\cos^2 x-8\cos x+3=0$:

329. ա) $3\mathrm{tg}^2 x+2\mathrm{tg}\, x-1=0$, բ) $2\mathrm{tg}^2 x+3\mathrm{tg}\, x-2=0$,

գ) $\mathrm{tg}\, x-2\mathrm{ctg}\, x+1=0$, դ) $2\mathrm{ctg}\, x-3\mathrm{tg}\, x+5=0$:

330. ա) $2\cos^2 x+5\sin x-4=0$, բ) $\cos 2x+3\sin x=2$,

գ) $\cos 2x-5\sin x-3=0$, դ) $-2+3\cos x=\cos 2x$:

331. ա) $3\sin^2 x-\sin x\cos x=2\cos^2 x$, բ) $2\cos^2 x-3\sin x\cos x+\sin^2 x=0$,

գ) $9\sin x\cos x-7\cos^2 x=2\sin^2 x$, դ) $2\sin^2 x-\sin x\cos x=\cos^2 x$:

➢**332.** ա) $2\sin 2x=6\cos^2 x-1$, բ) $2\sin^2 x-\cos 2x+\sin 2x=0$,

գ) $5\sin x\cos x+1=7\cos^2 x$, դ) $1+3\cos^2 x=5\sin x\cos x$:

333. ա) $\cos 7x\cos 13x=\cos x\cos 19x$, բ) $\sin x\sin 6x=\sin 8x\sin 3x$,

գ) $\sin 5x\cos 3x=\sin 9x\cos 7x$, դ) $\sin x\cos 5x=\sin 2x\cos 4x$:

334. ա) $\cos 4x+\cos 2x=\cos 9x+\cos 3x$,

բ) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x=0$, գ) $\sin 8x-\sin 6x+\sin 4x=\sin 2x$:

335. ա) $\operatorname{tg} 4x \cdot \operatorname{tg} 2x = 1$, բ) $\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x = 0$,

գ) $\operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} x = -3$, դ) $1 + \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x}$:

336. ա) $\operatorname{tg} x - \sin 2x = 0$, բ) $\operatorname{tg} 3x + \cos 6x = 1$,

գ) $6 \operatorname{ctg}^2 x - 4 \cos^2 x = 15$, դ) $2 \operatorname{tg}^4 x - 3 \operatorname{tg}^2 x + 1 = 0$:

Կրկնության համար

337. Յոթ միատեսակ կոմբայններով բրիգադը կարող է դաշտը հնձել 10 օրում:

ա) Քանի՞ օրում կհնձեն դաշտը, եթե աշխատի միայն հինգ կոմբայն:

բ) Քանի՞ օր է անհրաժեշտ դաշտը հնձելու համար, եթե կոմբայններն աշխատեն 60 %-ով պակաս արտադրողականությամբ:

գ) Քանի՞ օրում կավարտվի հունձը, եթե աշխատեն 25 %-ով ավել արտադրողականությամբ:

դ) Եթե կոմբայններն աշխատանքային օրվա կեսն աշխատեն երկու անգամ ավելի արագ, իսկ կեսօրից հետո երկու անգամ ավելի դանդաղ, քանի՞ օրում կավարտվի հունձը:

Առաջադրանքներ դասընթացի կրկնության համար

338. Հաշվել 2 մ, 4 մ, 5 մ կողերով ուղղանկյունանիստի անկյունագիծը՝

ա) մեկ մետր ճշտությամբ,

բ) մեկ դեցիմետր ճշտությամբ,

գ) մեկ սանտիմետր ճշտությամբ:

339. Բաղդատել թվերը.

ա) $\sqrt{2}+\sqrt{7}$ և $\sqrt{3}+\sqrt{6}$, բ) $\sqrt{11}-\sqrt{5}$ և $\sqrt{7}-\sqrt{2}$,

գ) $\left(\sqrt{5}-1\right)^{\frac{3}{4}}$ և $\left(\sqrt{5}-1\right)^{0,76}$, դ) $\left(\sqrt{3}-1\right)^{3,2}$ և $\left(\sqrt{3}-1\right)^{\frac{13}{4}}$:

340. Ապացուցել, որ տրված թիվն իռացիոնալ է.

ա) $\sin 15^\circ$, բ) $\cos 15^\circ$, գ) $\operatorname{tg} 22{,}5^\circ$, դ) $\operatorname{ctg} 22{,}5^\circ$:

➢ **341.** Հերքականությամբ ապացուցել հետևյալ թվերի իռացիոնալությունը.

ա) $\cos\dfrac{\pi}{8}$, բ) $\cos\dfrac{\pi}{16}$, գ) $\cos\dfrac{\pi}{32}$, դ) $\cos\dfrac{\pi}{64}$:

342. Թվային ուղղի վրա A և B կետերի հեռավորությունը A և C կետերի հեռավորության 20 տոկոսն է: Գտնել A-ն, եթե՝

ա) $B=5,\ C=17$, բ) $B=-2,\ C=9$, գ) $B=0,\ C=8$:

343. Թվային ուղղի AB հատվածը 25 տոկոսով մեծացրին՝ միջնակետը թողնելով անշարժ: Գտնել ստացված հատվածը, եթե՝

ա) $AB=[1;5]$, բ) $AB=[-3;9]$, գ) $AB=[0;12]$:

344. Գտնել x-ի դրական արժեքները, որոնց դեպքում $f(x)$-ն ընկած է a թվի ε շրջակայքում.

ա) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1},\ a=1,\ \varepsilon=0{,}1$, բ) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+3},\ a=2,\ \varepsilon=0{,}05$:

345. Գտնել բնական n-երի քանակը, որոնց դեպքում $f(n)$-ը չի պատկանում a թվի ε շրջակայքին.

ա) $f(n)=\dfrac{n}{5n+2},\ a=0{,}2,\ \varepsilon=0{,}01$, բ) $f(n)=\dfrac{3n-2}{n+5},\ a=3,\ \varepsilon=0{,}1$:

346. Պարզեցնել արտահայտությունը.

ա) $\left(\left(\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2+1\right):\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$, բ) $\dfrac{1+\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha}$,

գ) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{\operatorname{ctg}\alpha}$, դ) $\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}+\dfrac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$:

347. Հաշվել արտահայտության արժեքը.

ա) $\operatorname{tg}225^\circ\cdot\cos330^\circ\cdot\operatorname{ctg}120^\circ$, բ) $\operatorname{ctg}\dfrac{5\pi}{3}\cdot\sin\dfrac{3\pi}{4}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{5\pi}{6}\cdot\cos\dfrac{4\pi}{3}$,

գ) $\operatorname{tg}1^\circ\cdot\operatorname{tg}3^\circ\cdot\operatorname{tg}5^\circ\cdot\ldots\cdot\operatorname{tg}89^\circ$, դ) $\operatorname{ctg}2^\circ\cdot\operatorname{ctg}4^\circ\cdot\operatorname{ctg}6^\circ\cdot\ldots\cdot\operatorname{ctg}88^\circ$:

348. Որոշել արտահայտության նշանը.

ա) $0{,}5-\sin\dfrac{7\pi}{8}$, բ) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\cos\dfrac{23\pi}{12}$, գ) $\sin1-\sin2$:

349. Գտնել $\sin2\alpha$ -ն, եթե $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{4}{3}$:

350. Դիցուք $\sin2\alpha=\dfrac{2}{3}$, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$: Հաշվել արտահայտության արժեքը.

ա) $\sin\alpha+\cos\alpha$, բ) $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha$, գ) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$:

➤**351.** Ապացուցել, որ առաջին քառորդի α -ների համար.

