Գ. Գ. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ
Ա. Ա. ՍԱՀԱԿՅԱՆ

ՀԱՆՐԱՀԱՇԻՎ
և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր

(բնագիտամաթեմատիկական հոսքի համար)

Երևան
Տիգրան Մեծ
2009

Հաստատված է ՀՀ Կրթության և գիտության նախարարության կողմից
Approved by the Ministry of Education and Science of RA

ՀՏԴ 373.167.1:512(075)
ԳՄԴ 22.14 g72
Գ 477

Գևորգյան Գ.Գ., Սահակյան Ա.Ա.
Գ 477 Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր: Ավագ դպրոցի 10-րդ դասարանի դասագիրք (բնագիտամաթեմատիկական հոսքի համար).- Եր.: Տիգրան Մեծ, 2009.- 208 էջ:

Մասնագիտական խմբագիր՝ Է. Այվազյան
Խմբագիր՝ Ա. Ոսկանյան
Համակարգչային աշխատանքները՝ Ն. Գևորգյանի
Կազմի ձևավորումը՝ Ա. Օհանջանյանի

ԳՄԴ 22.14g72

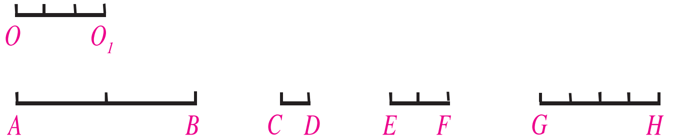
ISBN 978-99941-0-314-0

1ին ԳԼՈՒԽ

Իրական թվեր

§1. Բնական, ամբողջ և ռացիոնալ թվեր

Մեր ծանոթությունը թվերին սկսվել է ***բնական թվերից***՝ 1, 2, 3, …: Դրանք օգտագործել ենք հաշվելու և համարակալելու համար: Հետո զգացվել է կոտորակների անհրաժեշտությունը: Դիտարկենք, օրինակ, հատվածների երկարությունների չափման խնդիրը, չափենք նկ. 1-ում պատկերված AB, CD, EF, GH հատվածների երկարությունները, չափման միավոր վերցնելով OO_1 հատվածը. $OO_1=1$ միավորի:



Նկ. 1

AB հատվածը երկու անգամ երկար է OO_1-ից, ուրեմն՝ $AB=2$:

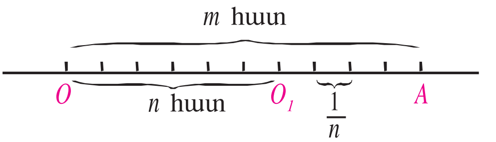
CD հատվածը երեք անգամ կարճ է OO_1-ից, ուրեմն՝ $CD=\frac{1}{3}$:

EF հատվածը երկու անգամ երկար է CD-ից, ուրեմն՝ $EF=\frac{2}{3}$:

GH հատվածը չորս անգամ երկար է CD-ից, ուրեմն՝ $GH=\frac{4}{3}$:

Այսպիսով՝ արդեն չափման պարզագույն խնդիրներում առաջանում է կոտորակների ներմուծման անհրաժեշտություն: Հիշենք, որ կոտորակները $\frac{m}{n}$ տեսքի թվերն են, որտեղ m-ը և n-ը բնական թվեր են: Բնական թվերը նույնպես կոտորակներ են՝ $1=\frac{1}{1}$, $5=\frac{5}{1}$, $4=\frac{8}{2}$, $11=\frac{1518}{138}$ և այլն:

Կամայական $\frac{m}{n}$ կոտորակի համար կարող ենք նշել հատված, որի երկարությունը $\frac{m}{n}$ է: Դրա համար բավական է OO_1 հատվածը բաժանել n հավասար մասի և ստացված հատվածը (մեկ մասը, որի երկարությունը $\frac{1}{n}$ է) ուղղի որևէ կետից սկսած դեպի աջ տեղադրել m անգամ (նկ. 2): Ստացված OA հատվածի երկարությունը կլինի $\frac{m}{n}$:



Նկ. 2

Վեցերորդ դասարանում դուք ծանոթացել եք բացասական ամբողջ թվերին և բացասական կոտորակային թվերին: Հիշեցնենք, որ բնական թվերը, նրանց հակադիր թվերը և զրոն կազմում են ***ամբողջ թվերի*** բազմությունը:

Դրական ու բացասական կոտորակային թվերը և զրոն կազմում են ***ռացիոնալ թվերի*** բազմությունը:

Յուրաքանչյուր ռացիոնալ թիվ կարելի է ներկայացնել $\frac{p}{q}$ տեսքով, որտեղ p-ն ամբողջ թիվ է, իսկ q-ն՝ բնական: Ռացիոնալ թվերը կարելի է պատկերել թվային ուղղի վրա:

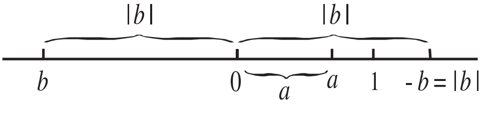
Թվային ուղիղ են անվանում այն ուղիղը, որի վրա նշված է երկու կետ, որոնցից մեկը համապատասխանում է 0 թվին, մյուսը՝ 1 թվին:

0-ի և 1-ի միջև հեռավորությունը համարվում է չափման միավոր: Դրական ռացիոնալ a թիվը պատկերվում է 0-ից a միավոր հեռու կետով, նույն կողմում, ինչ որ 1-ը (նկ. 3):

Բացասական ռացիոնալ b թիվը պատկերվում է հակադիր կողմում՝ 0-ից $|b| = -b$ հեռավորությամբ: Այսպիսով՝ հակադիր ռացիոնալ թվերը թվային ուղղի վրա պատկերվում են 0-ի տարբեր կողմերում, 0-ից նույն հեռավորությամբ (նկ. 3):

Ընդունված է թվային ուղիղը պատկերել հորիզոնական գծով և 1-ը պատկերել 0-ից աջ: Այս պայմանով դրական թվերը պատկերվում են զրոյից աջ, իսկ բացասականները՝ զրոյից ձախ: Զրոն բաժանում է դրական թվերի և բացասական թվերի բազմությունները: Առհասարակ՝ եթե $a > b$, ապա a-ն թվային ուղղի վրա b-ից աջ է:

Նկատենք, որ ռացիոնալ թվերը չեն «լցնում» թվային ուղիղը, քանի որ, ինչպես գիտենք, կան հատվածներ, որոնց երկարությունը չի արտահայտվում ռացիոնալ թվով (օրինակ՝ միավոր կողմով քառակուսու անկյունագիծը):



Նկ. 3

Հետևաբար՝ թվային ուղղի բոլոր կետերը ներկայացնելու համար պետք են նոր, ոչ ռացիոնալ թվեր:

Բնական թվերի բազմությունն ընդունված է նշանակել $\mathbf{N}$ տառով, ամբողջ թվերի բազմությունը՝ $\mathbf{Z}$-ով, իսկ ռացիոնալ թվերինը՝ $\mathbf{Q}$-ով: Պարզ է, որ $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$: Երբեմն դրական ռացիոնալ թվերի բազմությունը (կոտորակների բազմությունը) նշանակում են $\mathbf{Q}_+$-ով, իսկ բացասական ռացիոնալ թվերի բազմությունը՝ $\mathbf{Q}_-$-ով: Դրական ամբողջ թվերի (բնական թվերի), բացասական ամբողջ թվերի, ոչ բացասական ամբողջ թվերի համար օգտագործում են համապատասխանաբար $\mathbf{Z}_+$, $\mathbf{Z}_-$ և $\mathbf{N}_0$ նշանակումները:

Այս նշանակումներով ճշմարիտ են հետևյալ առնչությունները.

$$\mathbf{N} = \mathbf{Z}_+, \quad \mathbf{Z} = \mathbf{Z}_+ \cup \{0\} \cup \mathbf{Z}_-, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{Q}_+ \cup \{0\} \cup \mathbf{Q}_-$$

$$\mathbf{Q}_+ = \left\{\frac{m}{n}; m, n \in \mathbf{N}\right\}, \qquad \mathbf{Q} = \left\{\frac{p}{q}; p \in \mathbf{Z},\ q \in \mathbf{N}\right\}:$$

Օգտվելով այս նշանակումներից, կարող ենք, օրինակ,

ա) 3 մնացորդով 7-ի բաժանվող բնական թվերի բազմությունը ներկայացնել այսպես. $\{7n+3;\ n \in \mathbf{N}_0\}$,

բ) ամբողջ թվի 5 աստիճան հանդիսացող թվերի բազմությունը ներկայացնել այսպես. $\{n^5;\ n \in \mathbf{Z}\}$:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ո՞ր թվերն են օգտագործում հաշվելու և համարակալելու համար:
3. Ո՞ր թվերից է կազմված ամբողջ թվերի բազմությունը:
4. Ո՞ր թվերից է կազմված ռացիոնալ թվերի բազմությունը:
5. Ի՞նչն է կոչվում թվային ուղիղ:
6. Թվային ուղղի վրա ի՞նչն է համարվում չափման միավոր:
7. Թվային ուղղի վրա 0-ի ո՞ր կողմում են պատկերվում դրական և ո՞ր կողմում բացասական թվերը:
8. Ռացիոնալ թվերը «լցնո՞ւմ» են արդյոք թվային ուղիղը:
9. Ո՞ր բազմություններն են նշանակում $\mathbf{N}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Z}$ տառերով:

Առաջադրանքներ

1. Օգտվելով $\mathbf{N}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Z}$ և այլ նշանակումներից՝ բանաձևերով գրել.

   ա) բնական զույգ թվերի բազմությունը,

բ) բնական կենտ թվերի բազմությունը,

գ) առանց մնացորդի 5-ի բաժանվող բնական թվերի բազմությունը,

դ) առանց մնացորդի 7-ի բաժանվող ամբողջ թվերի բազմությունը,

ե) 2 մնացորդով 6-ի բաժանվող բնական թվերի բազմությունը,

զ) 32 մնացորդով 142-ի բաժանվող բնական թվերի բազմությունը,

է) առանց մնացորդի 2-ի և 3-ի բաժանվող ամբողջ թվերի բազմությունը,

ը) առանց մնացորդի 15-ի և 25-ի բաժանվող ամբողջ թվերի բազմությունը,

թ) այն բնական թվերի բազմությունը, որոնք 6-ի և 7-ի բաժանվում են 3 մնացորդով,

ժ) այն բնական թվերի բազմությունը, որոնք 9-ի և 15-ի բաժանվում են 2 մնացորդով,

ժա) ամբողջ թվի խորանարդ հանդիսացող թվերի բազմությունը,

ժբ) ռացիոնալ թվի քառակուսի հանդիսացող թվերի բազմությունը,

ժգ) 14 հայտարարով կոտորակների բազմությունը,

ժդ) 15 հայտարարով ռացիոնալ թվերի բազմությունը:

2. Թվային ուղղի վրա պատկերել $a=1{,}6$, $b=-1{,}7$, $c=14/11$, $d=-20/13$ թվերը և կատարել հետևյալ առաջադրանքները:

ա) Տրված թվերից որո՞նց միջև է c-ն:

բ) Տրված թվերը դասավորել աճման կարգով:

գ) Հաշվել $|b|$-ի արժեքը:

դ) Տրված թվերից ո՞րն է բացարձակ արժեքով ամենամեծը:

ե) a-ն ներկայացնել սովորական կոտորակով:

զ) Գտնել տրված թվերի միջին թվաբանականը:

3. Թվային ուղղի վրա 0-ի ո՞ր կողմում են $(-a)$-ն և $|a|$-ն, եթե`

ա) a-ն դրական է, բ) a-ն բացասական է, գ) $(-a)$-ն դրական է:

4. Գտնել երկու բնական թիվ, որոնց գումարը 504 է, իսկ ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը` 84:

Կրկնության համար

5. Ապացուցեք, որ երեք հաջորդական բնական թվերի գումարը բաժանվում է 3-ի, իսկ արտադրյալը` 6-ի:

6. Օգտվելով նախորդ խնդրից, ցույց տվեք, որ եթե n-ը երկուսից մեծ բնական թիվ է, ապա 2^n-1 և 2^n+1 թվերից մեկը բաղադրյալ է:

7. Ապացուցեք, որ կամայական բնական n-ի դեպքում $(n-1)n(2n-1)$-ը բաժանվում է 6-ի:

§ 2. Ռացիոնալ թվերի գրառումը տասնորդական կոտորակներով

Բնական թվերը սովորաբար գրառում ենք տասական համակարգում: Այդ նպատակով օգտագործում ենք 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 թվանշանները: Բնական թվի տասական գրելաձևը դիրքային է՝ այստեղ կարևոր է թվի գրության մեջ թվանշանի դիրքը:

Օրինակ՝ 3534 թվի գրության մեջ երկու անգամ հանդիպող 3 թվանշաններից առաջինը նշանակում է $3\cdot10^3$, իսկ երկրորդը՝ $3\cdot10^1$: Այս թիվը բացված տեսքով (կարգային գումարելիների գումարի տեսքով) գրվում է այսպես՝

$$3534 = 3\cdot10^3 + 5\cdot10^2 + 3\cdot10^1 + 4\cdot10^0 :$$

Առհասարակ, եթե a բնական թիվը գրվում է $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ թվանշաններով նշված հերթականությամբ՝ $a = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$, ապա

$$a = a_n\cdot10^n + a_{n-1}\cdot10^{n-1} + \cdots + a_1\cdot10 + a_0 :$$

Դրական տասնորդական կոտորակները ներկայացվում են բնական թվի և 1-ից փոքր ոչ բացասական տասնորդական կոտորակի գումարով:

Դիցուք, a-ն 1-ից փոքր դրական տասնորդական կոտորակ է՝ a_1, a_2, …, a_n տասնորդական նիշերով, այսինքն՝ $a = \overline{0,a_1a_2\cdots a_n}$: Այդ դեպքում

$$a = a_1\cdot10^{-1} + a_2\cdot10^{-2} + \cdots a_n\cdot10^{-n} = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} :$$

Աջ մասի գումարը բերելով ընդհանուր հայտարարի՝ կստանանք m/n տեսքի մի կոտորակ՝

$$a = \frac{a_1\cdot10^{n-1} + a_2\cdot10^{n-2} + \cdots + a_n}{10^n} = \frac{\overline{a_1a_2\cdots a_n}}{10^n} :$$

Հետևաբար՝ ամեն մի վերջավոր տասնորդական կոտորակ գրվում է սովորական կոտորակի տեսքով, այսինքն՝ վերջավոր տասնորդական կոտորակները ռացիոնալ թվեր են: Օրինակ՝ $0{,}12 = \frac{12}{100}$; $1{,}3 = 1\frac{3}{10}$ և այլն:

$$\begin{array}{r|l} -\mathbf{3}0 & \mathbf{8} \\ \underline{24} & \overline{0{,}375} \\ -60 & \\ \underline{56} & \\ -40 & \\ \underline{40} & \\ 0 & \end{array}$$

Այժմ փորձենք սովորական կոտորակները գրել տասնորդական կոտորակի տեսքով: $\frac{m}{n}$ դրական ռացիոնալ թիվը տասնորդական կոտորակի տեսքով գրելու համար m-ը անկյունաձև բաժանում են n-ի: Օրինակ՝ $\frac{3}{8}$-ն տասնորդական կոտորակի տեսքով գրելու համար 3-ն անկյունաձև բաժանում ենք 8-ի և ստանում $0{,}375$: Եթե նույն բանն անենք $\frac{1}{3}$-ի հետ, բաժանումը չի ավարտվի: Ասվածը մեկնաբանենք թվային ուղղով: Նախ գտնենք երկու ամբողջ թիվ, որոնց միջև $\frac{1}{3}$ կոտորակն է`

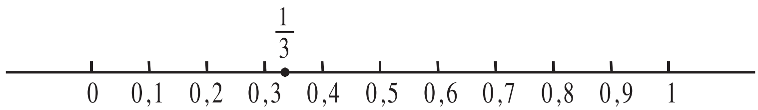
$$\begin{array}{r|l} -10 & 3 \\ \underline{9} & 0{,}333\ldots \\ -10 & \\ \underline{9} & \\ -10 & \\ 9 & \end{array}$$

$$0<\frac{1}{3}<1:$$

Ապա $[0;1]$ հատվածը բաժանենք տասը հավասար մասի և դիտարկենք

$$0<0{,}1<0{,}2<0{,}3<0{,}4<0{,}5<0{,}6<0{,}7<0{,}8<0{,}9<1$$

թվերը: $\frac{1}{3}$ -ը դրանցից երկուսի` $0{,}3$-ի և $0{,}4$-ի միջև է (նկ. 4):

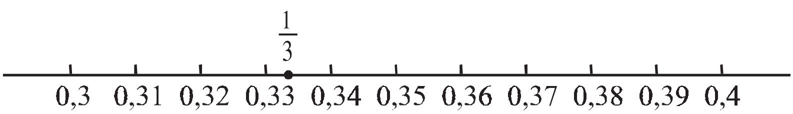


Նկ. 4

Այժմ $[0{,}3;0{,}4]$ հատվածը բաժանելով տասը հավասար մասի`

$$0{,}3<0{,}31<0{,}32<\cdots<0{,}39<0{,}4,$$

կտեսնենք, որ $\frac{1}{3}$ -ը $0{,}33$-ի և $0{,}34$-ի միջև է (նկ. 5):



Նկ. 5

Շարունակելով այս գործընթացը` կստանանք`

$$0{,}333<\frac{1}{3}<0{,}334,$$

$$0{,}3333<\frac{1}{3}<0{,}3334,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ :$$

Փաստորեն, $0{,}3$-ը $\frac{1}{3}$-ի մոտավոր արժեքն է տասնորդականի ճշտությամբ, $0{,}33$-ը` հարյուրերորդականի ճշտությամբ, $0{,}333$-ը` հազարերորդականի, և այլն: m-րդ քայլում ստացված

$$0,\underbrace{333...33}_{m \text{ նիշ}} \text{ և } 0,\underbrace{333...34}_{m \text{ նիշ}}$$

տասնորդական կոտորակները $\frac{1}{3}$-ի ***պասնորդական մոպարկումներն են*** $\mathbf{10^{-m}}$ ***ճշպությամբ***, այսինքն՝ $\frac{1}{3}$-ն այդ տասնորդական կոտորակներով փոխարինելիս մեր սխալը չի գերազանցում 10^{-m}-ը: Ընդ որում, $0,\underbrace{333...33}_{m}$-ը մոտավորություն է ***պակասորդով***, իսկ $0,\underbrace{333...34}_{m}$-ը՝ ***հավելուրդով***: Այսինքն՝

$$\frac{1}{3} < 0,\underbrace{33...34}_{m \text{ նիշ}} < \frac{1}{3} + 10^{-m} \quad \text{և} \quad \frac{1}{3} - 10^{-m} < 0,\underbrace{33...33}_{m \text{ նիշ}} < \frac{1}{3}:$$

Հետևաբար՝ ստորակետից հետո ինչքան շատ նիշ գրվի, այնքան ստացված տասնորդական կոտորակի արժեքը մոտ կլինի $\frac{1}{3}$-ին: Այս դեպքում բնական է $\frac{1}{3}$-ը գրել որպես անվերջ տասնորդական կոտորակ՝

$$\frac{1}{3} = 0,333...:$$

Այսպիսով՝ $\frac{1}{3}$-ի տասնորդական գրության մեջ ստորակետից հետո անվերջ կրկնվում է 3 թվանշանը: Այս փաստը գրառում են այսպես.

$$\frac{1}{3} = 0,(3):$$

Եթե $\frac{52}{185}$-ը գրենք տասնորդական կոտորակով, կստանանք $0,2810810810...$: Այս դեպքում ստորակետից հետո երկրորդ նիշից սկսած անվերջ կրկնվում է 810-ը: Հետևաբար՝

$$\frac{52}{185} = 0,2(810):$$

Դիտարկված երկու օրինակում ստացանք, որ $\frac{1}{3}$ և $\frac{52}{185}$ սովորական կոտորակները գրվում են ***անվերջ պարբերական պասնորդական կոպորակի*** տեսքով:

Եթե $\frac{p}{q}$ կոտորակը, որտեղ $p \in \mathbf{N}$, $q \in \mathbf{N}$, չի գրվում վերջավոր տասնորդական կոտորակի տեսքով, ապա p-ն q-ի բաժանելու գործընթացն անվերջ շարունակվում է: Բաժանելիս ստացված յուրաքանչյուր մնացորդ կարող է լինել $1, 2, \ldots, (q-1)$ թվերից որևէ մեկը: Հետևաբար՝ ստացված մնացորդները չեն կարող միշտ լինել իրարից տարբեր, ամենաշատը q քայլ հետո մնացորդը կկրկնվի, և տասնորդական կոտորակի գրառման մեջ թվանշանների մի խումբ (կամ մի թվանշան) կսկսի կրկնվել, այսինքն՝ կստանանք անվերջ պարբերական տասնորդական կոտորակ: Օրինակ՝

$$\frac{23}{99}=0,(23); \quad \frac{203}{165}=1,2(30); \quad \frac{3}{7}=0,(428571):$$

Յուրաքանչյուր ռացիոնալ թիվ գրվում է վերջավոր տասնորդական կոտորակի կամ անվերջ պարբերական տասնորդական կոտորակի տեսքով:

Նկատենք նաև, որ

յուրաքանչյուր անվերջ պարբերական տասնորդական կոտորակ որոշակի ռացիոնալ թվի տասնորդական գրառումն է:

Տեսնենք, թե ո՞ր ռացիոնալ թիվն է $0,(12)$ անվերջ պարբերական տասնորդական կոտորակը: Ակնհայտ է, որ այդ թիվը՝ 0,1212121212...-ը, հավասար է

$$\frac{12}{100}+\frac{12}{10000}+\frac{12}{1000000}+\cdots$$

անվերջ գումարին, որը $\frac{12}{100}$ առաջին անդամով և $\frac{1}{100}$ հայտարարով անվերջ նվազող երկրաչափական պրոգրեսիայի գումարն է: Հետևաբար՝

$$0,(12)=\frac{\frac{12}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{12}{99}=\frac{4}{33}:$$

Հաշվի առնելով, որ վերջավոր տասնորդական կոտորակին աջից զրո կցագրելիս թիվը չի փոխվում, վերջավոր տասնորդական կոտորակը նույնպես կարելի է համարել անվերջ պարբերական տասնորդական կոտորակ, որտեղ 0-ն է պարբերության մեջ: Նկատենք, որ վերջավոր տասնորդական կոտորակը կարելի է գրել նաև այնպիսի անվերջ պարբերական տասնորդական կոտորակով, որտեղ ինը թվանշանն է պարբերության մեջ: Օրինակ՝ $1=0,(9)$; $0,15=0,14(9)$ և այլն:

Գործնական կիրառություններում անվերջ տասնորդական կոտորակով ներկայացվող թիվը մոտավոր ներկայացնում են վերջավոր տասնորդական կոտորակով: Ամեն անգամ թողնում են այնքան տասնորդական նիշ, որ սխալը լինի թույլատրելի: Մենք բազմիցս կկիրառենք այս մոտեցումը:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Բնական թվերը տասական համակարգում գրառելու համար ո՞ր թվանշաններն են օգտագործում:
2. Կարևո՞ր է արդյոք թվանշանի տեղը թվի գրության մեջ: Բերեք համապատասխան օրինակ:
3. Ինչպե՞ս է $\overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0}$ թիվը գրվում կարգային գումարելիների գումարի տեսքով:
4. Ամեն մի վերջավոր տասնորդական կոտորակ գրվո՞ւմ է արդյոք սովորական կոտորակի տեսքով:
5. Կարո՞ղ են արդյոք անկյունաձև բաժանման բոլոր քայլերում մնացորդները լինել տարբեր, եթե p/q -ն չի գրվում վերջավոր տասնորդական կոտորակի տեսքով:
6. Ո՞ր թվերն են գրվում անվերջ պարբերական կամ վերջավոր տասնորդական կոտորակով:
7. Վերջավոր տասնորդական կոտորակը գրվո՞ւմ է արդյոք անվերջ պարբերական տասնորդական կոտորակի տեսքով:

Առաջադրանքներ

8. Հետևյալ բնական թվերը գրել կարգային գումարելիների գումարի տեսքով.

ա) 352, բ) 5864, գ) 60853, դ) 80451:

9. Ըստ կարգային գումարելիների գումարի՝ գրել բազմանիշ թիվը.

ա) $3 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10$, բ) $7 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 9$,

գ) $8 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^3 + 6$, դ) $5 \cdot 10^6 + 7 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 5$:

10. Տրված թիվը ներկայացնել ամբողջ թվի և մեկից փոքր ոչ բացասական տասնորդական կոտորակի գումարով.

ա) $34{,}251$, բ) 45, գ) $-12{,}3$, դ) $-80{,}45$:

11. Տրված սովորական կոտորակը գրել տասնորդական կոտորակի տեսքով.

ա) $45/4$, բ) $37/40$, գ) $127/25$, դ) $99/50$:

12. Տրված տասնորդական կոտորակը գրել սովորական կոտորակի տեսքով.

ա) $1{,}25$, բ) $2{,}256$, գ) $0{,}016$, դ) $3{,}625$:

13. Տրված սովորական կոտորակը գրել անվերջ պարբերական տասնորդական կոտորակի տեսքով.

ա) $2/9$, բ) $1/6$, գ) $22/7$, դ) $12/11$:

14. Համեմատել թվերը.

ա) $5/12$ և $0{,}42$, բ) $11/15$ և $0{,}74$, գ) $2/9$ և $0{,}2$, դ) $5/6$ և $0{,}83$:

15. Տրված թվերը դասավորել աճման կարգով.

ա) $49/11$, $4{,}5$ և $-5{,}4$, բ) $-8/17$, $-0{,}5$ և $0{,}5$:

16. Նշեք $0{,}6(3)$ թվից մեծ և $0{,}634$-ից փոքր ռացիոնալ թիվ:

➢**17.** Նշեք $-0{,}6(3)$ թվից փոքր և $-0{,}634$-ից մեծ ռացիոնալ թիվ:

➢**18.** Ապացուցել, որ՝

ա) եթե r ռացիոնալ թիվը գրվում է վերջավոր տասնորդական կոտորակի տեսքով, ապա կա այնպիսի k բնական թիվ, որ $r\cdot 10^k$ արտադրյալն ամբողջ թիվ է,

բ) եթե m/n անկրճատելի կոտորակը գրվում է վերջավոր տասնորդական կոտորակի տեսքով, ապա n-ը չի կարող բաժանվել 3-ի,

գ) m/n անկրճատելի կոտորակը գրվում է վերջավոր տասնորդական կոտորակի տեսքով այն և միայն այն դեպքում, երբ n-ը չունի 2-ից և 5-ից տարբեր պարզ բաժանարար:

19. Անվերջ պարբերական տասնորդական կոտորակը գրել սովորական կոտորակի տեսքով.

ա) $0,(6)$, բ) $3{,}2(4)$, ➢գ) $0{,}0(25)$, ➢դ) $2{,}3(12)$:

➢**20.** Հաշվել արտահայտության արժեքը.

ա) $\frac{2}{7}\cdot 1{,}1(6)+0{,}1(6)$, բ) $\frac{8}{9}:0,(6)+\frac{2}{3}$,

գ) $0,(09)+0,(90)$, դ) $0{,}7(28)+1{,}9(71)$:

Կրկնության համար

➢**21.** Բնական թվերի համար ապացուցել 3-ի բաժանվելու հայտանիշը (թիվն առանց մնացորդի բաժանվում է 3-ի այն և միայն այն դեպքում, երբ նրա թվանշանների գումարը բաժանվում է 3-ի):

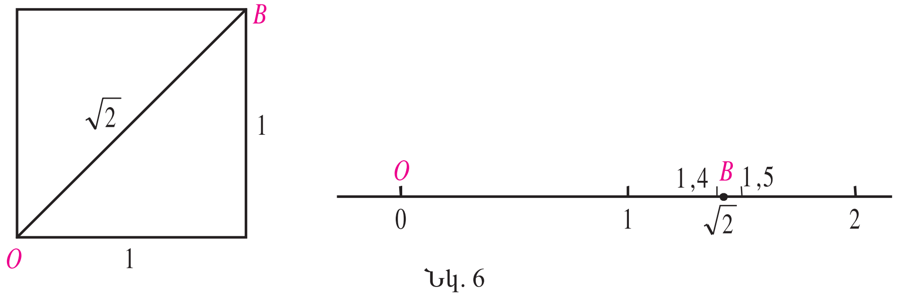
➢**22.** Ապացուցել, որ $\underbrace{777...7}_{777\text{հատ}}$ թիվը բաժանվում է 3-ի:

➢**23.** Բնական թվերի համար ապացուցել 9-ի բաժանվելու հայտանիշը (թիվն առանց մնացորդի բաժանվում է 9-ի այն և միայն այն դեպքում, երբ նրա թվանշանների գումարը բաժանվում է 9-ի):

§3. Իրական թվեր

Ռացիոնալ թվերը պատկերելով թվային ուղղի վրա՝ ամեն մի ռացիոնալ թվի (վերջավոր կամ պարբերական տասնորդական կոտորակի) վերագրեցինք մի կետ, որը 0 կետի աջ կողմում է, եթե այդ թիվը դրական է, և ձախ կողմում՝ եթե բացասական է:

Տեսանք նաև, որ ռացիոնալ թվերը չեն «լցնում» թվային ուղիղը. թվային ուղղի վրա կան կետեր, որոնք չեն ներկայացվում ռացիոնալ թվով: Այժմ փորձենք այդ կետերին նույնպես վերագրել թվեր (տասնորդական կոտորակներ):



Նկ. 6

Դիտարկենք, օրինակ, B կետը, որի հեռավորությունը O-ից հավասար է միավոր կողմով քառակուսու անկյունագծի երկարությանը (նկ. 6):

Հանրահաշվի դասընթացից մեզ հայտնի է, որ 1 կողմով քառակուսու անկյունագծի երկարությունը չի արտահայտվում ռացիոնալ թվով: Սակայն իմանալով, որ այդ երկարության քառակուսին 2 է, անկյունագծի երկարությունը համարել ենք $\sqrt{2}$: Այսինքն՝ այն դրական թիվը, որի քառակուսին 2 է: Հենց սա է այն թիվը, որը համապատասխանում է B կետին: Այժմ $\sqrt{2}$-ը ներկայացնենք տասնորդական կոտորակով:

B կետը 1-ի և 2-ի միջև է: Ուրեմն՝

$$1<\sqrt{2}<2:$$

$[1;2]$ հատվածը բաժանելով տասը հավասար մասի՝ տեսնում ենք, որ

$$1{,}4<\sqrt{2}<1{,}5$$

(քանի որ $1{,}4^2<2<1{,}5^2$): Այնուհետև $[1{,}4;1{,}5]$ հատվածը բաժանելով տասը հավասար մասի՝ կստանանք՝

$$1{,}41<\sqrt{2}<1{,}42:$$

Նկատենք, որ 1,41 և 1,42 տասնորդական կոտորակներից յուրաքանչյուրը կարելի է համարել $\sqrt{2}$-ի տասնորդական մոտարկում 10^{-2} ճշտությամբ: Ընդ որում, 1,41-ը մոտարկում է $\sqrt{2}$-ը պակասորդով, իսկ 1,42-ը՝ հավելուրդով: Հասկանալի է, որ եթե ամեն անգամ տասը հավասար մասի տրոհենք այն հատվածը, որը պարունակում է $\sqrt{2}$-ը, այս գործընթացն ավարտ չի ունենա (հակառակ դեպքում $\sqrt{2}$-ը կարտահայտվի վերջավոր տասնորդական կոտորակով և կդառնա ռացիոնալ թիվ).

$$1{,}41<\sqrt{2}<1{,}42,$$

$$1{,}414<\sqrt{2}<1{,}415,$$

$$1{,}4142 < \sqrt{2} < 1{,}4143,$$

....