ա) $\sin\alpha+\cos\alpha>1$, բ) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha>2$:

➤**352.** Ապացուցել, որ եթե A -ն, B -ն, C -ն եռանկյան անկյուններ են, և $\operatorname{tg}A=\dfrac{4}{3}$, $\operatorname{tg}B=7$, ապա $C=45^\circ$:

➤**353.** Ապացուցել. որ եթե A -ն և B -ն սուրանկյուն եռանկյան անկյուններ են, ապա $\operatorname{tg}A\cdot\operatorname{tg}B>1$:

➤**354.** Ապացուցել, որ եթե A -ն և B -ն բութանկյուն եռանկյան սուր անկյուններ են, ապա $tg\,A\cdot tg\,B<1$:

➤**355.** Գտնել ABC սուրանկյուն եռանկյան անկյունների տանգենսները, եթե հայտնի է, որ $\operatorname{tg}A\cdot\operatorname{tg}B=3$, $\operatorname{tg}B\cdot\operatorname{tg}C=6$:

➤**356.** Եռանկյան անկյուններից մեկը 120° է: Գտնել մյուս երկու անկյունները, եթե հայտնի է, որ նրանց կոսինուսների գումարը $\sqrt{3}$ է:

357. Դիցուք $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$: Գտնել արտահայտության արժեքը.

ա) $\cos2\alpha$, բ) $\cos4\alpha$, գ) $\cos6\alpha$:

358. Դիցուք $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$, $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$: Գտնել արտահայտության արժեքը.

ա) $\sin2\alpha$, բ) $\sin3\alpha$, գ) $\sin4\alpha$,

դ) $\sin\dfrac{\alpha}{2}$, ե) $\cos\dfrac{\alpha}{2}$, զ) $\cos3\alpha$:

359. Ապացուցել նույնությունը.

ա) $\dfrac{2\sin\alpha\cos\beta-\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)+2\sin\alpha\sin\beta}=\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$, բ) $\dfrac{2\cos\alpha\sin\beta+\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-2\cos\alpha\cos\beta}=-\mathrm{tg}(\alpha+\beta)$:

➢**360.** Ապացուցել հավասարությունը.

ա) $\cos\dfrac{\pi}{7}\cos\dfrac{4\pi}{7}\cos\dfrac{5\pi}{7}=\dfrac{1}{8}$, բ) $\dfrac{1}{\sin 10^\circ}-4\sin 70^\circ=2$:

➢**361.** Գտնել, թե $\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$ միջակայքի որ x-երի համար է ճիշտ անհավասարությունը.

ա) $\sin x<\sin\dfrac{3\pi}{5}$, բ) $\cos x>\cos\dfrac{4\pi}{7}$, գ) $\mathrm{tg}\,x>-1$:

Գտնել ֆունկցիայի որոշման տիրույթը (362-363).

362. ա) $y=\dfrac{5}{7}-2\,\mathrm{ctg}\,4x$, բ) $y=\mathrm{tg}\,x+\mathrm{ctg}\,x$:

➢**363.** ա) $y=\sqrt{\sin 2x}+\sqrt{1-2\sin^2 x}$, բ) $y=\sqrt{\cos\pi x}-\sqrt{\sin\pi x}$:

Գտնել ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը (364-365).

364. ա) $y=5\cos^2\dfrac{2x}{3}-2$, բ) $y=\dfrac{3}{8}\mathrm{ctg}^2 x+1$, գ) $y=2{,}5\cdot|\sin 3x|+3$:

365. ա) $y=(x-9)^{3/2}-5$, բ) $y=3^{1-2x^2}$, գ) $y=25\cdot(0{,}2)^{2-x^2}$:

Պարզել, թե հետևյալ ֆունկցիաներից որոնք են զույգ, որոնք՝ կենտ և որոնք՝ ո՛չ զույգ, ո՛չ կենտ (366-367).

366. ա) $y=\sin 3x$, բ) $y=2+x\cos 4x$, գ) $y=3-x\,\mathrm{tg}\,7x$:

367. ա) $y=\dfrac{2+3\cos 2x}{x^2-1}$, բ) $y=\dfrac{x^3}{4-3\sin 3x}$, գ) $y=\dfrac{x^3+\sin 5x}{\mathrm{tg}\,x-1}$:

368. Գտնել ֆունկցիայի հիմնական պարբերությունը.

ա) $y=1-\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$, բ) $y=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+2$, գ) $y=3-\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{5}-x\right)$:

➢**369.** Գտնել ֆունկցիայի նշանապահպանման և մոնոտոնության միջակայքերը.

ա) $y=2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$, բ) $y=2\cos 3x-5$, գ) $y=-\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)$:

Գտնել ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները (370-371).

370. ա) $y=3-4\cos 0{,}7x$, բ) $y=\sin^2 x+\cos 2x$:

371. ա) $y=(\sin x+\cos x)^2$, ➢բ) $y=\sin x+2\cos x$:

372. Հետազոտել ֆունկցիան և կառուցել գրաֆիկը.

ա) $y=2\sin(-x)+1$, բ) $y=4\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$, գ) $y=-\mathrm{tg}\,2x$:

Հաշվել արտահայտության արժեքը (373-375).

373. ա) $\arcsin 1-2\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, բ) $2\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$:

374. ա) $\sin\left(\pi+\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$, բ) $\cos\left(\pi-\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$:

➤**375.** ա) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\arccos\frac{1}{3}\right)$, բ) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\arcsin\frac{1}{4}\right)$:

376. Գտնել արտահայտության թույլատրելի արժեքների բազմությունը.

ա) $\arcsin(2x-1)$, բ) $\arccos\frac{3x-2}{4x+4}$, գ) $\mathrm{arctg}\,\frac{3x^5}{x^2-1}$:

Լուծել հավասարումը (377-385).

377. ա) $2\sin\left(\frac{2x}{5}+\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}=0$, բ) $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\left(\frac{5x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)-1=0$:

378. ա) $\sqrt{3}\sin 4x+\cos 4x=0$, բ) $3\sin x+4\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=0$:

379. ա) $\sqrt{3}\sin 4x+\cos 4x=1$, բ) $3\sin x+4\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=1$:

380. ա) $1+\cos 4x=\sin 3x-\sin x$, բ) $1-\cos 4x=\sin 3x+\sin x$:

381. ա) $\mathrm{tg}\,x+3\,\mathrm{ctg}\,x=4$, բ) $\mathrm{tg}\,x-4\,\mathrm{ctg}\,x=3$:

382. ա) $\cos 2x=3-7\cos(3\pi+x)$, բ) $\sin^4\frac{x}{2}+5\cos x+4=0$:

➤**383.** ա) $2\cos^2 2x-12\cos^2 x+\cos 4x-1=8\sin\left(\frac{5\pi}{2}+2x\right)$,

բ) $2\cos^2 2x-2\cos 4x+4\sin^2 x+2\cos 2x-5=5\cos\left(\frac{5\pi}{2}-2x\right)$:

384. ա) $\cos^2 x-7\sin^2 x=6\sin x\cos x$, բ) $\sin^2 x+9\cos^2 x=5\sin 2x$:

385. ա) $10\sin^2 x-6\sin 2x-11\cos^2 x=1$,

բ) $4\sin^2 x-3\sin x\cos x+5\cos^2 x=3$:

386. Լուծել համակարգը.

ա) $\begin{cases} x-y=1 \\ \cos\pi x+\sqrt{3}=\cos\pi y \end{cases}$, բ) $\begin{cases} y-x=3 \\ \sin\pi x-\sqrt{3}=\sin\pi y \end{cases}$:

Պատասխաններ

1. ա) d և a բ) $b<d<c<a$ գ) 1,7 դ) b ե) 8/5 զ) $-523/5720$ **2.** ա) ձախ, աջ բ) աջ, աջ գ) աջ, աջ **3.** 84, 420 **6.** ա) $34+0{,}251$ բ) 45 գ) $-13+0{,}7$ դ) $-81+0{,}55$ **7.** ա) 11,25 բ) 0,925 գ) 5,08 դ) 1,98 **8.** ա) 5/4 բ) 282/125 գ) 2/125 դ) 29/8 **9.** ա) $0,(1)$ բ) $0{,}1(6)$ գ) $0,(142857)$ դ) $1,(09)$ **10.** ա) $5/12<0{,}42$ բ) $11/15<0{,}74$ գ) $2/9>0{,}2$ դ) $5/6>0{,}83$ **11.** ա) $-5{,}4<49/11<4{,}5$ բ) $-0{,}5<-8/17<0{,}5$ **14.** ա) 2/3 բ) 11/45 գ) 226/45 դ) 52/5 **15.** ա) 0,5 բ) 2 գ) 6 դ) 11,7 **16.** ա) 27 բ) 45 գ) 72 **17.** ա) 12, 24, 36, 48 բ) 21, 42, 63, 84 **19.** ա) 0,138, 0,139 բ) 0,782, 0,783 գ) 0,125, 0,126 դ) 0,245, 0,246 **20.** ա) 0,705, 0,706 բ) 0,656, 0,657 գ) 1,555, 1,556 դ) 1,722, 1,723 **21.** ա) 2,6, 2,7 բ) 2, 2,1 գ) 0,9, 1 դ) 0,6, 0,7 **22.** ա) 6 մ բ) 64 դմ գ) 640 սմ **23.** ա) $|x|=4$ բ) $|x-1|=3$ գ) $|x+2|=5$ դ) $|x|>11$ ե) $|x-13|>7$ **24.** ա) ±4 բ) 4, -2 գ) 3 -7 դ) $(-\infty;-11)\cup(11;\infty)$ ե) $(-\infty;6)\cup(20;\infty)$ **25.** ա) $[3;18]$ բ) $[-1;9]$ գ) $[-8;12]$ **26.** ա) $[17;20]$ բ) $[0;2]$ գ) $[-11;-7]$ **27.** ա) $(2/3;3)$ բ) $(2;4)$ գ) $(4;5)$ դ) $(1;2)$ **31.** ա) 3,14, 3,16 բ) 2,95, 2,97 գ) 2,73, 2,75 դ) 1,98, 2 **32.** ա) 2,12 2,13 բ) 2,04, 2,05 գ) 6,92, 6,93 դ) 4,04, 4,05 **34.** ռացիոնալ **35.** ա) ոչ բ) ոչ գ) այո, օրինակ՝ $\left(\sqrt{2}\right)^2=2$ դ) այո, օրինակ՝ $\left(\sqrt[3]{2}\right)^3=2$ **36.** ա) $a>0$, $b>0$ բ) $a<0$, $b<0$ **39.** ա) 12 բ) 169 գ) 512 դ) 100 **40.** 51/13,..., 76/13 **41.** 8 **42.** ա) 1 բ) 2 գ) 5 կամ 11 **43.** ա) 2 բ) 6 **44.** ա) 6,63 և 6,64 բ) 1,68 և 1,69 գ) 1,77 և 1,78 դ) 0,67 և 0,68 **45.** ա) 10 և 10,1 բ) 6 և 6,1 գ) $-4{,}1$ և -4 դ) -5 և $-4{,}9$ **46.** ա) $\sqrt[4]{3}<\sqrt{2}$ բ) $\sqrt[4]{4}>\sqrt[6]{6}$ գ) $\sqrt{3\sqrt{2}}<\sqrt{5}$ դ) $\sqrt[3]{5^2}>\sqrt[5]{5^3}$ ե) $\sqrt{5}>\sqrt[3]{5}$ զ) $\sqrt[4]{0{,}7}>\sqrt[6]{0{,}7}$ է) $\sqrt{1{,}1}<1{,}1$ ը) $\sqrt[3]{0{,}1}>0{,}1$ **47.** ա) 4 բ) 36 գ) 3 դ) 4 **48.** ա) 3 բ) 3 գ) 1/9 դ) 1/16 **49.** ա) $\sqrt{5}-1$ բ) $-\sqrt{5}-2\sqrt{3}$ գ) $(a+b)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)$ դ) $a^3\left(\sqrt{x}+3\sqrt{z}\right)/(x-9z)$ **50.** ա) $\left(\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{5}+1\right)/2$ բ) $\left(\sqrt[3]{36}+\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{4}\right)/2$ գ) $a\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)/(a+b)$ **54.** ա) $x^{11/20}$ բ) $a^{-1/8}$ գ) $y^{1/2}$ դ) $x^{4/5}$ ե) 1 զ) $b^{-5/12}$ է) $d^{0,29}$ ը) $u+4\sqrt{uv}+4v$ թ) $u-3\sqrt[3]{u^2v}+3\sqrt[3]{uv^2}-v$ **55.** ա) 1,5 բ) 1,5 գ) 1 **58.** ա) մեծ է բ) մեծ է գ) մեծ է դ) փոքր է ե) փոքր է զ) փոքր է է) հավասար է ը) փոքր է **61.** ա) 125 բ) 2 գ) 1/3 դ) 1/25 ե) 49 զ) 8 **62.** ա) x բ) x^2 գ) 1 դ) $\sqrt{x}$ ե) x^2 զ) x^2 **63.** ա) $3^{\sqrt{5}}>9$ բ) $(2/3)^{\sqrt{7}}>8/27$ գ) $7^{-\pi}<1$ դ) $(0{,}5)^{-\sqrt{2}}>1$ ե) $(0{,}2)^{-\sqrt{3}}>5$ զ) $(4/3)^{-\pi}<9/16$ **64.** ա) 2 բ) 2 գ) 3 դ) 3 **65.** ա) $9\cdot9^x$ բ) $8\cdot(0{,}5)^x$ գ) $0{,}01\cdot10^x$ դ) $(1/343)\cdot49^x$ **66.** ա) $(1/486)\cdot24^x$ բ) $19{,}6\cdot(0{,}14)^x$ գ) $315\cdot(1875/343)^x$ դ) $87{,}5\cdot(78{,}4)^x$ **67.** 54 **68.** 238 կամ 298 **69.** ա) $\pi/2$ բ) $\pi/3$ գ) $5\pi/3$ դ) $\pi/18$ ե) $\pi/4$ զ) $2\pi/5$ է) $6\pi/5$ ը) -4π թ) $20\pi/3$ **70.** ա) 360° բ) -180° գ) 36° դ) 108° ե) -105° զ) -5° է) 2250° ը) -1125° **71.** ա) $\pi/2$ ռադ, $\pi/4$ ռադ, $\pi/4$ ռադ բ) $\pi/3$ ռադ, $\pi/3$ ռադ, $\pi/3$ ռադ գ) $\pi/2$ ռադ, $\pi/3$ ռադ, $\pi/6$ ռադ **72.** ա) $\alpha>\beta$ բ) $\alpha<\beta$ գ) $\alpha>\beta$ դ) $\alpha<\beta$ **73.** ա) 110° բ) 36° գ) 126° դ) 50° ե) 180° զ) 180° **74.** ա) $\pi/9$, $7\pi/18$ բ) $3\pi/10$, $2\pi/10$ գ) $2\pi/10$, $3\pi/10$ դ) $\pi/9$, $7\pi/18$ ե) $\pi/9$, $7\pi/18$ զ) $0{,}4\pi$, $0{,}1\pi$ **75.** ա) 10° բ) $1{,}5\pi$ ռադ գ) $0{,}75\pi$ ռադ դ) 170° ե) 350° զ) π ռադ **77.** ա) 1 ռադ բ) 2 ռադ գ) $\pi/4$ դ) $2\pi/5$ ռադ **78.** $-\pi/6$ ռադ և -2π ռադ, -30° և -360° **79.** $\pi/6$ ռադ և 2π ռադ, 30° և 360° **80.** ա) 0,5 բ) π **81.** ա) -1 բ) $-\pi$ **82.** ա) $\left(\sqrt{2}/2;\sqrt{2}/2\right)$

բ) $\left(-\sqrt{2}/2;\sqrt{2}/2\right)$ գ) $\left(\sqrt{2}/2;-\sqrt{2}/2\right)$ դ) $\left(-\sqrt{2}/2;-\sqrt{2}/2\right)$ **83.** ա) $\left(0{,}5;\sqrt{3}/2\right)$ բ) $\left(\sqrt{3}/2;0{,}5\right)$ գ) $\left(-0{,}5;\sqrt{3}/2\right)$ դ) $\left(-\sqrt{3}/2;0{,}5\right)$ **85.** ա) $\sqrt{2}/2$ բ) $-\sqrt{2}/2$ գ) $\sqrt{3}/3$ դ) $-\sqrt{3}/3$ ե) 0,5 զ) 0 **86.**ա) 1 բ) 0 գ) $1+\sqrt{3}$ դ) -1 **87.**ա) 1 բ) $-0{,}5$ գ) -1 դ) $-\sqrt{2}$ **88.**ա) 4 բ) 9 գ) 2 դ) $-1{,}75$ **89.** ա) 2, -2 բ) 3, -3 գ) 3, -1 դ) 8, 2 ե) 3, 2 զ) 3; -2 **90.** ա) $(0;1)$ բ) $(0{,}8;0{,}6)$ գ) $(12/13;5/13)$ դ) $\left(-7/11;-6\sqrt{2}/11\right)$ **91.** ա) $[1;1{,}5)$ բ) $(-5;-4]\cup[-3;\infty)$ **92.** ա) I բ) III գ) ոչ մի քառորդի դ) I ե) IV զ) IV **93.**ա) II բ) III գ) IV դ) I ե) ոչ մի քառորդի զ) IV **94.**ա) II բ) II գ) III դ) III ե) III զ) II **95.** ա) I բ) III գ) II դ) II ե) IV զ) IV **96.** ա) $+$, $-$, $-$, $-$ բ) $-$, $-$, $+$, $+$ գ) $+$, $+$, $+$, $+$ դ) $-$, $+$, $-$, $-$ **97.** ա) $-$ բ) $+$ գ) $-$ դ) $+$ ե) $+$ զ) $+$ **98.** ա) $+$ բ) $-$ գ) $-$ դ) $+$ ե) $-$ զ) $-$ **99.** ա) $-0{,}5$ բ) $0{,}5$ գ) -1 դ) $\sqrt{3}/3$ ե) 1 զ) $\sqrt{3}/3$ **100.** ա) $0{,}5$, $\sqrt{3}/2$, $\sqrt{3}/3$, $\sqrt{3}$ բ) $\sqrt{3}/2$, $-0{,}5$, $-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}/3$ գ) $-\sqrt{3}/2$, $0{,}5$, $-\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}/3$ դ) $-\sqrt{2}/2$, $-\sqrt{2}/2$, 1, 1 ե) $-0{,}5$, $-\sqrt{3}/2$, $\sqrt{3}/3$, $\sqrt{3}$ զ) $\sqrt{2}/2$, $-\sqrt{2}/2$, -1, -1 **101.** ա) 2 բ) 8 գ) 18 **103.** ա) $\sin^2\alpha$ բ) $\operatorname{tg}^2\alpha$ գ) $1/\sin^2\alpha$ դ) $1/\cos^2\beta$ **104.** ա) $\operatorname{ctg}\alpha$ բ) $\operatorname{tg}\alpha$ գ) $\sin\alpha$ դ) $1/\cos^2\alpha$ **105.** ա) $\sin\beta\cos\beta$ բ) $\cos^2\beta$ գ) $1/\sin^2\alpha$ դ) $1/\cos^2\alpha$ **110.** ա) $\sin\alpha=-0{,}6$, $\operatorname{tg}\alpha=-3/4$, $\operatorname{ctg}\alpha=-4/3$ բ) $\cos\alpha=-12/13$, $\operatorname{tg}\alpha=-5/12$, $\operatorname{ctg}\alpha=-2{,}4$ գ) $\sin\alpha=-0{,}6$, $\cos\alpha=-0{,}8$, $\operatorname{ctg}\alpha=4/3$ դ) $\sin\alpha=0{,}96$, $\cos\alpha=0{,}28$, $\operatorname{tg}\alpha=24/7$ **111.** ա) -12 բ) 25 **112.** ա) $-40/41$ բ) $-1{,}875$ **113.** ա) -1 բ) 8 **114.** ա) $4/9$ բ) 3 **115.** ա) $-2/3$, 4 բ) $6/13$ գ) $9/17$, 1 **116.** ա) $(-3/7;1)$ բ) $(-\infty;0{,}6]\cup$ $\cup[1{,}4;\infty)$ գ) $[-5/6;1/8]$ **117.** ա) $\cos\alpha$ բ) $\operatorname{ctg}\alpha$ գ) $\sin\alpha$ դ) $\operatorname{ctg}\alpha$ ե) $\operatorname{tg}\alpha$ զ) $-\sin\alpha$ է) $\cos\alpha$ ը) $-\cos\alpha$ թ) $-\operatorname{ctg}\alpha$ **118.** ա) $-0{,}5$, $-\sqrt{3}/2$, $\sqrt{3}/3$, $\sqrt{3}$ բ) $-\sqrt{2}/2$, $-\sqrt{2}/2$, 1, 1 գ) $-\sqrt{3}/2$, $-0{,}5$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}/3$ դ) $-\sqrt{3}/2$, $0{,}5$, $-\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}/3$ ե) $\sqrt{2}/2$, $\sqrt{2}/2$, 1, 1 զ) $-0{,}5$, $\sqrt{3}/2$, $-\sqrt{3}/3$, $-\sqrt{3}$ **119.** ա) $\operatorname{tg}\alpha$ բ) $-\sin\alpha$ գ) $-\cos\alpha$ դ) $-\cos\alpha$ ե) $-\operatorname{ctg}\alpha$ զ) $\operatorname{ctg}\alpha$ **120.** ա) $-\sin\alpha$ բ) $-\cos\alpha$ գ) $-\operatorname{ctg}\alpha$ դ) $-\operatorname{tg}\alpha$ ե) $\sin\alpha$ զ) $-\operatorname{tg}\alpha$ **121.** ա) $\sin^2 x$ բ) $\sin^2 x$ գ) $\operatorname{tg}^2 x$ դ) $\cos^4 x$ ե) $-\cos^3 x$ զ) $-\operatorname{tg}^3 x$ **122.** ա) 1 բ) 0 գ) 1 դ) 1 **123.** ա) 12 բ) -21 **124.** 9 կմ/ժ **125.** 2 կմ/ժ **126.**ա) $(\cos\alpha+\sin\alpha)\sqrt{2}/2$ բ) $(\cos\alpha-\sin\alpha)\sqrt{2}/2$ գ) $(\cos\alpha-\sin\alpha)\times$ $\times\sqrt{2}/2$ դ) $(\cos\alpha+\sin\alpha)\sqrt{2}/2$ ե) $(1+\operatorname{tg}\alpha)/(1-\operatorname{tg}\alpha)$ զ) $(1-\operatorname{tg}\alpha)/(1+\operatorname{tg}\alpha)$ **127.** ա) $\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)/4$, $\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)/4$, $2-\sqrt{3}$, $2+\sqrt{3}$ բ) $\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)/4$, $\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)/4$, $2+\sqrt{3}$, $2-\sqrt{3}$ գ) $\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)/4$, $-\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)/4$, $-2-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}-2$ դ) $\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)/4$, $-\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)/4$, $\sqrt{3}-2$, $-2-\sqrt{3}$ **129.**ա) $\cos\alpha$ բ) $\sin\alpha$ գ) $\sqrt{3}\sin\alpha$ դ) $\sqrt{2}\sin\alpha$ **130.**ա) $\operatorname{tg}\alpha$ բ) $\operatorname{ctg}\alpha$ **131.**ա) 0,5 բ) 0,5 **135.**ա) -2 բ) 4 **136.**ա) -1 բ) $-0{,}936$ **137.**ա) -2 բ) $2/(n+2)$ **138.**ա) $2\cos\alpha$ բ) $\operatorname{tg}\alpha$ գ) $\cos\alpha$ դ) $-\sin^2\alpha$ ե) $\cos^2\alpha$ զ) $-\cos 2\alpha$ **139.**ա) 0,5 բ) $\sqrt{3}/2$ գ) 1 դ) 1 **140.**ա) $\sqrt{3}/3$ բ) -1 գ) -1 **141.**ա) $\left(6-\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)/4$ բ) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)/4$ գ) $\left(2\sqrt{2}-2-3\sqrt{3}\right)/2$ դ) $\left(10+4\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)/2$ **142.**ա) $(\sin\alpha)/2$ բ) $-2\sin(\alpha/2)$ **143.**ա) $2\sin\alpha$ բ) $\cos 2\alpha$ գ) -1 դ) 2 ե) $2\cos 2\alpha$ **146.** ա) 1 բ) $\cos(\alpha/4)$ գ) $\cos 4\alpha$ **147.** ա) 1 բ) $\operatorname{tg}^2(\alpha/2)$ գ) $\operatorname{tg}\alpha$ դ) $\operatorname{tg}^4\alpha$ **149.** ա) 24 բ) -7 **150.** 12 գ **151.** 16 գ **152.** ա) $\sqrt{2-\sqrt{2}}/2$, $\sqrt{2+\sqrt{2}}/2$, $\sqrt{2}-1$