Այսինքն՝ OB հատվածի երկարությունը, որը նշանակել էինք $\sqrt{2}$ -ով, կարտահայտվի անվերջ տասնորդական կոտորակով: Դա կլինի անվերջ ոչ պարբերական տասնորդական կոտորակ, քանի որ $\sqrt{2}$ -ը ռացիոնալ թիվ չէ:

Հանգունորեն թվային ուղղի վրա 0-ից աջ ամեն մի կետի կհամապատասխանի մի տասնորդական կոտորակ (վերջավոր կամ անվերջ, պարբերական կամ ոչ պարբերական):

Թվային ուղղի վրա 0-ից ձախ կետերին վերագրում են բացասական տասնորդական կոտորակներ: Եթե կետը 0-ից ձախ է և նրա հեռավորությունը 0-ից a է, ապա նրան վերագրում են $-a$ տասնորդական կոտորակը:

Դրական տասնորդական կոտորակները (հատվածների երկարությունները), ***բացասական տասնորդական կոտորակները և զրոն կազմում են իրական թվերի բազմությունը:***

Իրական թվերի բազմությունը սովորաբար նշանակում են $\mathbf{R}$ տառով:

Իրական, բայց ոչ ռացիոնալ թվերն անվանում են իռացիոնալ թվեր:

Այսինքն՝ իռացիոնալ թվերի բազմությունը $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$-ն է*), $\sqrt{2} \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$:

Իռացիոնալ թվի օրինակ է նաև 0,1010010001... թիվը (առաջին մեկից հետո մեկ զրո, երկրորդից հետո՝ երկու զրո և այլն), քանի որ այն անվերջ ոչ պարբերական տասնորդական կոտորակ է:

Թվային ուղղի կամայական կետի համապատասխանում է մի իրական թիվ և հակառակը. կամայական իրական a թվի թվային ուղղի վրա համապատասխանում է մի կետ: Այն գտնվում է սկզբնակետից $|a|$ հեռավորությամբ՝ սկզբնակետից աջ, եթե a-ն դրական է և ձախ, եթե a-ն բացասական է:

Թվային ուղղի A կետին համապատասխանող a թիվը երբեմն անվանում են A ***կետի կոորդինատ***: Այդ իսկ պատճառով թվային ուղղին անվանում են նաև ***կոորդինատային ուղիղ***:

---

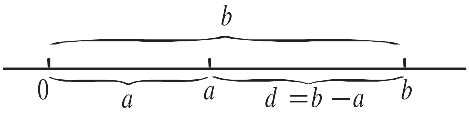
*) $A \setminus B$ -ով նշանակում են այն թվերի բազմությունը, որոնք պատկանում են A -ին և չեն պատկանում B -ին:

Հաճախ իրական թիվը նույնացնում են թվային ուղղի վրա նրան համապատասխանող կետին: Օրինակ՝ խոսելով թվային ուղղի 10 կետի մասին՝ նկատի են ունենում 10 կոորդինատով կետը:

Տեսանք, որ կամայական a թվի համար $|a|$-ն թվային ուղղի վրա a-ի հեռավորությունն է 0-ից: Այժմ տեսնենք, թե ինչ երկրաչափական իմաստ ունի երկու թվերի տարբերության մոդուլը: Հիմնավորենք, որ

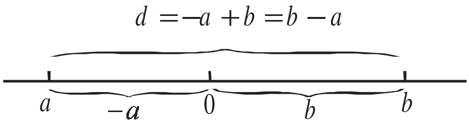
> ***թվային ուղղի վրա a և b կետերին համապատասխանող կետերի հեռավորությունը $|a-b|$ է:***

Քանի որ $|a-b|=|b-a|$, կարող ենք համարել, որ $a<b$ (այս դեպքում $|a-b|=b-a$): Հնարավոր է երեք դեպք.



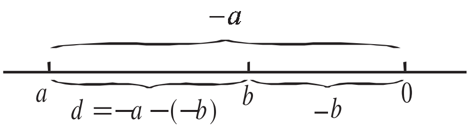
Նկ. 7

ա) $0<a<b$ (նկ. 7): Այս դեպքում a կետի հեռավորությունը 0-ից կլինի a, իսկ b կետինը՝ b, ուստի a և b կետերի d հեռավորությունը կլինի՝ $b-a=|a-b|$:



Նկ. 8

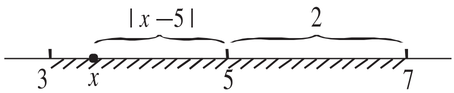
բ) $a<0<b$ (նկ. 8): Այս դեպքում a կետի հեռավորությունը 0-ից կլինի $-a$, իսկ b կետինը՝ b, ուստի $d=-a+b=$ $=b-a=|a-b|$:



Նկ. 9

գ) $a<b<0$ (նկ. 9): Այս դեպքում a կետի հեռավորությունը 0-ից կլինի $-a$, իսկ b կետինը՝ $-b$, ուստի $d=-a-(-b)=$ $=b-a=|a-b|$:

Օրինակ 1: «x-ի հեռավորությունը 5-ից փոքր է երկուսից» պայմանը մոդուլի նշանով գրվում է $|x-5|<2$ անհավասարությամբ: Ուստի $|x-5|<2$ անհավասարման լուծումը կլինի $(3;7)$ միջակայքը (նկ. 10):

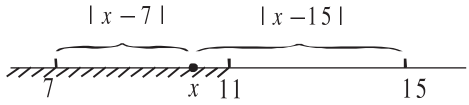


$|x-5|<2 \Leftrightarrow x\in(3,7)$

Նկ. 10

Օրինակ 2: Օգտվելով երկու թվերի տարբերության մոդուլի երկրաչափական իմաստից՝ լուծենք $|x-7|<|x-15|$ անհավասարումը:

Թվային ուղղի վրա $|x-7|<|x-15|$ պայմանը նշանակում է, որ x կետն ավելի մոտ է 7-ին, քան՝ 15-ին: Ակնհայտ է, որ թվային ուղղի վրա $[7,15]$ հատվածի միջնակետը՝ 11 կետը, հավասարահեռ է այդ հատվածի ծայրակետերից, 11 կետից ձախ կետերն ավելի մոտ են 7-ին, իսկ աջ կետերը՝ 15-ին (նկ. 11): Ուրեմն՝ տրված անհավասարման լուծումը $(-\infty;11)$ միջակայքն է:



$|x-7|<|x-15| \Leftrightarrow x\in(-\infty,11)$

Նկ. 11

Պատասխան՝ $(-\infty;11)$:

Օրինակ 3: Լուծենք հավասարումը. $|2x-5|=3$:

Թվային ուղղի վրա 5 կետից 3 միավոր հեռու կետերն են 2-ը և 8-ը: Ուրեմն՝ $2x=2$ կամ՝ $2x=8$, որտեղից՝ $x=1$ կամ՝ $x=4$:

Պատասխան՝ $1,\ 4$:

Դիցուք, a-ն որևէ իրական թիվ է և $\varepsilon>0$: Այդ դեպքում $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ միջակայքն անվանում են ***a* թվի ε-շրջակայք**: Այն բաղկացած է թվային առանցքի այն կետերից, որոնց հեռավորությունը a-ից փոքր է ε-ից: Հետևաբար՝ a թվի ε-շրջակայքն այն x-երի բազմությունն է, որոնք բավարարում են $|x-a|<\varepsilon$ անհավասարությանը, այսինքն՝ $|x-a|<\varepsilon$ անհավասարման լուծումը:

Օրինակ՝ $a=5$ թվի 2-շրջակայքը ($\varepsilon=2$) կլինի $(3;7)$ միջակայքը (տե՛ս 1-ին օրինակը):

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Արտահայտվո՞ւմ է արդյոք կամայական հատվածի երկարությունը ռացիոնալ թվով: Բերեք համապատասխան օրինակ:
2. $\sqrt{2}$-ի օրինակով բացատրեք, թե ինչպես են գտնում իռացիոնալ թվի տասնորդական մոտարկումները:
3. Բացասական իրական թվերն ինչպե՞ս են համապատասխանեցնում թվային ուղղի կետերին:
4. Ո՞ր թվերն են կազմում իրական թվերի բազմությունը, և ի՞նչ տառով են նշանակում այդ բազմությունը:
5. Ո՞ր թվերն են անվանում իռացիոնալ:
6. Ինչպիսի՞ տասնորդական կոտորակներով են արտահայտվում իռացիոնալ թվերը:
7. Ինչպե՞ս է որոշվում թվային ուղղի վրա a և b թվերին համապատասխանող կետերի հեռավորությունը:
8. Ի՞նչ ենք հասկանում ասելով՝ a թվի ε-շրջակայք:

24. Գտնել տրված թվերի տասնորդական մոտարկումները պակասորդով և հավելուրդով՝ 10^{-3} ճշտությամբ.

ա) $0{,}1386$, բ) $0{,}7821$, գ) $0,(125)$, դ) $0{,}2(451)$:

25. Գտնել տրված թվերի տասնորդական մոտարկումները պակասորդով և հավելուրդով 10^{-3} ճշտությամբ.

ա) $\frac{12}{17}$, բ) $\frac{21}{32}$, գ) $\frac{14}{9}$, դ) $\frac{31}{18}$:

26. Գտնել տրված թվերի տասնորդական մոտարկումները պակասորդով և հավելուրդով 10^{-3} ճշտությամբ.

ա) $\sqrt{7}$, բ) $\sqrt[3]{9}$, գ) $\sqrt{0{,}9}$, դ) $\sqrt{0{,}4}$:

➤**27.** Ապացուցել, որ տրված թվերն իռացիոնալ են.

ա) $\sqrt{3}$, բ) $\sqrt{7}$, գ) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, դ) $\sqrt{7}-1$:

* **28.** Ապացուցել, որ եթե n բնական թիվը որևէ բնական թվի քառակուսի չէ, ապա $\sqrt{n}$-ը իռացիոնալ է:

29. Հաշվել 4 մ լայնություն և 5 մ երկարություն ունեցող ուղղանկյան անկյունագիծը՝

ա) մեկ մետր ճշտությամբ, բ) մեկ դեցիմետր ճշտությամբ,

գ) մեկ սանտիմետր ճշտությամբ:

30. Մոդուլի նշանով գրեք պայմանը, որով նկարագրվում են թվային ուղղի այն x կետերը,

ա) որոնք 0 կետից 4 միավոր են հեռու,

բ) որոնք 1 կետից 3 միավոր են հեռու,

գ) որոնք -2 կետից 5 միավոր են հեռու,

դ) որոնք 0 կետից ավելի, քան 11 միավոր են հեռու,

ե) որոնք 13 կետից ավելի, քան 7 միավոր են հեռու,

զ) որոնք 0 կետից ամենաշատը 9 միավոր են հեռու,

է) որոնք -4 կետից ամենաշատը 12 միավոր են հեռու,

ը) որոնք ավելի մոտ են 24-ին, քան 32-ին;

թ) որոնք ավելի հեռու են -19-ից, քան 51-ից;

ժ) որոնք երկու անգամ ավելի մոտ են 10-ին, քան 4-ին:

ժա) որոնց հեռավորությունները -3 և 13 կետերից հարաբերում են, ինչպես $1:3$:

31. Թվային ուղղի օգնությամբ լուծեք նախորդ առաջադրանքում ստացված հավասարումները և անհավասարումները:

32. Լուծեք հավասարումը, օգտվելով երկու թվերի տարբերության մոդուլի երկրաչափական իմաստից.

ա) $|5x-1|=4$, բ) $|3x-7|=5$, գ) $|4x+1|=9$, դ) $|2x+7|=3$:

33. Լուծեք անհավասարումը, օգտվելով երկու թվերի տարբերության մոդուլի երկրաչափական իմաստից.

ա) $|x-3|<|x-9|$, բ) $|x-3|>|x+5|$, գ) $|x+9|\leq|x+1|$:

*** 34.** Ապացուցել, որ կամայական a և b թվերի համար՝

ա) $|a+b|\leq|a|+|b|$, բ) $|a|-|b|\leq|a-b|$:

➢35. Հիմնավորեք, որ հավասարումը լուծում չունի.

ա) $|x-5|+|x-15|=9$, բ) $|x-4|+|x+4|=7$,

գ) $|x-6|-|x-13|=7{,}1$, դ) $|x-5{,}7|-|x-1{,}2|=4{,}6$:

36. Հատվո՞ւմ են արդյոք a և b թվերի ε-շրջակայքերը, եթե՝

ա) $a=2{,}1;\ b=2{,}45;\ \varepsilon=0{,}18$, բ) $a=-0{,}21;\ b=0{,}17;\ \varepsilon=0{,}2$,

գ) $a=2{,}1;\ b=2{,}45;\ \varepsilon=0{,}17$, դ) $a=-0{,}21;\ b=0{,}17;\ \varepsilon=0{,}19$:

➢37. 15 հայտարարով քանի՞ կոտորակ կա a թվի ε-շրջակայքում, եթե՝

ա) $a=1{,}2;\ \varepsilon=0{,}3$, բ) $a=2{,}5;\ \varepsilon=0{,}2$, գ) $a=3{,}1;\ \varepsilon=0{,}35$:

38. Թվային ուղղի $[a,b]$ հատվածի երկարությունը մեծացրել են 5 անգամ՝ «ձգելով» նրա աջ ծայրակետից և անշարժ պահելով ձախը: Գտնել ստացված հատվածը.

ա) $a=3,\ b=6$, բ) $a=-1,\ b=1$, գ) $a=-8,\ b=-4$:

39. Թվային ուղղի $[a,b]$ հատվածի երկարությունը փոքրացրել են 6 անգամ՝ նրա ձախ ծայրակետը «սեղմելով» դեպի աջը: Գտնել ստացված հատվածը, եթե՝

ա) $a=2,\ b=20$, բ) $a=-10,\ b=2$, գ) $a=-31,\ b=-7$:

➢40. a-ի ո՞ր արժեքների դեպքում $(a^2-3a;3a-2)$ միջակայքը կպարունակի՝

ա) 0 կետը, բ) 4 կետը, գ) 10 կետը, դ) -2 կետը:

*** 41.** Գտնել a-ի այն արժեքները, որոնց դեպքում $[-1;2{,}5]$ և $[5a+2;10]$ միջակայքերի հատումը.

ա) բաղկացած է մի կետից, բ) պարունակում է մեկ ամբողջ թիվ,

գ) պարունակում է չորս ամբողջ թիվ, դ) դատարկ է:

Կրկնության համար

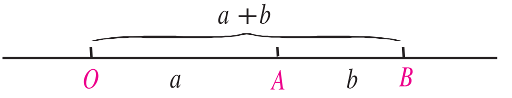
42. Ապացուցել, որ կամայական բնական n-ի համար (n^3-n)-ը բաժանվում է 6-ի:

➢43. Ապացուցել, որ եթե n-ը կենտ է, ապա (n^3-n)-ը բաժանվում է 24-ի:

*** 44.** Ապացուցել, որ եթե p-ն 3-ից մեծ պարզ թիվ է, ապա (p^2-1)-ը բաժանվում է 24-ի:

§4. Թվաբանական գործողություններ իրական թվերի հետ

Նախ դիտարկենք գումարման և բազմապատկման գործողությունները դրական իրական թվերի դեպքում: Երկու դրական a և b թվերի գումարը թվային ուղղի վրա պատկերելու համար թվային ուղղի վրա a երկարությամբ OA հատվածը տեղադրենք այնպես, որ նրա ձախ ծայրակետը համընկնի O կետին (նկ. 12): Այնուհետև A կետից տեղադրենք b երկարությամբ AB հատվածը: Ստացված OB հատվածի երկարությունը կլինի $a+b$ գումարը: Եթե a_1, a_2, b_1, b_2 վերջավոր տասնորդական կոտորակները բավարարում են