բ) $\sqrt{2+\sqrt{2}}/2$, $\sqrt{2-\sqrt{2}}/2$, $\sqrt{2}+1$ գ) $\sqrt{2+\sqrt{3}}/2$, $\sqrt{2-\sqrt{3}}/2$, $2+\sqrt{3}$ դ) $\sqrt{2-\sqrt{3}}/2$, $-\sqrt{2+\sqrt{3}}/2$, $\sqrt{3}-2$ **153.** ա) 1 բ) -1 գ) $1-\cos\alpha$ դ) 1 ե) 0,5 զ) 1 **155.** 2/3 **156.** ա) 0,5 բ) 6 **158.** ա) -2 բ) 3 **159.** $4:1$ **160.** $4:1$ **161.** ա) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})/4$ բ) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})/4$ գ) $(\sqrt{2}+1)/4$ դ) 0,25 **162.** ա) $(2+\sqrt{3})/4$ բ) $(2-\sqrt{2})/4$ գ) $\sqrt{2}/4$ դ) $(1-\sqrt{2})/4$ **163.** ա) $(\sqrt{3}-1)/4$ բ) $(\sqrt{3}-1)/4$ գ) $(\sqrt{3}-1)/4$ դ) $(\sqrt{3}-1)/4$ **164.** ա) $2\sin 3\alpha\cos 2\alpha$ բ) $2\sin 3x\cos 5x$ գ) $-2\sin y\sin 2y$ դ) $2\cos 3x\cos x$ **165.** ա) $2\sin 18^\circ\cos 6^\circ$ բ) $-\sqrt{3}\cos(\pi/12)$ գ) $2\sin(3\pi/8)\sin(5\pi/24)$ դ) $2\sin(3\pi/10)\cos(\pi/10)$ **166.** ա) $2\cos(x+\pi/4)\cos(-2x+\pi/4)$ բ) $2\sin(x+y-\pi/4)\times$ $\times\cos(x-y+\pi/4)$ գ) $2\sin(y+\pi/4)\cos(2y-\pi/4)$ դ) $2\sin(-y-2x+\pi/4)\cos(y-2x+\pi/4)$ **167.** ա) 6 բ) 10 **171.** ա) $-\sin 2x/(\cos x\cos 3x)$ բ) $\sin(3x+y)/\cos 3x\cos y$ գ) $-\sqrt{2}/\cos(\pi/12)$ դ) $\sin(\pi/5)/(\cos(4\pi/5)\cos(3\pi/5))$ **172.** ա) $2\cos(\pi/6+x/2)\cos(\pi/6-x/2)$ բ) $2\sin(\pi/6+\alpha)\times$ $\times\cos(\pi/6-\alpha)$ գ) $2\sin(\pi/4-x/2)\cos(\pi/4+x/2)$ դ) $2\sin(\pi/12+2x)\cos(\pi/12-2x)$ ե) $4\sin(\pi/6-\alpha)\cos(\pi/6+\alpha)$ զ) $4\cos(\pi/8+x/2)\cos(\pi/8-x/2)$ **173.** ա) $4\cos x\cos(x/2)\times$ $\times\sin(5x/2)$ բ) $4\sin x\sin 4x\cos 2x$ գ) $4\sin 2x\sin(9x/2)\cos(5x/2)$ դ) $4\cos x\sin(\pi/4+3x)\times$ $\times\cos(\pi/4-4x)$ **174.** 12 կմ/ժ **175.** 10 կմ/ժ, 45 կմ/ժ **180.** $\sin 4\alpha=4\sin\alpha\cos^3\alpha-$ $-4\sin^3\alpha\cos\alpha$, $\cos 4\alpha=8\cos^4\alpha-8\cos^2\alpha+1$ **181.** ա) $\mathrm{ctg}\,\alpha$ բ) $-\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\alpha$ **189.** ա) $(-\infty;-2)\cup$ $\cup(-2;2)\cup(2;\infty)$ բ) $(-\infty;2)\cup(2;3)\cup(3;\infty)$ գ) $(-\infty;2]\cup[5;\infty)$ դ) $(2;\infty)$ **190.** ա) $f(-2)=-2{,}5$, $f(3)=10/3$, $f(1/3)=10/3$ բ) $f(0)=1$, $f(2)=3$, $f(4)=1$ գ) $f(-\pi/12)=0{,}25$, $f(0)=0$, $f(\pi/3)=0{,}75$ դ) $f(-1)=-2$, $f(0)=0$, $f(8)=514$ **191.** ա) $(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;\infty)$ բ) $f(-2)=-11/3$, $f(0{,}5)=14/3$, $f(3)=0{,}5$ գ) այո, այո, ոչ **192.** ա) 1, $-0{,}75$ բ) $(1\pm\sqrt{13})/4$ գ) -1, 0,75 **193.** ա) 32° բ) 5° գ) -40° դ) 50° **194.** $t=(T-32)/1{,}8$ ա) -5° բ) $-17{,}(7)^\circ$ գ) -40° դ) $28{,}(8)^\circ$ **195.** ա) $(-\infty;-3)\cup(-3;-1)\cup(-1;1)\cup(1;3)\cup(3;\infty)$ բ) $(-\infty;2)\cup(2;4)\cup(4;\infty)$ գ) $(2{,}4;\infty)$ դ) $(-\infty;-4{,}5]\cup[2;\infty)$ **196.** ա) $[-1;1]$, $[2;8]$ բ) $[-2;1]$, $[1;4]$ գ) $[-1;2]$, $[-3;1]$ դ) $[-2;\infty)$, $[-1;\infty)$ ե) $(-\infty;3)\cup(3;\infty)$, $(-\infty;2)\cup(2;\infty)$ զ) $(-\infty;-1)\cup(-1;\infty)$, $(-\infty;1)\cup(1;\infty)$ է) R, $[3;\infty)$ ը) $[-5;5]$, $[0;5\sqrt{2}]$ **197.** ա) $(-\infty;-4]\cup[4;\infty)$ բ) $[-6;6]$ գ) $(1;6]$ դ) $(-\infty;-2]\cup[6;8)$ **198.** ա) $S=15t$ բ) $S=54t$ **199.** ա) $V=a^3$ բ) $V=(S/6)^{3/2}$ **200.** ա) $R=2d/3$ բ) $R=\sqrt{3}a/3$ **201.** $S=2R^2$ **202.** $S=x\sqrt{4R^2-x^2}$, $(0;2R)$ **203.** 143 **204.** 91 **207.** ա) ոչ բ) այո գ) ոչ դ) այո **208.** ա) $(0;-9)$, $(1{,}8;0)$ բ) $(0;15)$, $(5;0)$ գ) $(0;-8)$, $(2;0)$, $(-4/3;0)$ դ) $(0;-121)$, $(11;0)$, $(-11;0)$ **209.** ա) $(2;3)$ բ) $(-1;6)$ գ) $(1;-1)$, $(-0{,}4;3{,}2)$ դ) $(-1;1)$, $(2;4)$ **211.** ա) $D=[-1;4]$, $E=[-1;3]$, $f(0)=3$, $f(-1)=f(1)=f(3)=0$, $f(2)=-1$, $(-1;1)\cup(3;4]$, $(1;3)$, 2 բ) $D=[-3;3]$, $E=[-1;2]$, $f(0)=0$, $f(-2)=f(0)=f(2)=0$, $f(-1)=f(3)=-1$, $[-3;-2)\cup(0;2)$, $(-2;0)\cup(2;3]$; 3 **212.** 7681 **213.** 11354 **215.** ա) $(-\infty;1)\cup(1;\infty)$, $1+x^2-$ $-1/(1-x)$ բ) $(-\infty;1)\cup(1;\infty)$, $(1+x^2)/(1-x)$ գ) $(-\infty;1)\cup(1;\infty)$, $(1+x^2)(1-x)$ դ) $(-\infty;1)\cup$ $\cup(1;\infty)$, $1/(1-x)(1+x^2)$ ե) $(-\infty;1)\cup(1;\infty)$, $1+1/(1-x)^2$ զ) $(-\infty;0)\cup(0;\infty)$, $-1/x^2$ է) $(-\infty;0)\cup$ $\cup(0;1)\cup(1;\infty)$, $1-1/x$ ը) R, x^4+2x^2+2 **216.** ա) $[0;1]$ բ) $[-0{,}5;0]$ գ) $[-1;1]$ **217.** ա) $[0;\infty)$,