Նկ. 12

$$a_1 < a < a_2 \text{ և } b_1 < b < b_2$$

անհավասարություններին, ապա $a+b$ գումարի համար կունենանք

$$a_1 + b_1 < a + b < a_2 + b_2$$

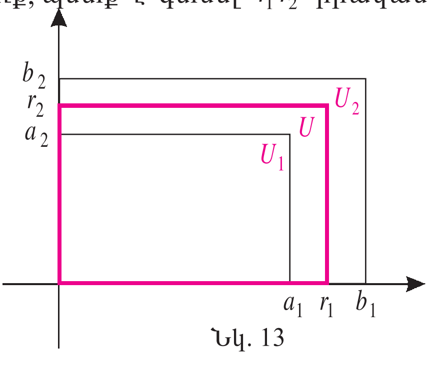
առնչությունները: Այսինքն՝ եթե a_1-ը և b_1-ը համապատասխանաբար a-ի և b-ի մոտարկումներ են պակասորդով, իսկ a_2-ը և b_2-ը՝ հավելուրդով, ապա (a_1+b_1)-ը $(a+b)$-ի մոտարկում է պակասորդով, իսկ (a_2+b_2)-ը՝ հավելուրդով:

Օրինակ՝ $1{,}4$-ը և $1{,}5$-ը $\sqrt{2}$-ի մոտարկումներ են 10^{-1} ճշտությամբ (համապատասխանաբար՝ պակասորդով և հավելուրդով), իսկ $1{,}7$-ը և $1{,}8$-ը $\sqrt{3}$-ի մոտարկումներ են նույն ճշտությամբ: Հետևաբար՝ $1{,}7+1{,}8=3{,}1$ թիվը և $1{,}5+1{,}8=3{,}3$ թիվը կլինեն $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$-ի մոտարկումներ $10^{-1}+10^{-1}=2\cdot 10^{-1}$ ճշտությամբ:

Դրական իրական թվերի բազմապատկումը մեկնաբանելու համար օգտվենք ուղղանկյան մակերեսի գաղափարից: Դիցուք, պետք է գտնել $r_1 r_2$ իրական թվերի արտադրյալը: Ենթադրենք՝

$$a_1 < r_1 < b_1 \text{ և } a_2 < r_2 < b_2,$$

որտեղ $a_1, a_2, b_1, b_2 \in Q$: Նկ. 13-ում պատկերված U_1, U_2, U ուղղանկյուններն ունեն համապատասխանաբար a_1 և a_2, b_1 և b_2, r_1 և r_2 կողմեր:



Նկ. 13

Համեմատելով ուղղանկյունների մակերեսները, տեսնում ենք, որ

$$a_1a_2 < r_1r_2 < b_1b_2:$$

Իհարկե, որքան a_1-ն ու b_1-ը մոտ լինեն r_1-ին, իսկ a_2-ն ու b_2-ը՝ r_2-ին, այնքան a_1a_2-ն ու b_1b_2-ը քիչ կտարբերվեն r_1r_2-ից:

Այսպիսով, տրված դրական իրական թվերի արտադրյալը վերջավոր տասնորդական կոտորակներով մոտարկելու համար պետք է արտադրիչները մոտարկել տասնորդական կոտորակներով և դրանց արտադրյալը համարել տրված թվերի արտադրյալի մոտարկում:

Նման ձևերով գտնում են դրական իրական թվերի քանորդի և տարբերության մոտարկումները:

Երկու բացասական իրական թիվ գումարելու համար գումարում են նրանց բացարձակ արժեքները և դնում «մինուս» նշանը: Օրինակ՝

$$(-15)+\left(-\sqrt{15}\right)=-\left(15+\sqrt{15}\right):$$

Դրական և բացասական իրական թվերը գումարելիս բացարձակ արժեքով ավելի մեծ թվի բացարձակ արժեքից հանում են մյուսի բացարձակ արժեքը և դնում բացարձակ արժեքով ավելի մեծի նշանը: Օրինակ՝

$$7+\left(-\sqrt{5}\right)=\left(7-\sqrt{5}\right) \text{ կամ } 7+\left(-\sqrt{51}\right)=-\left(\sqrt{51}-7\right):$$

Տարբեր նշանի իրական թվերը բազմապատկելիս բազմապատկում են նրանց բացարձակ արժեքները և արտադրյալին վերագրում նրանց նշանների արտադրյալը, այսինքն՝ «պլյուս» նշան, եթե արտադրիչների նշանները նույնն են, և «մինուս» նշան, եթե արտադրիչների նշանները տարբեր են:

Իրական թվերի այս ձևով սահմանված գումարման և բազմապատկման գործողությունները ունեն ռացիոնալ թվերի գումարման և բազմապատկման մեզ ծանոթ հատկությունները: Այսինքն՝ ճիշտ են հետևյալ օրենքները:

1) $\boldsymbol{a+b=b+a}$	***գումարման տեղափոխական օրենք***
2) $\boldsymbol{(a+b)+c=a+(b+c)}$	***գումարման զուգորդական օրենք***
3) $\boldsymbol{a\cdot b=b\cdot a}$	***արտադրյալի տեղափոխական օրենք***
4) $\boldsymbol{(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)}$	***արտադրյալի զուգորդական օրենք***
5) $\boldsymbol{a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c}$	***բաշխական օրենք***
6) $\boldsymbol{0\cdot a=0}$	***զրոյով բազմապատկելու հատկություն***
7) $\boldsymbol{0+a=a}$	***զրո գումարելու օրենք***
8) $\boldsymbol{1\cdot a=a}$	***մեկով բազմապատկելու օրենք***

Իրական թվերի տարբերության ու քանորդի տասնորդական մոտարկումները գտնվում են նման ձևերով:

Իմանալով իրական թվերի բազմապատկումը՝ սահմանենք իրական թվի ամբողջ ցուցիչով աստիճանը.

$$a^m = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m \text{ անգամ}},\ a^{-m} = \frac{1}{a^m},\ \text{որտեղ } a,b \in \mathbf{R} \setminus \{0\},\ m \in \mathbf{N},$$

$$0^m = 0,\ a^0 = 1,\ \text{որտեղ } a,b \in \mathbf{R} \setminus \{0\},\ m \in \mathbf{N}:$$

0-ի 0 աստիճանը և բացասական աստիճանը չեն սահմանվում:

Օգտվելով 3-րդ և 4-րդ օրենքներից՝ դժվար չէ համոզվել, որ այս ձևով սահմանված ամբողջ ցուցիչով աստիճանն ունի հետևյալ հատկությունները՝

$$\boldsymbol{a^m \cdot a^n = a^{m+n},\quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n},}$$

$$\boldsymbol{a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m,\ \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m,\ (a^m)^n = a^{mn},}$$

որտեղ $a,b \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $m,n \in \mathbf{Z}$:

Նշենք ամբողջ ցուցիչով աստիճանի ևս երկու հատկություն:

Եթե $a>1$ և $m>n$, ապա $a^m > a^n$:

Եթե $0<a<1$ և $m>n$, ապա $a^m < a^n$:

Մասնավորապես, մեկից մեծ թվի դրական աստիճանը մեծ է մեկից, իսկ բացասական աստիճանը՝ փոքր: Մեկից փոքր դրական թվի դրական աստիճանը փոքր է մեկից, իսկ բացասական աստիճանը՝ մեծ:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ինչպե՞ս են գտնում դրական իրական թվերի գումարի մոտարկումները:
2. Ինչպե՞ս են գտնում դրական իրական թվերի արտադրյալի մոտարկումները:
3. Ի՞նչ օրենքների են ենթարկվում իրական թվերի գումարումն ու բազմապատկումը:
4. Ինչպե՞ս է սահմանվում իրական թվի ամբողջ աստիճանը:
5. Ի՞նչ հատկություններ ունի իրական թվի ամբողջ աստիճանը:

Առաջադրանքներ

45. Գտնել տրված գումարի տասնորդական մոտարկումները պակասորդով և հավելուրդով՝ $2 \cdot 10^{-2}$ ճշտությամբ.

ա) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, բ) $\sqrt{7}+\sqrt{0{,}1}$, գ) $\sqrt{1{,}75}+\sqrt{2}$, դ) $\sqrt{1{,}1}+\sqrt{0{,}9}$:

46. Գտնել տրված արտահայտության տասնորդական մոտարկումները պակասորդով և հավելուրդով՝ 10^{-2} ճշտությամբ՝ նախապես հաշվելով արտահայտության քառակուսին.

ա) $\sqrt{2}+\sqrt{0,5}$,   բ) $\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{2}{3}}$,   գ) $\sqrt{27}+\sqrt{3}$,   դ) $\sqrt{12}+\sqrt{\frac{1}{3}}$:

47. Ապացուցել, որ իռացիոնալ թվի հակադիրը և հակադարձը իռացիոնալ թվեր են:

48. Ռացիոնա՞լ, թե՞ իռացիոնալ թիվ է ռացիոնալ թվերի՝

ա) գումարը,   բ) տարբերությունը,

գ) արտադրյալը,   դ) քանորդը:

➤**49.** Ռացիոնա՞լ, թե՞ իռացիոնալ թիվ է a ռացիոնալ թվի և b իռացիոնալ թվի՝

ա) գումարը,   բ) տարբերությունը,

գ) արտադրյալը, եթե $a \neq 0$,   դ) քանորդը, եթե $a \neq 0$:

➤**50.** Կարո՞ղ է արդյոք ռացիոնալ թիվ լինել իռացիոնալ թվերի՝

ա) գումարը,   բ) տարբերությունը,

գ) արտադրյալը,   դ) քանորդը:

Բերեք համապատասխան օրինակներ:

➤**51.** Կարո՞ղ է արդյոք ռացիոնալ թիվ լինել իռացիոնալ թվի՝

ա) կրկնապատիկը,   բ) եռապատիկը,

գ) քառակուսին,   դ) խորանարդը:

Բերեք համապատասխան օրինակներ:

52. Գտնել a և b թվերի նշանները, եթե՝

ա) $\begin{cases} a+b>0 \\ ab>0 \end{cases}$,   բ) $\begin{cases} a+b<0 \\ ab>0 \end{cases}$:

➤**53.** Ապացուցեք պարագրաֆի վերջում բերված աստիճանի հատկությունները:

54. Համեմատեք թվերը.

ա) $\left(\sqrt{2}\right)^{15}$ և $\left(\sqrt{2}\right)^{9}$,   բ) $(1,5)^{-12}$ և $(1,5)^{-29}$,   գ) $\left(\frac{4}{\pi}\right)^{3}$ և 1,

դ) $\left(\frac{2}{3}\right)^{4}$ և $\left(\frac{2}{3}\right)^{8}$,   ե) $\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^{7}$ և $\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^{3}$,   զ) $\left(\frac{3}{\pi}\right)^{9}$ և 1:

55. Գտնել արտահայտության արժեքը.

ա) $\sqrt[3]{12}\cdot\left(\sqrt[3]{12}\right)^{2}$,   բ) $\dfrac{\left(\sqrt{13}\right)^{5}}{\sqrt{13}}$,   գ) $\left(\sqrt[4]{8}\right)^{3}\cdot\left(\sqrt[4]{8}\right)^{9}$,   դ) $\dfrac{\left(\sqrt{0,1}\right)}{\left(\sqrt{0,1}\right)^{5}}$:

56. Տրված թվերի միջև գտնել 18 հայտարարով կոտորակ.

ա) $1,35$ և $1,4$;   բ) $2,61$ և $2,65$:

***57.** Տրված թվերի միջև գտնել որևէ ռացիոնալ և որևէ իռացիոնալ թիվ.

ա) $\sqrt{26}$ և $\sqrt{27}$,   բ) $-\sqrt{0,12}$ և $-\sqrt{0,13}$,   գ) $\sqrt{100,1}$ և $\sqrt{100,2}$:

➢**58.** Ցույց տալ, որ կամայական ε դրական թվի համար կա նրանից փոքր, դրական՝

ա) ռացիոնալ թիվ, բ) իռացիոնալ թիվ:

***59.** Ցույց տալ, որ կամայական (a,b) միջակայքում կա անվերջ քանակով՝

ա) ռացիոնալ թիվ, բ) իռացիոնալ թիվ:

➢**60.** Ցույց տալ, որ կամայական (a,b) միջակայքում չկա՝

ա) մեծագույն թիվ, բ) փոքրագույն թիվ:

➢**61.** Գտնել $\left[\sqrt{32};\sqrt{33}\right]$ միջակայքին պատկանող 10 հայտարարով կոտորակ:

➢**62.** Գտնել այնպիսի p բնական թիվ, որ $-\frac{p}{7}\in\left[-\sqrt{1,4};-\sqrt{1,1}\right]$:

➢**63.** Գտնել $\left[\sqrt{15};\sqrt{35}\right]$ միջակայքին պատկանող 13 համարիչով կոտորակները:

➢**64.** Գտնել $\left[\sqrt{82};\sqrt{91}\right]$ միջակայքին պատկանող 15 հայտարարով կոտորակների քանակը:

Կրկնության համար

➢**65.** Գտնել n-ի ամբողջ արժեքները, որոնց դեպքում $\frac{n^2-2}{n-3}$ թիվը՝

ա) բնական թիվ է, բ) ամբողջ թիվ է:

***66.** Գտնել n-ի ամբողջ արժեքները, որոնց դեպքում $\frac{n^4+3}{n+2}$ թիվը՝

ա) բնական թիվ է, բ) ամբողջ թիվ է:

§5. Իրական թվի n-րդ աստիճանի արմատը

Գիտենք, որ զրոյից տարբեր կամայական a իրական թվի քառակուսին դրական թիվ է, և $(-a)^2=a^2$: Սրանից հետևում է, որ որևէ բացասական թիվ իրական թվի քառակուսի չէ:

Օրինակներով համոզվենք, որ կամայական դրական թվի համար կա մի դրական թիվ, որի քառակուսին տրված թիվն է: Տրված a դրական թվի համար $\sqrt{a}$-ով նշանակում են այն դրական թիվը, որի քառակուսին a է:

Օրինակ 1: Գտնենք $\sqrt{\sqrt{2}}$-ը, այսինքն՝ այն դրական թիվը, որի քառակուսին $\sqrt{2}$ է:

Հաշվի առնելով, որ $\left(\sqrt{2}\right)^2=2$, պետք է գտնենք մի դրական թիվ, որի չորրորդ աստիճանը 2 է: Իհարկե, չենք կարող գտնել $\sqrt{\sqrt{2}}$ -ի բոլոր տասնորդական նիշերը: Գտնենք $\sqrt{\sqrt{2}}$ -ի տասնորդական մոտարկումները պակասորդով և հավելուրդով՝ 10^{-2} ճշտությամբ: Քանի որ

$$(1{,}1)^4 = 1{,}4641 < 2 < 2{,}0736 = (1{,}2)^4,$$

ուրեմն $\sqrt{\sqrt{2}}$ -ի տասնորդական մոտարկումները պակասորդով և հավելուրդով՝ 10^{-1} ճշտությամբ $1{,}1$ -ը և $1{,}2$ -ն են: $[1{,}1; 1{,}2]$ հատվածը բաժանելով տասը հավասար մասի և կատարելով անհրաժեշտ հաշվարկները՝ կստանանք՝

$$(1{,}18)^4 = 1{,}93877776 < 2 < 2{,}00533921 = (1{,}19)^4:$$

Հետևաբար՝ $\sqrt{\sqrt{2}}$ -ի տասնորդական մոտարկումը՝ 10^{-2} ճշտությամբ պակասորդով $1{,}18$ է, իսկ հավելուրդով՝ $1{,}19$:

Օրինակ 2: Դիցուք, $A = 0{,}5050050005...$ (առաջին 5 -ից հետո մեկ 0, երկրորդից հետո երկու զրո և այլն):

Պարզ է, որ $0 < \sqrt{A} < 1$: $[0;1]$ հատվածը բաժանելով տասը հավասար մասի և կատարելով համապատասխան հաշվարկները՝ կստանանք՝ $(0{,}7)^2 = 0{,}49 < < A < 0{,}64 = (0{,}8)^2$: Հետևաբար՝

$$0{,}7 < \sqrt{A} < 0{,}8:$$

Երկրորդ քայլում կստանանք՝ $(0{,}71)^2 = 0{,}5041 < A < 0{,}5184 = (0{,}72)^2$: Ուստի՝

$$0{,}71 < \sqrt{A} < 0{,}72:$$

Այսպիսով՝ $\sqrt{0{,}5050050005...}$ -ի տասնորդական մոտարկումը՝ 10^{-2} ճշտությամբ պակասորդով $0{,}71$ է, իսկ հավելուրդով՝ $0{,}72$:

Ակնհայտ է, որ երբ $a \neq 0$, a -ն և a^3 -ն ունեն նույն նշանը: Տեսնենք, որ կամայական a իրական թվի համար կա մի իրական թիվ, որի խորանարդը a -ն է: Այդ թիվը նշանակում են $\sqrt[3]{a}$ -ով: Նախ նկատենք, որ եթե որևէ a -ի համար գոյություն ունի $\sqrt[3]{a}$ -ն, ապա գոյություն ունի նաև $\sqrt[3]{-a}$ -ն և $\sqrt[3]{-a} = -\sqrt[3]{a}$: Իրոք՝ $\left(-\sqrt[3]{a}\right)^3 = -\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = -a$: Հետևաբար՝ բավական է գտնել $\sqrt[3]{a}$ -ն դրական a -երի համար:

Օրինակ 3: Գտնենք $\sqrt[3]{A}$ -ի տասնորդական մոտարկումները 10^{-2} ճշտությամբ՝ պակասորդով և հավելուրդով, եթե $A = 0{,}5050050005...$:

$[0;1]$ հատվածը բաժանելով տասը հավասար մասի և կատարելով համապատասխան հաշվարկները՝ կստանանք՝ $(0{,}7)^3=0{,}343<A<0{,}512=(0{,}8)^3$: Հետևաբար՝ առաջին մոտարկման համար կունենանք՝

$$0{,}7<\sqrt[3]{A}<0{,}8:$$

Երկրորդ քայլում կստացվի՝ $(0{,}79)^3=0{,}493039<A<0{,}512=(0{,}8)^3$: Ուստի՝

$$0{,}79<\sqrt[3]{A}<0{,}8:$$

Այսինքն՝ $\sqrt[3]{A}$-ի տասնորդական մոտարկումը 10^{-2} ճշտությամբ պակասորդով $0{,}79$-ն է, իսկ հավելուրդով՝ $0{,}8$-ը:

Զույգ n-ի դեպքում ոչ բացասական a թվի n-րդ աստիճանի արմատ կոչվում է այն ոչ բացասական իրական թիվը, որի n-րդ աստիճանը a է:
Կենտ n-ի դեպքում իրական a թվի n-րդ աստիճանի արմատ կոչվում է այն իրական թիվը, որի n-րդ աստիճանը a է:
a թվի n-րդ աստիճանի արմատը նշանակում են՝ $\sqrt[n]{a}$-ով:

Զույգ և կենտ n-երի համար $\sqrt[n]{a}$-ի սահմանումների տարբերությունը պայմանավորված է նրանով, որ՝

1) բացասական a-ի և զույգ n-ի դեպքում չկա իրական թիվ, որի n-րդ աստիճանը a է,

2) դրական a-ի և զույգ n-ի դեպքում կա երկու իրական թիվ ($\sqrt[n]{a}$-ն և $-\sqrt[n]{a}$-ն), որի n-րդ աստիճանը a է:

Դրական a-ի և կամայական n-ի համար $\sqrt[n]{a}$-ի մոտավոր արժեքները գտնում են այնպես, ինչպես վերը նկարագրված $n=2$ և $n=3$ դեպքերում:

Դժվար չէ համոզվել, որ կամայական $a,b\geq 0$, $m,k\in\mathbf{N}$ թվերի համար՝

$$\sqrt[m]{a}=\sqrt[mk]{a^k}, \quad \sqrt[m]{a\cdot b}=\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{b},$$

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)^k=\sqrt[m]{a^k}, \quad \sqrt[m]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} \quad (b\neq 0):$$

Օրինակ 4: Կոտորակային արտահայտության հայտարարի իռացիոնալությունից ազատվելու համար նրա համարիչն ու հայտարարը բազմապատկում են հայտարարի լծորդով, այնպիսի արտահայտությամբ, որ հայտարարում արմատանշան չմնա.

ա) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, բ) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}$,

գ) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}=\dfrac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}=\dfrac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{a+b}$:

Նշենք n-րդ աստիճանի արմատի ևս երկու հատկություն, որոնք հետևում են աստիճանի՝ նախորդ պարագրաֆի վերջում բերված համանման հատկություններից:

Եթե $a>1$ ***և*** $m>n$***, ապա*** $\sqrt[m]{a}<\sqrt[n]{a}$ ***:***

Եթե $0<a<1$ ***և*** $m>n$***, ապա*** $\sqrt[m]{a}>\sqrt[n]{a}$ ***:***

Մասնավորապես, մեկից մեծ թվի n-րդ աստիճանի արմատը փոքր է այդ թվից, իսկ մեկից փոքր դրական թվի n-րդ աստիճանի արմատը մեծ է այդ թվից:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ո՞ր իրական a-երի համար գոյություն ունի $\sqrt{a}$-ն (ինչո՞ւ):
2. Ինչպե՞ս են գտնում դրական թվի քառակուսի արմատի մոտավոր արժեքները:
3. Ո՞ր a-երի համար գոյություն ունի $\sqrt[3]{a}$-ն:
4. Ի՞նչ է նշանակում $\sqrt[n]{a}$-ն, եթե n-ը զույգ է, իսկ a-ն՝ ոչ բացասական:
5. Ի՞նչ է նշանակում $\sqrt[n]{a}$-ն, եթե n-ը կենտ է, իսկ a-ն՝ իրական:
6. Ինչո՞ւ են զույգ և կենտ n-երի համար $\sqrt[n]{a}$-ի սահմանումները տարբեր:

Առաջադրանքներ

67. Գտնել արտահայտության տասնորդական մոտարկումները պակասորդով և հավելուրդով՝ 10^{-2} ճշտությամբ.

ա) $\sqrt{44}$, բ) $\sqrt{\sqrt{8}}$, գ) $\sqrt{\pi}$, դ) $\sqrt{0{,}4567}$:

68. Գտնել արտահայտության տասնորդական մոտարկումները պակասորդով և հավելուրդով՝ 10^{-1} ճշտությամբ.

ա) $\sqrt[3]{1025}$, բ) $\sqrt[3]{219}$, գ) $\sqrt[3]{-65}$, դ) $\sqrt[3]{-124}$:

69. Համեմատել թվերը.

ա) $\sqrt{3}$ և $\sqrt[3]{2}$, բ) $\sqrt[4]{4}$ և $\sqrt[6]{6}$, գ) $\sqrt{3\sqrt{2}}$ և $\sqrt{5}$, դ) $\sqrt[3]{5^2}$ և $\sqrt[5]{5^3}$,

ե) $\sqrt{5}$ և $\sqrt[3]{5}$, զ) $\sqrt[4]{0{,}7}$ և $\sqrt[6]{0{,}7}$, է) $\sqrt{1{,}1}$ և $1{,}1$, ը) $\sqrt[3]{0{,}1}$ և $0{,}1$:

Գտնել արտահայտության արժեքը (70-72).

70. ա) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$, բ) $\sqrt{24}\cdot\sqrt{54}$, գ) $\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[6]{3}$, դ) $\sqrt[6]{16}\cdot\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[9]{64}$:

71. ա) $\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$, բ) $\dfrac{\sqrt{162}}{\sqrt{18}}$, գ) $\dfrac{\sqrt{0,(3)}}{\sqrt{27}}$, դ) $\dfrac{\sqrt{0,125}}{\sqrt{32}}$:

➢**72.** ա) $\dfrac{\sqrt[3]{x^2}+6\sqrt[3]{x}+9}{\sqrt[3]{x^2}-9}$, երբ $x=64$, բ) $\dfrac{\sqrt[5]{x^4}-4}{\sqrt[5]{x^4}-4\sqrt[5]{x^2}+4}$, երբ $x=32$,

գ) $\dfrac{(a^2-b^2)\cdot(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})}{\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{ab^3}-\sqrt[3]{a^3b}-\sqrt[3]{b^4}}$, երբ $a=\sqrt[3]{7}+1$, $b=\sqrt[3]{7}-1$,

դ) $\dfrac{\sqrt[3]{ab}(\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{a^2})+\sqrt[3]{a^4}-\sqrt[3]{b^4}}{\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{a^2b^2}-\sqrt[3]{a^3b}}\cdot\sqrt[3]{a^2}$, երբ $a=3\sqrt{3}$, $b=2\sqrt{2}$:

Ազատվել հայտարարի իռացիոնալությունից (73-75).

73. ա) $\dfrac{4}{\sqrt{5}+1}$, բ) $\dfrac{13}{2\sqrt{3}-5}$, գ) $\dfrac{a^2-b^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$, դ) $\dfrac{a^3}{\sqrt{x}-3\sqrt{z}}$:

➢**74.** ա) $\dfrac{2}{\sqrt{3}+1-\sqrt{2}}$, բ) $\dfrac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$, գ) $\dfrac{1}{2\sqrt{3}-\sqrt{7}+\sqrt{19}}$:

➢**75.** ա) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{5}+1}$, բ) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{2}}$, գ) $\dfrac{a}{\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{a^2}}$:

76. Ապացուցել, որ՝

ա) $\sqrt[4]{49}=\sqrt{7}$, բ) $\sqrt[3]{2}=\sqrt[6]{4}$, գ) $\sqrt[4]{a^2}=\sqrt[8]{a^4}$, դ) $\sqrt[12]{b^8}=\sqrt[9]{b^6}$:

➢**77.** Ապացուցել, որ եթե $a>0$ և $\dfrac{m}{n}=\dfrac{p}{q}$ ($m, n, p, q\in\mathbf{N}$), ապա $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[q]{a^p}$:

➢**78.** Ապացուցել, որ $a+b\sqrt{3}$, $a,b\in\mathbf{Q}$ տեսքի թվերի գումարը, տարբերությունը, արտադրյալն ու քանորդը նույն տեսքի թվեր են:

➢**79.** Ապացուցել, որ չկան այնպիսի a և b ռացիոնալ թվեր, որ՝

ա) $\sqrt[3]{2}=a+b\sqrt{2}$, բ) $\sqrt[3]{4}=a+b\sqrt[3]{2}$:

Կրկնության համար

➢**80.** Ցույց տալ, որ $n+1$ հատ բնական թվերի մեջ կարելի է գտնել՝

ա) երկուսը, որոնք n-ի բաժանելիս ստացվում է նույն մնացորդը,

բ) երկուսը, որոնց տարբերությունը բաժանվում է n-ի:

➢**81.** ա) Կամայական n բնական թվի համար դիտարկենք

$$1,\ 11,\ 111,\ \dots,\ \underbrace{111\dots1}_{n+1\text{ հատ}}$$

թվերի հաջորդականությունը: Ապացուցեք, որ այդ թվերի մեջ կան երկուսը, որոնք n-ի բաժանելիս ստացվում է նույն մնացորդը:

բ) Ապացուցել, որ կամայական բնական n-ի համար գոյություն ունի միայն 1-երով ու 0-ներով գրվող թիվ, որը բաժանվում է n-ի:

§6. Իրական թվի ռացիոնալ ցուցիչով աստիճանը

Այժմ, իմանալով իրական թվի ամբողջ աստիճանը և իրական թվի n-րդ աստիճանի արմատը, սահմանենք ոչ բացասական թվի ռացիոնալ աստիճանը:

a դրական թվի ռացիոնալ աստիճանը սահմանվում է հետևյալ բանաձևով.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \text{ որտեղ } n \in \mathbf{N}, m \in \mathbf{Z}:$$

0-ի ռացիոնալ աստիճանը սահմանված է միայն դրական ցուցիչի դեպքում՝ $0^r = 0,\ r > 0$:

Բացասական թվի ռացիոնալ աստիճանը սահմանված է միայն ամբողջ ցուցիչի դեպքում:

Ռացիոնալ ցուցիչով աստիճանն օժտված է հետևյալ հատկություններով:

Կամայական $a, b \in \mathbf{R}_+$, $p, q \in \mathbf{Q}$ թվերի համար՝

$$(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p, \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p},$$

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}, \qquad \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}, \qquad (1)$$

$$(a^p)^q = a^{pq}, \qquad a^{-p} = \frac{1}{a^p}:$$

Օրինակ՝ ստուգենք, որ եթե $a > 0$ և $n, q \in \mathbf{N}$, $m, p \in \mathbf{Z}$, ապա

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}:$$

Իրոք,

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \cdot \sqrt[nq]{a^{np}} =$$

$$= \sqrt[nq]{a^{mq} \cdot a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}} = a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}:$$

Նման ձևով ապացուցվում են մնացած հատկությունները:

Դիտողություն: Բացասական թվի կոտորակային աստիճանը չի սահմանվում հետևյալ պատճառներով:

1) Բացասական a-ի և զույգ n-ի համար գոյություն չունի n-րդ աստիճանի արմատ a-ից: Հետևաբար՝ բացասական a-ի համար $a^{\frac{1}{2}}$-ը սահմանելը հնարավոր չէ:

2) Եթե բացասական a-ի համար սահմանեինք $a^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{a}$, ապա կստացվեր հետևյալ հակասությունը: Քանի որ $\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$, պետք է ճիշտ լիներ $(-1)^{\frac{1}{3}}=(-1)^{\frac{2}{6}}$ հավասարությունը, մինչդեռ կունենայինք՝

$$(-1)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{-1}=-1,\quad (-1)^{\frac{2}{6}}=\sqrt[6]{(-1)^2}=\sqrt[6]{1}=1:$$

Ապացուցենք, որ կամայական p և q ռացիոնալ թվերի համար՝

եթե $a>1$ և $p>q$, ապա $a^p>a^q$,

եթե $0<a<1$ և $p>q$, ապա $a^p<a^q$: (2)

Առաջին հատկությունն ապացուցելու համար նախ նկատենք, որ $a>1$ դեպքում, եթե r-ը դրական ռացիոնալ թիվ է, ապա $a^r>1$: Իրոք, եթե $r=\frac{m}{n}$, որտեղ m-ը, n-ը բնական են, ապա համաձայն բնական ցուցիչով աստիճանի և արմատի հատկությունների՝

$$a^m>1,\ \text{ուստի}\ a^r=\sqrt[n]{a^m}>1:$$

Այժմ, եթե $p>q$, ապա վերցնելով $r=p-q$, կունենանք՝ $a^{p-q}>1$: Բազմապատկելով վերջին անհավասարությունը a^q դրական թվով, կստանանք՝ $a^p>a^q$:

Հանգունորեն հաշվի առնելով, որ $0<a<1$ և $r>0$ դեպքում $a^r<1$, կապացուցվի երկրորդ հատկությունը:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ինչպե՞ս է սահմանվում a դրական թվի բացասական ռացիոնալ աստիճանը:
2. Ո՞ր դեպքում է սահմանվում 0-ի ռացիոնալ աստիճանը և ինչի՞ է այն հավասար:
3. Ինչո՞ւ չի սահմանվում բացասական թվի ռացիոնալ աստիճանը:
4. Գրեք a դրական թվի ռացիոնալ աստիճանի (1) հատկությունները:
5. Ապացուցեք (2) հատկությունները:

Առաջադրանքներ

82. Կատարել գործողությունները.

ա) $x^{1/4}\cdot x^{3/10}$, բ) $a^{-3/8}:a^{1/4}$, գ) $\left(y^{3/8}\right)^{4/3}$,

դ) $\left(x^{2/3}\right)^{0,6}\cdot x^{2/5}$, ե) $\left(a^{-5/8}\right)^{0,4}\cdot a^{0,25}$, զ) $\left(b^{1/2}\right)^{-0,5}\cdot\left(b^{1/4}\right)^{-2/3}$,

է) $\left(d^{0,3}\right)^{3/2}\cdot\left(d^{-2/5}\right)^{0,4}$, ը) $\left(u^{1/2}+2v^{1/2}\right)^2$, թ) $\left(u^{1/3}-v^{1/3}\right)^3$:

83. Պարզեցնել արտահայտությունը և հաշվել նրա արժեքը.

ա) $\dfrac{m^{\frac{5}{4}}+m^{\frac{1}{2}}n^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{3}{4}}n^{\frac{1}{4}}+n^{\frac{3}{4}}}$, եթե $m=9,\ n=16$,

բ) $\dfrac{m^{\frac{5}{3}}+mn^{\frac{1}{4}}}{nm^{\frac{2}{3}}+n^{\frac{5}{4}}}$, եթե $m=3,\ n=2$,

գ) $\dfrac{(ab^{-1}+a^{-1}b+1)(a^{-1}-b^{-1})^2}{a^2b^{-2}+a^{-2}b^2-(ab^{-1}+a^{-1}b)}$, եթե $a=\sqrt[3]{12}$, $b=\sqrt[3]{18}$,

դ) $\left(\dfrac{9-4a^{-2}}{3a^{-\frac{1}{2}}+2a^{-\frac{3}{2}}}-\dfrac{1+a^{-1}-6a^{-2}}{a^{-\frac{1}{2}}+3a^{-\frac{3}{2}}}\right)\cdot\sqrt{a}$, եթե $a=0{,}5$:

84. Ապացուցել (1) առնչությունները:

85. Դիցուք, $a>b>0$, $p\in \mathbf{Q}$: Ապացուցել, որ՝

ա) եթե $p>0$, ապա $a^p>b^p$, բ) եթե $p<0$, ապա $a^p<b^p$,

գ) եթե $p=0$, ապա $a^p=b^p$:

86. Համեմատել 1 թվի հետ.

ա) $\left(\dfrac{31}{30}\right)^{1,13}$, բ) $(1{,}0001)^{0,0001}$, գ) $\left(\dfrac{27}{26}\right)^{0,14}$, դ) $\left(\dfrac{\pi}{3}\right)^{-0,037}$,

ե) $(\sqrt{0{,}3})^{1,89}$, զ) $(\sqrt[9]{0{,}999})^{999}$, է) $\left(\dfrac{1}{143}\right)^{0}$, ը) $0^{0,023}$:

87. Թվերը դասավորել աճման կարգով.

ա) $7^{1,49}$, $7^{1,5}$, $7^{1,493}$, բ) $(1{,}2)^{6,538}$, $(1{,}2)^{6,5}$, $(1{,}2)^{6,539}$,

գ) $(5{,}2)^{-3,724}$, $(5{,}2)^{-3,73}$, $(5{,}2)^{-3,72}$, դ) $(0{,}8)^{3,82}$, $(0{,}8)^{3,826}$, $(0{,}8)^{3,81}$:

Կրկնության համար

88. Ցույց տալ, որ՝

ա) 3-ի չբաժանվող բնական թվի քառակուսին 3-ի բաժանելիս ստացվում է 1 մնացորդ,

բ) կենտ թվի քառակուսին 8-ի բաժանելիս ստացվում է 1 մնացորդը:

89. Ապացուցել, որ բոլոր երկնիշ թվերով հաջորդաբար գրվող թիվը բաժանվում է 9-ի:

§7. Իրական թվի իռացիոնալ ցուցիչով աստիճանը

Նախորդ պարագրաֆում սահմանեցինք դրական թվի ռացիոնալ ցուցիչով աստիճանը:

Որպեսզի դրական թվի կամայական իրական ցուցիչով աստիճանը լինի որոշված, մնում է սահմանենք դրական թվի իռացիոնալ ցուցիչով աստիճանը: Ընդ որում, սահմանենք այնպես, որ նախորդ պարագրաֆի (1) և (2) հատկությունները պահպանվեն նաև կամայական p և q իրական թվերի համար: Օրինակ՝ տեսնենք, թե ինչպես է որոշվում $3^{\sqrt{2}}$ թիվը:

Ինչպես գիտենք, $\sqrt{2}$-ն իռացիոնալ թիվ է, որը ներկայացվում է անվերջ տասնորդական կոտորակով՝ $\sqrt{2}=1{,}414213\ldots$:

Դիտարկենք $\sqrt{2}$ թվի մոտարկումները՝ պակասորդով և հավելուրդով.

$$1{,}4<\sqrt{2}<1{,}5,$$

$$1{,}41<\sqrt{2}<1{,}42,$$

$$1{,}414<\sqrt{2}<1{,}415,$$

$$1{,}4142<\sqrt{2}<1{,}4143,$$

....

Բնականաբար, $3^{\sqrt{2}}$-ը պետք է բավարարի հետևյալ անհավասարություններին (տե՛ս նախորդ պարագրաֆի (2) հատկությունը, որն ակնկալում ենք ունենալ նաև իռացիոնալ ցուցիչով աստիճանի համար).

$$3^{1,4}<3^{\sqrt{2}}<3^{1,5}$$

$$3^{1,41}<3^{\sqrt{2}}<3^{1,42}$$

$$3^{1,414}<3^{\sqrt{2}}<3^{1,415}$$

....

Օգտվելով այս անհավասարություններից՝ կարող ենք գտնել $3^{\sqrt{2}}$-ի տասնորդական մոտարկումները: Օրինակ՝ հաշվիչով պարզելով, որ $3^{1,41}=4{,}70\ldots$ և $3^{1,42}=4{,}75\ldots$, եզրակացնում ենք, որ

$$4{,}7<3^{\sqrt{2}}<4{,}8,$$

այսինքն՝ $3^{\sqrt{2}}$-ի տասնորդական մոտարկումներն են $4{,}7$-ը և $4{,}8$-ը (համապատասխանաբար՝ պակասորդով և հավելուրդով):

Հարյուրերորդական մոտարկումները գտնում ենք, հաշվելով. $3^{1,414}=4{,}727\ldots$ և $3^{1,415}=4{,}732\ldots$: Հետևաբար՝

$$4{,}72<3^{\sqrt{2}}<4{,}73,$$

այսինքն՝ $3^{\sqrt{2}}$-ի հարյուրերորդական մոտարկումներն են $4{,}72$-ը և $4{,}73$-ը:

Նույն ձևով գտնում ենք կամայական $a>1$ թվի $x>0$ իռացիոնալ ցուցիչով աստիճանը՝ a^x-ը:

Եթե $a>1$ և $x<0$, ապա $-x>0$, ուստի a^x-ը կարող ենք որոշել $a^x=\dfrac{1}{a^{-x}}$ հավասարությունից:

$0<a<1$ դեպքում $\dfrac{1}{a}>1$, և յուրաքանչյուր իրական x-ի համար a^x-ը կարող ենք որոշել $a^x=\left(\dfrac{1}{a}\right)^{-x}$ հավասարությունից:

$a=1$ դեպքում՝ $\mathbf{1^x=1}$ ***կամայական իրական*** $\boldsymbol{x}$ ***-ի համար***:

$a=0$ դեպքում՝ $\mathbf{0^x=0}$ ***կամայական դրական*** $\boldsymbol{x}$ ***-ի համար***:

Այսպիսով՝ a^x աստիճանը դրական a հիմքի դեպքում որոշված է բոլոր իրական x-երի համար: Ընդ որում, կամայական դրական a, b և իրական x, y թվերի համար՝

1) $\boldsymbol{a^x\cdot a^y=a^{x+y}}$, **2)** $\boldsymbol{\dfrac{a^x}{a^y}=a^{x-y}}$,

3) $\boldsymbol{(a^x)^y=a^{xy}}$, **4)** $\boldsymbol{(a\cdot b)^x=a^x\cdot b^x}$, **5)** $\boldsymbol{\left(\dfrac{a}{b}\right)^x=\dfrac{a^x}{b^x}}$,

6) ***եթե*** $\boldsymbol{a>1}$ ***և*** $\boldsymbol{x>y}$, ***ապա*** $\boldsymbol{a^x>a^y}$,

7) ***եթե*** $\boldsymbol{0<a<1}$ ***և*** $\boldsymbol{x>y}$, ***ապա*** $\boldsymbol{a^x<a^y}$:

Նշենք նաև աստիճանի հետևյալ հատկությունը, որն անմիջապես հետևում է 3-րդ հատկությունից. $(a^x)^y=(a^y)^x$:

Օրինակ 1: $\left(\left(\sqrt{3}\right)^{-\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{8}}=\left(\sqrt{3}\right)^{-\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}}=\left(\sqrt{3}\right)^{-4}=\dfrac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^4}=\dfrac{1}{9}$:

Օրինակ 2: Բաղդատենք $\left(\dfrac{5}{3}\right)^{-\sqrt{17}}$ և $(0{,}36)^{\sqrt[3]{7}}$ թվերը: Ունենք՝ $\left(\dfrac{5}{3}\right)^{-\sqrt{17}}=(0{,}6)^{\sqrt{17}}$ և $(0{,}36)^{\sqrt[3]{7}}=(0{,}6)^{2\sqrt[3]{7}}$: Քանի որ $0{,}6<1$ և $\sqrt{17}>4>2\sqrt[3]{7}$, ուրեմն առաջին թիվը փոքր է երկրորդից (համաձայն 7-րդ հատկության):

Օրինակ 3: $\dfrac{\left(\sqrt{5}\right)^{4x+2}}{\left(\sqrt[3]{10}\right)^{6x+3}}$ արտահայտությունը ներկայացնենք $c\cdot a^x$ տեսքով.

$$\frac{\left(\sqrt{5}\right)^{4x+2}}{\left(\sqrt[3]{10}\right)^{6x+3}}=\frac{\left(\sqrt{5}\right)^{4x}\cdot 5}{\left(\sqrt[3]{10}\right)^{6x}\cdot 10}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{25}{100}\right)^{x}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{x}:$$

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ո՞ր p-երի համար է որոշված a^p թիվը, եթե՝

ա) $a<0$, բ) $a=0$, գ) $a>0$ ։

2. Ինչպե՞ս է որոշվում մեկից մեծ թվի իռացիոնալ ցուցիչով աստիճանը:
3. Ինչպե՞ս է որոշվում մեկից փոքր դրական թվի իռացիոնալ ցուցիչով աստիճանը:
4. Ինչի՞ է հավասար 1-ի կամայական ցուցիչով աստիճանը:
5. Ո՞ր a-երի և x-երի համար է ճիշտ $a^x>1$ անհավասարությունը:
6. Ո՞ր a-երի և x-երի համար է ճիշտ $a^x<1$ անհավասարությունը:

Առաջադրանքներ

90. Գտնել արտահայտության արժեքը.

ա) $\left(5^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}$, բ) $\left(\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$, գ) $\left(\left(\sqrt{3}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{-\sqrt{2}}$,

դ) $\left(\left(\sqrt{5}\right)^{-\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{8}}$, ե) $\left(\left(\sqrt{7}\right)^{-\sqrt{8}}\right)^{-\sqrt{2}}$, զ) $\left(\left(\sqrt[3]{2}\right)^{-\sqrt{3}}\right)^{-\sqrt{27}}$ ։

91. Պարզեցնել արտահայտությունը.

ա) $x^{\sqrt{3}+1}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{3}}$, բ) $\left(x^{\sqrt[5]{8}}\right)^{\sqrt[5]{4}}$, գ) $x^{\sqrt{3}}:\sqrt[4]{x^{4\sqrt{3}}}$,

դ) $x^{\pi}\cdot\sqrt[4]{x^2:x^{4\pi}}$, ե) $\left(x^{-\sqrt[3]{4}}\right)^{-\sqrt[3]{2}}$, զ) $\left(\sqrt[3]{x}\right)^{2\pi}\cdot\sqrt[6]{x^{12}:x^{4\pi}}$ ։

92. Բաղդատել թվերը՝

ա) $3^{\sqrt{5}}$ և 9, բ) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\sqrt{7}}$ և $\frac{8}{27}$, գ) $7^{-\pi}$ և 1,

դ) $(0{,}5)^{-\sqrt{2}}$ և 1, ե) $(0{,}2)^{-\sqrt{3}}$ և 5, զ) $\left(\frac{4}{3}\right)^{-\pi}$ և $\frac{9}{16}$ ։

➢93. Գտնել այնպիսի n ամբողջ թիվ, որը բավարարում է տրված անհավասարություններին՝

ա) $3^n<3^{\sqrt{7}}<3^{n+1}$, բ) $(1{,}8)^n<(1{,}8)^{\sqrt[4]{17}}<(1{,}8)^{n+1}$,

գ) $\left(\frac{3}{4}\right)^n<\left(\frac{3}{4}\right)^{\sqrt{6}}<\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$, դ) $(0{,}6)^n<(0{,}6)^{\sqrt[4]{17}}<(0{,}6)^{n-1}$,

ե) $3^n<3^{-\sqrt[3]{28}}<3^{n+1}$, զ) $\left(\frac{5}{3}\right)^n<\left(\frac{5}{3}\right)^{-\sqrt[3]{9}}<\left(\frac{5}{3}\right)^{n+1}$ ։

Արտահայտությունը ներկայացնել $c \cdot a^x$ տեսքով (94-95).

94. ա) 9^{x+1}, բ) $(0{,}5)^{x-3}$, գ) $(0{,}1)^{2-x}$, դ) 7^{2x-3},

ե) $(0{,}3)^{3x+2}$, զ) 2^{4-5x}, է) $\left(\sqrt{7}\right)^{4x-2}$, ը) $\left(\sqrt[3]{9}\right)^{1{,}5x+6}$ ։

95. ա) $\dfrac{6^{3x-1}}{9^{x+2}}$, բ) $\dfrac{14^{x+2}}{10^{2x+1}}$, գ) $\dfrac{15^{4x+1}}{21^{3x-1}}$, դ) $\dfrac{14^{3x-1}}{35^{x-2}}$ ։

➢ **96**. Արտահայտությունը ներկայացնել a թվի աստիճանի տեսքով.

ա) $\dfrac{\left(\sqrt[6]{25}\right)^{9x} \cdot \left(\sqrt{5}\right)^{3x}}{\left(\sqrt[4]{125}\right)^{6x} \cdot 25^{-2x}}$, $a = 5$, բ) $\dfrac{\left(\sqrt[4]{49}\right)^{5x} \cdot \left(\sqrt[6]{7}\right)^{4x}}{\left(\sqrt[12]{7}\right)^{14x} \cdot \left(\sqrt{343}\right)^{-4x}}$, $a = 7$ ։

➢ **97**. Արտահայտությունը ներկայացնել $c \cdot a^x$ տեսքով.