x բ) R, $|x|$ գ) $[0;\infty)$, $\sqrt[4]{x}$ դ) R, x^4 **218.** ա) $(x-4)^2+5$ բ) $-2(x-1)^2$ գ) $3(x-1)^2-13$ **227.**ա) $a>0$, $b<0$, $c<0$ բ) $a<0$, $b>0$, $c>0$ գ) $a>0$, $b>0$, $c>0$ **229.**ա) $y=x^2+6x+7$ բ) $y=x^2-10x+29$ **230.** ա) 2 բ) 4 **231.** ա) $y=2-5/(x+1)$ բ) $y=0,2+0,8/(x-4)$ գ) $y==1,5+2,5/(x-3)$ **234.**ա) 64250 դր բ) 437500 դր գ) 14 դ) 11 **235.**ա) 20 գ բ) 25 գ) 40 գ դ) 55 գ **236.** Վերևից՝ բ) գ) դ), ներքևից՝ ա) գ) դ), սահմանափակ՝ գ) դ) **237.** Վերևից՝ գ) դ), ներքևից՝ բ) գ) դ), սահմանափակ՝ գ) դ) **238.** ա) Մեծագույն չունի, $y(-1,5)=-8,5$ բ) $y(1)=0$, փոքրագույն չունի գ) $y(2\pi k/3)=15$, $y((\pi+2\pi k)/3)=-15$, $k\in Z$ դ) $y(\pi/2+2\pi k)=-5$, $y(-\pi/2+2\pi k)=-9$, $k\in Z$ ե) $y(0)=3$, $y(\pm 9)=0$ զ) $y(3,5)=1,5$, $y(2)=y(5)=0$ **240.** 45° **241.** 5 սմ, 5 սմ **242.** 5 սմ, 5 սմ **243.** 53 **244.** 47 **248.** ա) π բ) 2 գ) 1 դ) $\pi/8$ ե) 6π զ) 12 **250.** ա) $(-\infty;0]\cup[0,8;\infty)$, 1, $-0,2$ բ) $(-\infty;-2]\cup[2;\infty)$, $\varnothing$ գ) R, -5, -1 դ) $(-\infty;0)\cup(15;\infty)$, -5 ե) $(\sqrt{2/3};\infty)$, 3 զ) $(-\infty;-3)\cup(-3;3)\cup(3;\infty)$, $\varnothing$ **251.** ա) $(-\infty;-4]\cup[4;\infty)$, $(-\infty;-4]\cup\cup[4;\infty)$ բ) $(-\infty;-6]\cup[0;\infty)$, $\varnothing$ գ) R, $\varnothing$ դ) R, R ե) R, 3 զ) $(-\infty;-\sqrt{2})\cup(-\sqrt{2};\sqrt{2})\cup\cup(\sqrt{2};\infty)$, $(-\infty;-\sqrt{2})\cup(-\sqrt{2};\sqrt{2})\cup(\sqrt{2};\infty)$ **255.** ա) կենտ է բ) ոչ զույգ է, ոչ՝ կենտ գ) կենտ է դ) զույգ է ե) զույգ է զ) ոչ զույգ է, ոչ՝ կենտ է) զույգ է ը) ոչ զույգ է, ոչ՝ կենտ թ) զույգ է **256.** ա) զույգ է բ) ոչ զույգ է, ոչ՝ կենտ գ) զույգ է դ) կենտ է ե) ոչ զույգ է, ոչ՝ կենտ զ) ոչ զույգ է, ոչ՝ կենտ **259.** ա) $f\uparrow(-\infty;\infty)$, էքստրեմում չունի բ) $f\downarrow(-\infty;\infty)$, էքստրեմում չունի գ) $f\downarrow(-\infty;0]$, $f\uparrow[0;\infty)$, $x_{min}=0$, $y_{min}=-1$ դ) $f\uparrow(-\infty;0]$, $f\downarrow[0;\infty)$, $x_{max}=0$, $y_{max}=3$ ե) $f\downarrow(-\infty;2]$, $f\uparrow[2;\infty)$, $x_{min}=2$, $y_{min}=0$ զ) $f\uparrow(-\infty;0]$, $f\downarrow[0;\infty)$, $x_{max}=0$, $y_{max}=2$ **260.** ա) $f\uparrow(-\infty;3]$, $f\downarrow[3;\infty)$, $x_{max}=3$, մեծագույն արժեքը՝ 1, փոքրագույն չունի բ) $f\downarrow(-\infty;2)$ և $(2;\infty)$, էքստրեմումի կետեր, մեծագույն և փոքրագույն արժեքներ չունի գ) $f\downarrow(-\infty;-2]$, $f\uparrow[-2;\infty)$, $x_{min}=-2$, մեծագույն արժեք չունի, փոքրագույնը՝ 1 դ) $f\downarrow(-\infty;\infty)$ **261.** ա) $f\uparrow(-\infty;-3)$ և $(-3;\infty)$, էքստրեմումի կետեր, մեծագույն և փոքրագույն արժեքներ չունի բ) $f\uparrow(-\infty;2)$, $f\downarrow(2;\infty)$, էքստրեմումի կետեր, մեծագույն և փոքրագույն արժեքներ չունի գ) $f\uparrow(-\infty;-2]$ և $[0;2]$, $f\downarrow[-2;0]$ և $[2;\infty)$, $x_{max}=-2$, $x_{min}=0$, $x_{max}=2$, մեծագույն արժեքը 4 է, փոքրագույնը՝ չունի դ) $f\downarrow(-\infty;-1]$ և $[0;1]$, $f\uparrow[-1;0]$ և $[1;\infty)$, $x_{min}=-1$, $x_{max}=0$, $x_{min}=1$, մեծագույն արժեք չունի, փոքրագույնը՝ -1 **267.** 72 դետալ, 30 դետալ **268.** 2 կմ, 2,5 կմ **274.** 10, 15 **275.** 18, 15 **276.** ա) $y=(x-5)/2$ բ) $y=\sqrt[3]{x}$ գ) $y=x^3$ դ) $y=(x^2+2)/5$, $x\in[0;\infty)$ **277.** ա) $y=3x+10$, $x\in(-10/3;-3)$ բ) $y=1/\sqrt{x}$, $x\in(0;\infty)$ գ) $y=\sqrt[4]{x}$, $x\in(0;\infty)$ դ) $y=-\sqrt[4]{x}$, $x\in(0;\infty)$ **278.** ա) 4 բ) 0 գ) 2 **279.** ա) $x\in R$ բ) $x\in R$ գ) $x\in[0;\infty)$ դ) $x\in[0;\infty)$ ե) $x\in[0;\infty)$ զ) $x\in(-\infty;0]$ **283.** Համաչափ է $y=x$ ուղղի նկատմամբ, օրինակ՝ $y=7-x$ **284.** 2, 4, 6 **285.** $-1/6$, 2 **286.**[1] ա) $(\pi k;\pi+\pi k)$ բ) $(\pi/2+2\pi k;5\pi/2+2\pi k)$ գ) $(-\pi/2+\pi k;\pi/2+\pi k)$ դ) $(2\pi k;2\pi+2\pi k)$ ե) $(-\pi/2+2\pi k;3\pi/2+2\pi k)$ զ) $(-\pi+2\pi k;\pi+2\pi k)$ **287.**ա) $[2\pi k;\pi+2\pi k]$ բ) $[\pi/2+2\pi k;3\pi/2+2\pi k]$ գ) $(-\pi/2+2\pi k;\pi/2+2\pi k)$ դ) $(-\pi+2\pi k;2\pi k)$

[1] Այսուհետև եռանկյունաչափական առաջադրանքների պատասխաններում ենթադրվում է, որ $k\in\mathbf{Z}$։