ա) $\dfrac{\left(\sqrt{12}\right)^{4x+2}}{\left(\sqrt{10}\right)^{2x-4}}$, բ) $\dfrac{\left(\sqrt{20}\right)^{2x+4}}{\left(\sqrt{15}\right)^{4x-2}}$, գ) $\dfrac{\left(\sqrt[3]{4}\right)^{6x+9}}{\left(\sqrt[3]{14}\right)^{3x-6}}$, դ) $\dfrac{\left(\sqrt[4]{10}\right)^{8x-4}}{\left(\sqrt[4]{25}\right)^{4x-8}}$ ։

Կրկնության համար

➢ **98.** Ապացուցեք, որ կամայական n բնական թվի համար $\dfrac{n^3}{6} + \dfrac{n^2}{2} + \dfrac{n}{3}$ արտահայտությունն ամբողջ թիվ է։

➢ **99.** Ապացուցեք, որ $\underbrace{55\cdots5}_{555\text{ հատ}}$ թիվը բաժանվում է 15 -ի։

100. Կա՞ արդյոք բնական թիվ, որը բաժանվում է 1-ից մինչև 100 բոլոր բնական թվերին։

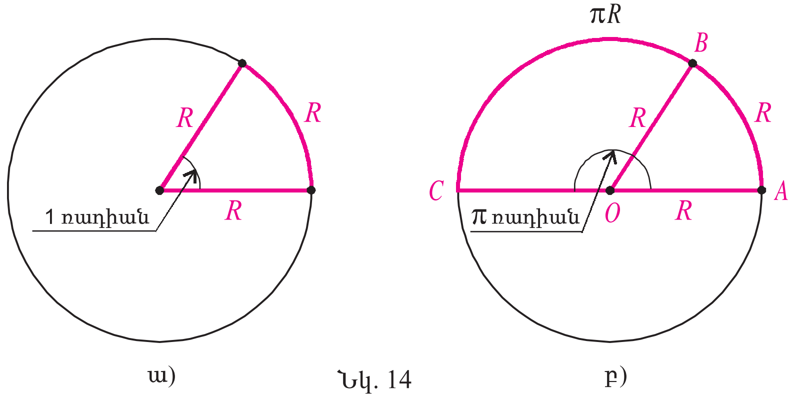
2րդ ԳԼՈՒԽ

Եռանկյունաչափության տարրերը

§1. Ռադիան: Դրական և բացասական պտույտներ

Երկրաչափության դասընթացից ծանոթ եք անկյան աստիճանային չափին. 1° մեծությամբ անկյունը փռված անկյան $\dfrac{1}{180}$ մասն է: Այժմ կծանոթանանք անկյունների չափման նոր միավորին:

Դիտարկենք R շառավղով շրջանագծի AOB կենտրոնական անկյունը, որի հենման աղեղի երկարությունը նույնպես R է: Այդ անկյան մեծությունը չափման նոր միավորն է, որն անվանում են ***ռադիան*** (նկ. 14, ա):



Նկ. 14

Սահմանում: ***Մեկ ռադիան մեծությամբ անկյունն այն կենտրոնական անկյունն է, որի հենման աղեղի երկարությունը հավասար է շրջանագծի շառավղին:***

Ռադիանը կրճատ գրվում է՝ ***ռադ***: Եթե մեկ ռադիան մեծությամբ AOB անկյունը մեծացնենք π անգամ, նրա հենման աղեղը ևս կմեծանա π անգամ, և կստացվի π ռադիան մեծությամբ AOC կենտրոնական անկյունը, որի հենման աղեղի երկարությունը հավասար է կիսաշրջանագծի երկարությանը՝ πR (նկ. 14, բ): Հետևաբար՝

$$\pi \text{ ռադ} = 180^\circ :$$

Սրանից ստացվում են ռադիանն աստիճանով և աստիճանը ռադիանով արտահայտելու բանաձևերը՝

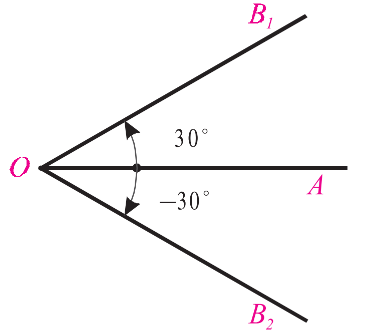
$$1\text{ ռադ}=\frac{180^\circ}{\pi}\approx 57^\circ, \qquad 1^\circ=\frac{\pi}{180}\text{ ռադ}\approx 0{,}0175\text{ ռադ}:$$

Հեշտությամբ կարող եք ստուգել, որ

$$0\text{ ռադ}=0^\circ,\quad \frac{\pi}{6}\text{ ռադ}=30^\circ,\quad \frac{\pi}{4}\text{ ռադ}=45^\circ,\quad \frac{\pi}{3}\text{ ռադ}=60^\circ,\quad \frac{\pi}{2}\text{ ռադ}=90^\circ,$$
$$\frac{2\pi}{3}\text{ ռադ}=120^\circ,\quad \frac{3\pi}{4}\text{ ռադ}=135^\circ,\quad 2\pi\text{ ռադ}=360^\circ:$$

Երկրաչափության մեջ դիտարկվում են 0°-ից մինչև 180° (0 ռադիանից մինչև π ռադիան) մեծության անկյուններ: Այժմ սահմանենք պտտման անկյան գաղափարը և տեսնենք, որ պտտման անկյան մեծությունը կարող է արտահայտվել կամայական իրական թվով:

Դիտարկենք OB_1 և OB_2 ճառագայթները, որոնք OA ճառագայթի հետ կազմում են նույնպիսի՝ 30° մեծության անկյուն (նկ. 15): Եթե OA ճառագայթը պտտենք O կետի շուրջը 30° անկյունով, այն կհամընկնի OB_1 կամ OB_2 ճառագայթներից մեկին, կախված պտույտի ուղղությունից: Պտույտի այն ուղղությունը, որի հետևանքով OA ճառագայթն ընդունում է OB_1 դիրքը, անվանենք դրական ուղղություն, իսկ պտույտի հակառակ ուղղությունը՝ բացասական:



Նկ. 15

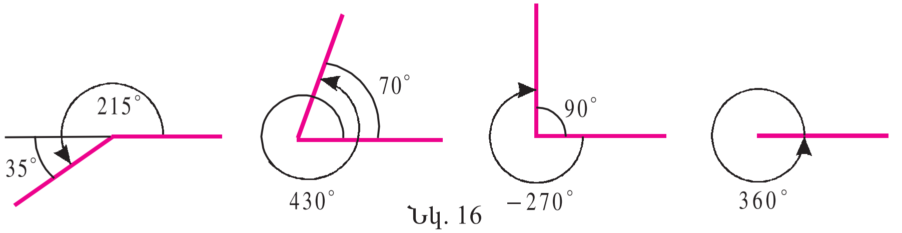
Այս դեպքում ասում են, որ OA ճառագայթը 30° պտույտից հետո գրավում է OB_1 դիրքը, իսկ -30° պտույտից հետո՝ OB_2 դիրքը: Այսինքն՝ առաջին դեպքում պտտման անկյունը 30° է, իսկ երկրորդ դեպքում՝ -30°:

Սահմանում: ***Պտույտի այն ուղղությունը, որը համընկնում է ժամացույցի սլաքների շարժման ուղղության հետ, անվանում են բացասական ուղղություն, իսկ հակառակ ուղղությունը՝ դրական:***

Ժամացույցի րոպեների սլաքը 30 րոպեի ընթացքում կատարում է -180° (կամ $-\pi$ ռադիան) պտույտ, այսինքն՝ պտտման անկյունը -180° է: Հաջորդ 30 րոպեի ընթացքում, պտտվելով ևս այդքան, այն հայտնվում է սկզբնական դիրքում: Գումարելով 60 րոպեի ընթացքում րոպեների սլաքի կատարած պտույտները՝ կստանանք, որ այդ ընթացքում կատարվել է -360° (կամ -2π ռադիան) պտույտ, իսկ սլաքը հայտնվել է նույն տեղում: Սլաքը նույն տեղում կհայտնվի յուրաքանչյուր 60 րոպեն մեկ անգամ: Հետևաբար՝ որպեսզի կարոդանանք պարզել ոչ միայն սլաքի պտույտի հետևանքով առաջացած նոր դիրքը, այլև կատարված պտույտների քանակն ու պտույտի ուղղությունը, նպատակահարմար է պտտման անկյունն արտահայտել կամայական թվով:

Նույն օրը ժամը 12-ին և ժամը 24-ին ժամ և րոպե ցույց տվող սլաքները գտնվում են նույն տեղում: Նշված ժամանակահատվածում (ժամը 12-ից մինչև 24-ը) ժամ ցույց տվող սլաքը կկատարի մեկ լրիվ պտույտ (իհարկե, բացասական ուղղությամբ), նրա պտտման անկյունը կլինի -2π ռադիան (-360°), իսկ րոպեների սլաքը կկատարի 12 պտույտ, նրա պտտման անկյունը կլինի -24π ռադիան (-4320°):

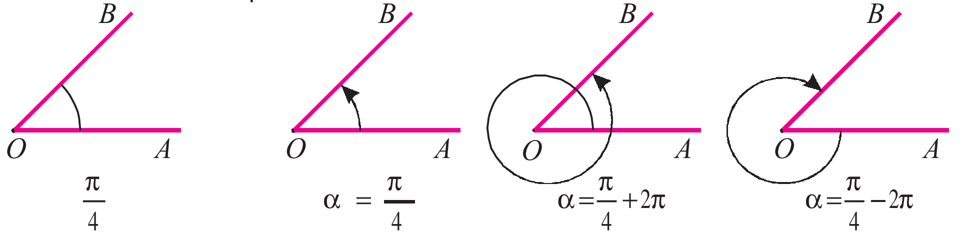
Նկ. 16-ում բերված են պտտման անկյունների օրինակներ:



Նկ. 16

Հաճախ «պտտման անկյուն» բառակապակցության փոխարեն օգտագործում են «անկյուն» բառը: Հասկանալի է, որ այն դեպքերում, երբ խոսքը «բացասական անկյան» կամ π ռադիանից մեծ «անկյան» մասին է, հասկանում են միայն պտտման անկյուն:

Դիտարկենք $\angle AOB = \frac{\pi}{4}$ անկյունը (նկ. 17, ա): Հասկանալի է, որ կան անվերջ թվով α անկյուններ, որոնցով OA ճառագայթը O կետի շուրջը պտտելով, կստանանք միևնույն՝ OB դիրքը: Օրինակ՝ $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ռադ, $\alpha = \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi\right)$ռադ, $\alpha = \left(\frac{\pi}{4} - 2\pi\right)$ռադ (նկ. 17, բ): Այդպիսի բոլոր α-ները գտնելու համար բավական է գտնել նրանցից մեկը, օրինակ՝ $\frac{\pi}{4}$-ը, և վերջինիս գումարել ամբողջ թվով 2π-եր, այսինքն՝ $\alpha = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$ ռադ, որտեղ $k \in \mathbf{Z}$:



ա) Նկ. 17 բ)

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ի՞նչ է մեկ ռադիանը և քանի՞ աստիճան է այն:
2. Աստիճանն ինչպե՞ս է արտահայտվում ռադիանով:
3. Քանի՞ ռադիան է՝ ա) ուղիղ անկյունը, բ) փռված անկյունը, գ) մեկ լրիվ պտույտը:
4. Պտտման ո՞ր ուղղությունն են անվանում դրական և որը՝ բացասական:
5. Ինչպիսի՞ թվերով են արտահայտվում պտտման անկյունները:
6. Ի՞նչ ենք հասկանում «390° անկյուն», «-7π ռադիան անկյուն» ասելով:

Առաջադրանքներ

101. Քանի՞ ռադիան է՝

ա) 90°-ը, բ) 60°-ը, գ) 300°-ը,
դ) 10°-ը, ե) 45°-ը, զ) 72°-ը,
է) 216°-ը, ը) -720°-ը, թ) 1200°-ը:

102. Քանի՞ աստիճան է՝

ա) 2π ռադ-ը, բ) $-\pi$ ռադ-ը, գ) $\frac{\pi}{5}$ ռադ-ը, դ) $\frac{3\pi}{5}$ ռադ-ը,
ե) $-\frac{7\pi}{12}$ ռադ-ը, զ) $-\frac{\pi}{36}$ ռադ-ը, է) $12{,}5\pi$ ռադ-ը, ը) $-6{,}25\pi$ ռադ-ը:

103. Ռադիաններով արտահայտել՝

ա) հավասարասրուն ուղղանկյուն եռանկյան անկյունները,

բ) հավասարակողմ եռանկյան անկյունները,

գ) ուղղանկյուն եռանկյան անկյունները, որի էջերից մեկի երկարությունը հավասար է ներքնաձիգի երկարության կեսին:

104. α անկյո՞ւնն է մեծ, թե՞ β անկյունը, եթե՝

ա) $\alpha=\frac{\pi}{2}$ ռադ, $\beta=85^\circ$, բ) $\alpha=\frac{\pi}{5}$ ռադ, $\beta=40^\circ$,
գ) $\alpha=\frac{\pi}{10}$ ռադ, $\beta=17^\circ$, դ) $\alpha=\frac{2\pi}{3}$ ռադ, $\beta=130^\circ$:

➤**105.** *OA* ճառագայթը, α անկյունով պտտվելով, հայտնվում է *OB* դիրքում: Քանի՞ աստիճան է *AOB* անկյունը, եթե՝

ա) $\alpha=250^\circ$, բ) $\alpha=18{,}2\pi$ ռադ, գ) $\alpha=-0{,}7\pi$ ռադ,
դ) $\alpha=-410^\circ$, ե) $\alpha=-900^\circ$, զ) $\alpha=121\pi$ ռադ:

➤**106.** *OA* ճառագայթը, α անկյունով պտտվելով, հայտնվում է *OB* դիրքում: Գտնել *OB* ուղղի կազմած անկյունները (ռադիաններով) կոորդինատային ուղիղների հետ, եթե՝

ա) $\alpha = 200^\circ$, բ) $\alpha = 0{,}7\pi$ ռադ, գ) $\alpha = -8{,}2\pi$ ռադ,
դ) $\alpha = -700^\circ$, ե) $\alpha = -520^\circ$, զ) $\alpha = 152{,}4\pi$ ռադ։

➤**107.** OA ճառագայթը, α անկյունով պտտվելով, հայտնվում է OB դիրքում: Գտնել այն ամենափոքր դրական անկյունը, որով պտտելիս OA-ն կհայտնվի նույն OB դիրքում, եթե՝

ա) $\alpha = 730^\circ$, բ) $\alpha = 19{,}5\pi$ ռադ, գ) $\alpha = -17{,}25\pi$ ռադ,
դ) $\alpha = -550^\circ$, ե) $\alpha = -10^\circ$, զ) $\alpha = 1221\pi$ ռադ։

➤**108.** OA ճառագայթն α անկյունով պտտելով՝ ստանում ենք OB ճառագայթը, իսկ β-ով պտտելով՝ OC ճառագայթը: Ո՞րն է մեծ $\angle AOB$-ն, թե՞ $\angle AOC$-ն, եթե՝

ա) $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ռադ, $\beta = -300^\circ$, բ) $\alpha = \frac{\pi}{5}$ ռադ, $\beta = -390^\circ$,

գ) $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ռադ, $\beta = 45^\circ$, դ) $\alpha = \frac{\pi}{5}$ ռադ, $\beta = -90^\circ$։

109. Ապացուցել, որ R շառավղով՝

ա) շրջանագծի α ռադիան աղեղի երկարությունը՝ $l = \alpha R$,

բ) շրջանի α ռադիան անկյունով սեկտորի մակերեսը՝ $S = \frac{\alpha R^2}{2}$։

110. O կենտրոնով և R շառավղով շրջանագծի AOB կենտրոնական անկյան մեծությունն արտահայտել ռադիաններով, եթե նրա հենման AB աղեղի երկարությունը հավասար է՝

ա) R, բ) $2R$, գ) $\frac{\pi}{4}R$, դ) $\frac{2\pi}{5}R$։

111. O կենտրոնով և R շառավղով շրջանագծի AOB կենտրոնական անկյան մեծությունն արտահայտել աստիճաններով, եթե նրա հենման AB աղեղի երկարությունը հավասար է՝

ա) $\frac{\pi}{2}R$, բ) $\frac{3\pi}{2}R$, գ) $\frac{3\pi}{4}R$, դ) $\frac{2\pi}{3}R$։

112. Գտնել շրջանագծի շառավիղը, եթե հայտնի է, որ նրա՝ 1,5 ռադիան մեծությամբ կենտրոնական անկյունը հենված է 15 սմ երկարությամբ աղեղի վրա:

113. Գտնել շրջանագծի շառավիղը, եթե հայտնի է, որ նրա՝ 2 ռադիան անկյունով սեկտորի մակերեսը 8 սմ^2 է:

114. 5 սմ շառավղով շրջանագծի AB լարի երկարությունը 5 սմ է: Գտնել AB աղեղի երկարությունը:

115. 10 սմ շառավղով շրջանագծի սեկտորի մակերեսը 25 սմ^2 է: Գտնել այդ սեկտորի պարագիծը:

116. Կետը դրական ուղղությամբ շարժվում է միավոր շառավղով շրջանագծով, որի կենտրոնը կոորդինատների սկզբնակետում է: Կետի անկյունային արագությունը (1 վայրկյանում պտտման անկյունը) 15 աստիճան/վրկ է, և շարժման սկզբում այն $A(1,0)$ կետում է: Գտնել կետի կոորդինատները շարժումն սկսելուց՝

ա) 2 վրկ անց, բ) 3 վրկ անց, գ) 10 վրկ անց, դ) 32 վրկ անց:

117. Ամեն տարի մարտ ամսվա վերջին շաբաթ՝ լույս կիրակի գիշերվա ժամը 2-ին Հայաստանի Հանրապետությունում անցնում են ամառային ժամանակի: Այսինքն՝ այդ պահին ժամացույցի սլաքները մեկ ժամ առաջ են տալիս: Այդ ընթացքում ի՞նչ պտույտ են կատարում ժամ և րոպե ցույց տվող սլաքները: Պատասխանն արտահայտել ռադիաններով և աստիճաններով:

118. Ամեն տարի հոկտեմբեր ամսվա վերջին շաբաթ՝ լույս կիրակի գիշերվա ժամը 3-ին Հայաստանի Հանրապետությունում անցնում են ձմեռային ժամանակի: Այսինքն՝ այդ պահին ժամացույցի սլաքները մեկ ժամ ետ են տալիս: Այդ ընթացքում ի՞նչ պտույտ են կատարում ժամ և րոպե ցույց տվող սլաքները: Պատասխանն արտահայտել ռադիաններով և աստիճաններով:

Կրկնության համար

➢119. Գտնել a_n թվաբանական պրոգրեսիայի ամենափոքր դրական անդամը, եթե՝

ա) $a_1 = -7$ և $d = 1{,}5$, բ) $a_2 = 15\pi$ և $a_4 = 11\pi$:

➢120. Գտնել a_n թվաբանական պրոգրեսիայի ամենամեծ բացասական անդամը, եթե

ա) $a_1 = 21$ և $d = -2{,}2$, բ) $a_4 = -8\pi$ և $a_{17} = 5\pi$:

➢121. Գտնել a_n թվաբանական պրոգրեսիայի այն անդամը, որը պատկանում է Δ միջակայքին.