ե) $[\pi k;\pi/2+\pi k]$ զ) $[-\pi/4+\pi k;\pi/4+\pi k]$ **288.** ա) $\sin(-15^\circ)$, $\sin 15^\circ$, $\sin 75^\circ$ բ) $\cos 145^\circ$, $\cos 75^\circ$, $\cos 22^\circ$ գ) $\cos(7\pi/5)$, $\cos(-\pi/9)$, $\cos(-\pi/13)$ դ) $\sin(5\pi/3)=\sin(4\pi/3)<\sin(\pi/5)$ **289.** ա) $x_{\max}=5\pi/6+2\pi k$, $y_{\max}=1$, $x_{\min}=-\pi/6+2\pi k$, $y_{\min}=-1$ բ) $x_{\max}=\pi k$, $y_{\max}=1$, $x_{\min}=\pi/2+\pi k$, $y_{\min}=-1$ գ) $x_{\max}=-\pi/2+2\pi k$, $y_{\max}=2$, $x_{\min}=\pi/2+2\pi k$, $y_{\min}=0$ դ) $x_{\max}=\pi/2+\pi k$, $y_{\max}=1$, $x_{\min}=\pi k$, $y_{\min}=0$ **290.** ա) Մեծագույնը՝ 0, փոքրագույնը՝ -2 բ) մեծագույնը՝ 2, փոքրագույնը՝ 0 գ) մեծագույնը՝ 5, փոքրագույնը՝ -1 դ) մեծագույնը՝ 9, փոքրագույնը՝ -1 **293.** 45 **294.** 8, 10, 12 **296.** ա) $tg73^\circ$, $tg43^\circ$, $tg(-50^\circ)$ բ) $ctg13^\circ$, $ctg72^\circ$, $ctg107^\circ$ գ) $ctg(6\pi/5)$, $ctg(2\pi/5)$, $ctg(5\pi/7)$ դ) $tg(-7\pi/9)$, $tg(\pi/7)$, $tg(\pi/9)$ **297.** ա) $(\pi k/2;\pi/2+\pi k/2)$ բ) $(\pi k/2;\pi/2+\pi k/2)$ գ) $[-\pi/2+\pi k;\pi k)$ դ) $[\pi k;\pi/2+\pi k)$ ե) $(-\pi/2+\pi k;\pi k)$ զ) $(\pi k;\pi/2+\pi k)$ **299.** 7 **300.** 21 **302.** ա) 0 բ) π գ) $7\pi/12$ դ) $-\pi/3$ **303.** ա) $2\pi/3$ բ) $\pi/2$ գ) π դ) $-\pi/12$ **304.** ա) Այո բ) այո գ) ոչ **306.** ա) Ոչ բ) ոչ գ) այո **308.** $\pi/2$ **310.** ա) $-\pi/12$ բ) $7\pi/6$ գ) $4\pi/3$ դ) $11\pi/12$ ե) $\pi/6$ զ) $-7\pi/12$ **312.** ա) 6, բ) 1 **313.** ա) $(-2;3)$, $(2;-3)$ բ) $(5;3)$ **314.** ա) $(-1)^k\pi/6+\pi k$ բ) $\pi/6+2\pi k/3$ գ) $(-1)^k\pi/12+$ $+\pi k/4$ դ) $(-1)^{k+1}\pi/6+\pi k$ ե) $\pi k/3$ զ) $(-1)^k\arcsin(2/3)/2+\pi k/2$ է) $(-1)^{k+1}2\pi/3+2\pi k$ ը) $(-1)^k 3\pi/4+3\pi k$ թ) $(-1)^{k+1}5\pi/4+5\pi k$ **315.** ա) $\pi+2\pi k$ բ) $\pm\pi/8+\pi k$ գ) $\pm\pi/6+2\pi k$ դ) $\pm 4\pi/3+4\pi k$ ե) $\pm 3\pi/8+\pi k$ զ) $\pi/6+\pi k/3$ է) $\pm 5\pi/24+\pi k/2$ ը) $\pm\arccos(\sqrt{5}/3)+2\pi k$ թ) $6\pi k$ **316.** ա) $\pi/4+\pi k$ բ) $\mathrm{arctg}\,3/2+\pi k/2$ գ) $\pi/6+\pi k/2$ դ) $\pi/6+\pi k$ ե) $2\pi k$ զ) $-\pi/2+3\pi k$ է) $-\mathrm{arctg}\sqrt{2}+\pi k$ ը) $-\pi/12+\pi k/3$ թ) $\mathrm{arctg}\,7/5+\pi k/5$ **317.** ա) $\pi/4+\pi k/2$ բ) $-\pi/18+\pi k/3$ գ) $\pi/2+2\pi k$ դ) $-\pi/6+\pi k/2$ ե) $-\pi/4+\pi k$ զ) $\mathrm{arctg}(1/2)/2+\pi k/2$ **318.** ա) $5\pi/6+4\pi k$, $-\pi/6+4\pi k$ բ) $(-1)^{k+1}\pi/9-\pi/12+\pi k/3$ գ) πk դ) $-5\pi/3+4\pi k$ **319.** ա) $-\pi/4+\pi k$, $5\pi/12+\pi k$ բ) $2\pi/3+(-1)^{k+1}2\pi/3+2\pi k$ գ) $2\pi k$ դ) πk, $\pi/4+\pi k$ **322.** ա) πk, $(-1)^k\pi/6+\pi k$ բ) πk, $\pm\pi/6+2\pi k$ գ) πk, $\pi/4+\pi k$ դ) $\pi/2+\pi k$ **323.** ա) πk, $\pm\pi/3+2\pi k$ բ) $\pi+2\pi k$, $\pi/2+$ $+2\pi k$ գ) $\pi/2+\pi k$, $(-1)^k\pi/4+\pi k$ դ) $\pm\pi/3+2\pi k$ **324.** ա) $-\pi/4+\pi k$ բ) $\pi/3+\pi k$ գ) $\mathrm{arctg}(1/2)+\pi k$ դ) $-\mathrm{arctg}\,4+\pi k$ **325.** ա) $\pi k/5$, $\pi/6+\pi k/3$ բ) $\pi/4+\pi k/2$, $\pi/14+\pi k/7$ գ) $\pi k/2$, $\pi/10+\pi k/5$ դ) $\pi k/5$ ե) $\pi/20+\pi k/5$, $\pi/16+\pi k/4$ զ) $-\pi/16+\pi k/4$, $\pi/8+\pi k/2$ **326.** ա) $-\pi/12+2\pi k$, $-7\pi/12+2\pi k$ բ) πk, $\pi/4+\pi k$ գ) $3\pi/4+2\pi k$ դ) $\varnothing$ **327.** ա) $13\pi/36+$ $+2\pi k/3$, $-7\pi/36+2\pi k/3$ բ) $\pi+4\pi k$, $\pi/3+4\pi k$ գ) $\pi/8+\pi k$ **328.** ա) $-\pi/2+2\pi k$, $(-1)^k\pi/6+\pi k$ բ) $(-1)^{k+1}\arcsin(1/3)+\pi k$ գ) $\pm 2\pi/3+2\pi k$, $\pm\arccos(1/3)+2\pi k$ դ) $\pm\pi/3+2\pi k$ **329.** ա) $-\pi/4+\pi k$, $\mathrm{arctg}(1/3)+\pi k$ բ) $-\mathrm{arctg}\,2+\pi k$, $\mathrm{arctg}(1/2)+\pi k$ գ) $\pi/4+\pi k$, $-\mathrm{arctg}\,2+$ $+\pi k$ դ) $\mathrm{arctg}\,2+\pi k$, $-\mathrm{arctg}(1/3)+\pi k$ **330.** ա) $(-1)^k\pi/6+\pi k$ բ) $\pi/2+2\pi k$, $(-1)^k\pi/6+\pi k$ գ) $(-1)^{k+1}\pi/6+\pi k$ դ) $2\pi k$, $\pm\pi/3+2\pi k$ **331.** ա) $\pi/4+\pi k$, $-\mathrm{arctg}(2/3)+\pi k$ բ) $\pi/4+\pi k$, $\mathrm{arctg}\,2+\pi k$ գ) $\pi/4+\pi k$, $\mathrm{arctg}(7/2)+\pi k$ դ) $\pi/4+\pi k$, $-\mathrm{arctg}(1/2)+\pi k$ **332.** ա) $\pi/4+\pi k$, $-\mathrm{arctg}\,5+\pi k$ բ) $-\pi/4+\pi k$, $\mathrm{arctg}(1/3)+\pi k$ գ) $\pi/4+\pi k$, $-\mathrm{arctg}\,6+\pi k$ դ) $\pi/4+\pi k$, $\mathrm{arctg}\,4+\pi k$ **333.** ա) $\pi k/12$ բ) $\pi k/2$, $\pi k/9$ գ) $\pi k/4$, $\pi/24+\pi k/12$ դ) πk, $\pi/6+\pi k/3$ **334.** ա) $\pi/6+\pi k/3$, $2\pi k/7$, $2\pi k/5$ բ) $2\pi k/5$, $\pi/2+\pi k$, $\pi+2\pi k$ գ) πk, $\pi/10+\pi k/5$, $\pi/4+\pi k/2$ **335.** ա) $\pm\pi/12+\pi k/2$ բ) πk գ) $\pm\pi/3+\pi k$ դ) $\pi/4+\pi k/2$ **336.** ա) πk, $\pi/4+\pi k/2$

բ) $\pi k/3$, $\pi/12+\pi k/3$ գ) $\pm\pi/6+\pi k$ դ) $\pi/4+\pi k/2$, $\pm\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}/2\right)+\pi k$ **337.**ա) 14 բ) 25 գ) 8 դ) 8 **338.**ա) 7 մ բ) 67 դմ գ) 671 սմ **339.** ա) $\sqrt{2}+\sqrt{7}<\sqrt{3}+\sqrt{6}$ բ) $\sqrt{11}-\sqrt{5}<\sqrt{7}-\sqrt{2}$ գ) $\left(\sqrt{5}-1\right)^{3/4}<\left(\sqrt{5}-1\right)^{0,76}$ դ) $\left(\sqrt{3}-1\right)^{3,2}>\left(\sqrt{3}-1\right)^{13/4}$ **342.**ա) 2, 7 բ) $-4{,}75$, $-1/6$ գ) -2, $4/3$ **343.**ա) $[0{,}5;5{,}5]$ բ) $[-4{,}5;10{,}5]$ գ) $[-1{,}5;13{,}5]$ **344.**ա) $(21;\infty)$ բ) $(137;\infty)$ **345.**ա) 7 բ) 165 **346.** ա) 2 բ) $\operatorname{tg}^2\alpha$ գ) 1 դ) 1 **347.** ա) $-0{,}5$ բ) $-\sqrt{2}/12$ գ) 1 դ) 1 **348.** ա) + բ) − գ) − **349.** 7/9 **350.** ա) $\sqrt{15}/3$ բ) $2\sqrt{15}/9$ գ) 7/9 **355.** $\operatorname{tg}A=1$, $\operatorname{tg}B=3$, $\operatorname{tg}C=2$ **356.** 30°, 30° **357.**ա) 1/9 բ) $-79/81$ գ) $-239/729$ **358.**ա) $-0{,}96$ բ) 0,936 գ) $-0{,}5376$ դ) $3\sqrt{10}/10$ ե) $\sqrt{10}/10$ զ) 0,352 **361.** ա) $(3\pi/5;\pi]$ բ) $[\pi/2;4\pi/7)$ գ) $(3\pi/4;\pi]$
362. ա) $(\pi k/4;\pi/4+\pi k/4)$ միջակայքերի միավորումը բ) $(\pi k/2;\pi/2+\pi k/2)$ միջակայքերի միավորումը
363. ա) $[\pi k;\pi/4+\pi k]$ միջակայքերի միավորումը բ) $[2k;0{,}5+2k]$ միջակայքերի միավորումը **364.** ա) $[-2;3]$ բ) $[1;\infty)$ գ) $[3;5{,}5]$ **365.** ա) $[-5;\infty)$ բ) $(0;3]$ գ) $[1;\infty)$ **366.** ա) կենտ է բ) ոչ զույգ է, ոչ՝ կենտ գ) զույգ է **367.** ա) զույգ է բ) ոչ զույգ է, ոչ՝ կենտ գ) ոչ զույգ է, ոչ՝ կենտ **368.** ա) 2π բ) 2π գ) π **369.** ա) դրական է $(\pi/4+2\pi k;5\pi/4+2\pi k)$ միջակայքերի միավորման վրա, բացասական՝ $(-3\pi/4+2\pi k;\pi/4+2\pi k)$ միջակայքերի միավորման վրա, $\uparrow[-\pi/4+2\pi k;3\pi/4+2\pi k]$, $\downarrow[3\pi/4+2\pi k;7\pi/4+2\pi k]$ բ) բացասական է, $\uparrow[-\pi/3+2\pi k/3;2\pi k/3]$, $\downarrow[2\pi k/3;\pi/3+2\pi k/3]$ գ) դրական է $(\pi/3+\pi k;5\pi/6+\pi k)$ միջակայքերի միավորման վրա, բացասական՝ $(-\pi/6+\pi k;\pi/3+\pi k)$ միջակայքերի միավորման վրա, $\uparrow(-\pi/6+\pi k;5\pi/6+\pi k)$ **370.** ա) 7, -1 բ) 1, 0 **371.** ա) 2, 0 բ) $\sqrt{5}$, $-\sqrt{5}$ **373.** ա) $-\pi$ բ) $23\pi/12$ **374.** ա) $-\sqrt{2}/2$ բ) $-0{,}5$ **375.** ա) $-1/3$ բ) $-0{,}25$ **376.** ա) $[0;1]$ բ) $(-\infty;-6]\cup[-2/7;\infty)$ գ) $(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;\infty)$ **377.**ա) $5\pi k$, $5\pi k+5\pi/6$ բ) $2\pi k/5$ **378.**ա) $5\pi/24+\pi k/4$ բ) $\pi/2+\operatorname{arctg}(0{,}75)+\pi k$ **379.** ա) $\pi/6+\pi k/2$, $\pi k/2$ բ) $\pm\arccos(0{,}2)+$ $+\operatorname{arctg}(0{,}75)+2\pi k$ **380.**ա) $\pi/4+\pi k/2$, $-\pi/2+2\pi k$, $(-1)^k\pi/6+\pi k$ բ) $\pi k/2$, $(-1)^k\pi/6+\pi k$ **381.**ա) $\pi/4+\pi k$, $\operatorname{arctg}3+\pi k$ բ) $-\pi/4+\pi k$, $\operatorname{arctg}4+\pi k$ **382.** ա) $\pm2\pi/3+2\pi k$ բ) $\pi+2\pi k$ **383.** ա) $\pm\pi/3+\pi k$, բ) $(-1)^{k+1}\pi/12+\pi k/2$ **384.** ա) $-\pi/4+\pi k$, $\operatorname{arctg}(1/7)+\pi k$ բ) $\pi/4+\pi k$, $\operatorname{arctg}9+\pi k$ **385.** ա) $\operatorname{arctg}2+\pi k$, $-\operatorname{arctg}(2/3)+\pi k$ բ) $\pi/4+\pi k$, $\operatorname{arctg}2+\pi k$ **386.** ա) $(7/6+2k;1/6+2k)$, $(5/6+2k;-1/6+2k)$ բ) $\left((-1)^k/3+k,(-1)^k/3+k+3\right)$

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Գեղամ Գրիգորի Գևորգյան,
Արթուր Արտուշի Սահակյան

Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր

Հանրակրթական դպրոցի
10 -րդ դասարանի դասագիրք
(ընդհանուր և հումանիտար հոսքերերի համար)

Հաստատված է Կրթության և գիտության նախարարության կողմից

Տպագրված է «Էդիթ Պրինտ» ՍՊԸ սպարանում:
Թուղթը՝ օֆսեթ: Չափսը՝ 70x100 1/16: Տպագրական 8.5 մամուլ:
Տպաքանակը՝

ԷԴԻԹ ՊՐԻՆՏ
հրատարակչություն
Թումանյան 12, 3,
(37410) 52 08 48
56 08 41
info@editprint.am