ա) $a_n = 5 - 1{,}3(n-1)$, $\Delta = [-0{,}5;\, 0]$, բ) $a_n = \dfrac{\pi}{2}n$, $\Delta = (7\pi;\, 7{,}7\pi]$:

➢122. 4; 11; 18;... պրոգրեսիայի քանի՞ անդամ է գտնվում՝

ա) $[20; 50]$ միջակայքում, բ) $[60; 90]$ միջակայքում:

§2. Թվային արգումենտի եռանկյունաչափական ֆունկցիաները

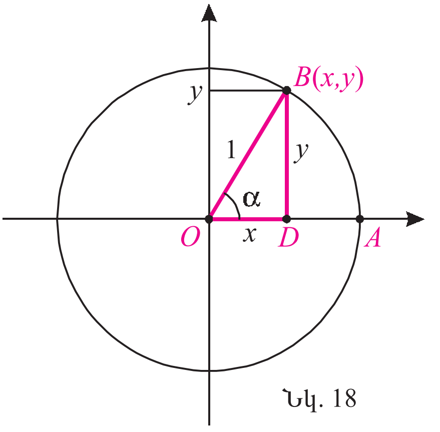
Կոորդինատային հարթության վրա դիտարկենք 1 շառավղով և (0;0) կենտրոնով շրջանագիծը (նկ. 18), որն այսուհետև կանվանենք ***միավոր շրջանագիծ***:

Հիշեցնենք, որ ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգում միավոր շրջանագծի հավասարումն է՝

$$x^2+y^2=1:$$

Միավոր շրջանագծի OA շառավիղը, որտեղ A-ն (1;0) կետն է, անվանենք ***սկզբնական շառավիղ***:

Ենթադրենք՝ OB շառավիղն OA սկզբնական շառավղի հետ կազմում է α սուր անկյուն: Այդ դեպքում B կետի աբսցիսը՝ x-ը, հավասար է OBD ուղղանկյուն եռանկյան OD էջի երկարությանը, իսկ օրդինատը՝ y-ը, BD էջի երկարությունն է: Ինչպես գիտեք երկրաչափության դասընթացից,



Նկ. 18

$$\sin\alpha=\frac{BD}{OB}=\frac{y}{1}=y,\qquad \cos\alpha=\frac{OD}{OB}=\frac{x}{1}=x,$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{BD}{OD}=\frac{y}{x},\qquad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{OD}{BD}=\frac{x}{y}:$$

Այսինքն՝ $\sin\alpha$-ն հավասար է B կետի օրդինատին, $\cos\alpha$-ն՝ աբսցիսին, $\operatorname{tg}\alpha$-ն՝ օրդինատի հարաբերությանն աբսցիսին, $\operatorname{ctg}\alpha$-ն՝ աբսցիսի հարաբերությանն օրդինատին:

Նման ձևով սահմանվում են կամայական α անկյան սինուսը, կոսինուսը, տանգենսը և կոտանգենսը:

Սահմանում: ***Դիցուք,OA սկզբնական շառավիղն O կետի շուրջը α անկյունով պտույտի հետևանքով գրավում է OB դիրքը.***

$\sin\alpha$ *կոչվում է B կետի օրդինատը,*

$\cos\alpha$ *կոչվում է B կետի աբսցիսը,*

$\operatorname{tg}\alpha$ *կոչվում է B կետի օրդինատի հարաբերությունն աբսցիսին,*

$\operatorname{ctg}\alpha$ *կոչվում է B կետի աբսցիսի հարաբերությունն օրդինատին:*

Այսպիսով՝ եթե B կետի կոորդինատներն են $(x;y)$, ապա

$$\boxed{\sin\alpha=y,\qquad \cos\alpha=x,\qquad \operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x},\qquad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y}:}$$

Սինուսը, կոսինուսը, տանգենսը և կոտանգենսը կոչվում են ***եռանկյունաչափական ֆունկցիաներ***:

Պարզ է, որ այս ձևով սահմանված եռանկյունաչափական ֆունկցիաները սուր անկյունների համար համընկնում են երկրաչափությունից մեզ հայտնի սինուսին, կոսինուսին, տանգենսին և կոտանգենսին:

Քանի որ միավոր շրջանագծի կամայական $B(x;y)$ կետի համար $-1\le x\le 1$ և $-1\le y\le 1$, սինուսի և կոսինուսի սահմանումից անմիջապես հետևում է, որ կամայական α-ի համար

$$-1\le \sin\alpha\le 1,\quad -1\le \cos\alpha\le 1:$$

Օրինակ 1: $\alpha=0^\circ$ դեպքում OB-ն համընկնում է OA-ին, և B կետը կունենա $x=1$, $y=0$ կոորդինատները: Հետևաբար՝

$$\sin 0^\circ=0,\ \cos 0^\circ=1,\ \mathrm{tg}\,0^\circ=0,\ \mathrm{ctg}\,0^\circ\text{-ը որոշված չէ:}$$

Պայմանավորվենք, որ այսուհետև, եթե α անկյան չափման միավորը ռադիանն է, ապա այն չենք գրում: Այսինքն՝ գրելով $\alpha=\frac{\pi}{2}$, հասկանում ենք՝ $\alpha=\frac{\pi}{2}$ ռադ և, հետևաբար, կգրենք՝ $\sin 0=0$, $\cos 0=1$, $\sin\frac{\pi}{2}=1$ (տե՛ս հաջորդ օրինակը):

Օրինակ 2: $\alpha=\frac{\pi}{2}$ դեպքում B կետի կոորդինատներն են՝ $x=0$, $y=1$: Հետևաբար՝

$$\sin\frac{\pi}{2}=1,\ \cos\frac{\pi}{2}=0,\ \mathrm{ctg}\frac{\pi}{2}=0,\ \mathrm{tg}\frac{\pi}{2}\text{-ը որոշված չէ:}$$

Օրինակ 3: $\alpha=\pi$ դեպքում B կետի կոորդինատներն են՝ $x=-1$, $y=0$: Հետևաբար՝

$$\sin\pi=0,\ \cos\pi=-1,\ \mathrm{tg}\,\pi=0,\ \mathrm{ctg}\,\pi\text{-ն որոշված չէ:}$$

Օրինակ 4: $\alpha=\frac{3\pi}{2}$ (կամ $\alpha=-\frac{\pi}{2}$) դեպքում B կետի կոորդինատներն են՝ $x=0$, $y=-1$: Ուրեմն՝

$$\sin\frac{3}{2}\pi=-1,\ \cos\frac{3}{2}\pi=0,\ \mathrm{ctg}\frac{3}{2}\pi=0,\ \mathrm{tg}\frac{3}{2}\pi\text{-ն որոշված չէ:}$$

Ինչպես արդեն նշել ենք, OA շառավիղն O կետի շուրջը α, $\alpha+2\pi$ և $\alpha-2\pi$ ռադիանով պտտելիս գրավում է միևնույն դիրքը: Հետևաբար՝

$$\sin(\alpha\pm 2\pi)=\sin\alpha,\ \cos(\alpha\pm 2\pi)=\cos\alpha,$$
$$\mathrm{tg}(\alpha\pm 2\pi)=\mathrm{tg}\,\alpha,\ \mathrm{ctg}(\alpha\pm 2\pi)=\mathrm{ctg}\,\alpha: \qquad (1)$$

Այս բանաձևերից հետևում է, որ կամայական α անկյան սինուսը, կոսինուսը, տանգենսը և կոտանգենսը գտնելու համար բավական է իմանալ 0-ից մինչև 2π ռադիան (0°-ից մինչև 360°) անկյունների եռանկյունաչափական ֆունկցիաների արժեքները:

Հաշվի առնելով 1-ից 4-րդ օրինակները և (1) բանաձևերը, կարող ենք ասել, որ (տե՛ս աղ. 1)՝

եթե $\alpha = 2\pi k$, $k \in Z$, ***ապա*** $\sin\alpha = 0$, $\cos\alpha = 1$, $\mathrm{tg}\,\alpha = 0$,

եթե $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$, ***ապա*** $\sin\alpha = 1$, $\cos\alpha = 0$, $\mathrm{ctg}\,\alpha = 0$,

եթե $\alpha = \pi + 2\pi k$, $k \in Z$, ***ապա*** $\sin\alpha = 0$, $\cos\alpha = -1$, $\mathrm{tg}\,\alpha = 0$,

եթե $\alpha = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$, ***ապա*** $\sin\alpha = -1$, $\cos\alpha = 0$, $\mathrm{ctg}\,\alpha = 0$,

եթե $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$, ***ապա*** $\mathrm{tg}\,\alpha$***-ն որոշված չէ,***

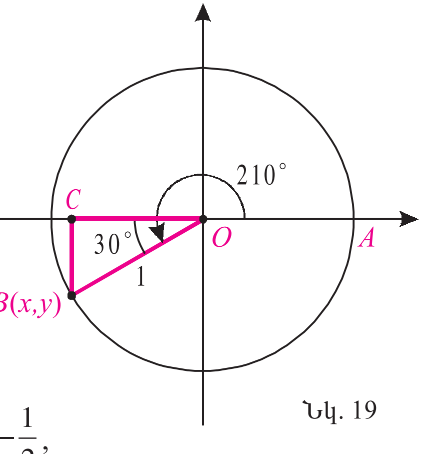
եթե $\alpha = \pi k$, $k \in Z$, ***ապա*** $\mathrm{ctg}\,\alpha$***-ն որոշված չէ:***

Աղյուսակ 1

α $(k \in Z)$	$2\pi k$	$\frac{\pi}{2} + 2\pi k$	$\pi + 2\pi k$	$\frac{3\pi}{2} + 2\pi k$
$\sin\alpha$	0	1	0	-1
$\cos\alpha$	1	0	-1	0
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	որոշված չէ	0	որոշված չէ
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	որոշված չէ	0	որոշված չէ	0

Օրինակ 5: Գտնենք 210° անկյան սինուսը, կոսինուսը, տանգենսը և կոտանգենսը:

Դիցուք, OA սկզբնական շառավիղն O կետի շուրջը 210° անկյունով պտույտի հետևանքով գրավում է OB դիրքը (նկ. 19):



Նկ. 19

Քանի որ $210^\circ = 180^\circ + 30^\circ$, ուրեմն՝ OBC ուղղանկյուն եռանկյան BOC անկյունը 30° է, և $BC = \frac{1}{2}$, $CO = \frac{\sqrt{3}}{2}$: Հետևաբար՝ B կետի կոորդինատներն են՝

$$x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad y = -\frac{1}{2},$$

որտեղից՝

$$\sin 210^\circ = -\frac{1}{2}, \quad \cos 210^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \mathrm{tg}\,210^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \mathrm{tg}\,210^\circ = \sqrt{3}:$$

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ի՞նչ է միավոր շրջանագիծը:
2. Սահմանեք կամայական α անկյան եռանկյունաչափական ֆունկցիաները:
3. Որո՞նք են եռանկյունաչափական ֆունկցիաները:
4. Ի՞նչ կապ կա երկրաչափությունից հայտնի սուր անկյան սինուս, կոսինուս, տանգենս և կոտանգենս հասկացությունների և այս պարագրաֆում սահմանված եռանկյունաչափական ֆունկցիաների միջև:
5. Ի՞նչ է նշանակում «$\sin 7$» արտահայտությունը:
6. Ո՞ր անկյունների համար են որոշված սինուսը և կոսինուսը:
7. Գոյություն ունի՞ արդյոք այնպիսի α, որ $\sin\alpha=\sqrt{2}$:
8. Գոյություն ունի՞ արդյոք այնպիսի α, որ $\cos\alpha=-2$:
9. Ո՞ր անկյունների համար է որոշված կոտանգենսը:
10. Տանգենսը ո՞ր անկյունների համար որոշված չէ:
11. Որո՞նք են եռանկյունաչափական ֆունկցիաների արժեքները 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ անկյունների դեպքում:
12. Ինչի՞ են հավասար $\sin(\alpha\pm 2\pi)$-ն, $\cos(\alpha\pm 2\pi)$-ն, $\mathrm{tg}(\alpha\pm 2\pi)$-ն, $\mathrm{ctg}(\alpha\pm 2\pi)$-ն:

Առաջադրանքներ

123. Դիցուք, OA սկզբնական շառավիղն O կետի շուրջը α անկյունով պտույտի արդյունքում գրավում է OB դիրքը: Օգտվելով հավասարասրուն ուղղանկյուն եռանկյան հատկություններից՝ գտեք B կետի կոորդինատները, եթե՝

ա) $\alpha=45^\circ$, բ) $\alpha=\frac{3\pi}{4}$, գ) $\alpha=-\frac{\pi}{4}$, դ) $\alpha=-135^\circ$:

124. Դիցուք, OA սկզբնական շառավիղն O կետի շուրջը α անկյունով պտույտի հետևանքով գրավում է OB դիրքը: Օգտվելով 30° սուր անկյունով ուղղանկյուն եռանկյան հատկություններից՝ գտեք B կետի կոորդինատները, եթե՝

ա) 60°, բ) $\frac{\pi}{6}$, գ) 120°, դ) $\frac{5\pi}{6}$:

125. Օգտվելով նախորդ երկու խնդիրներից՝ լրացնել հետևյալ աղյուսակը:

	0° 0	30° $\frac{\pi}{6}$	45° $\frac{\pi}{4}$	60° $\frac{\pi}{3}$	90° $\frac{\pi}{2}$	120° $\frac{2\pi}{3}$	135° $\frac{3\pi}{4}$	150° $\frac{5\pi}{6}$	180° π
$\sin\alpha$									
$\cos\alpha$									
$\mathrm{tg}\,\alpha$									
$\mathrm{ctg}\,\alpha$									

126. Գտնել արժեքը.

ա) $\sin\frac{9\pi}{4}$, բ) $\cos\frac{19\pi}{4}$, գ) $\operatorname{tg}\frac{13\pi}{6}$,

դ) $\operatorname{tg}(-570^\circ)$, ե) $\sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$, զ) $\cos 810^\circ$:

127. Համեմատել a և b թվերը, եթե՝

ա) $a=\sin\frac{\pi}{3}$, $b=\cos\frac{\pi}{6}$, բ) $a=\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3}$, $b=\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{3}$,

գ) $a=\sin\frac{5\pi}{6}$, $b=\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$, դ) $a=\cos\frac{2\pi}{3}$, $b=\cos\frac{3\pi}{4}$:

Հաշվել արտահայտության արժեքը (128-130).

128. ա) $\sin\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{4}$, բ) $\cos\pi+2\cos\frac{\pi}{3}$,

գ) $2\sin\frac{\pi}{3}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$, դ) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\cdot\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{3}+\sin\pi$:

129. ա) $\sin^2\frac{3\pi}{4}+\cos^2\frac{3\pi}{4}$, բ) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{6}\cdot\sin\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{2}$,

գ) $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{6}\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}$, դ) $4\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{3\pi}{4}\sin\cdot\frac{3\pi}{4}$:

130. ա) $2\sin 30^\circ+\sqrt{3}\operatorname{tg}60^\circ$, բ) $7\sqrt{3}\cos 30^\circ-3\sin 150^\circ$,

գ) $\operatorname{tg}135^\circ\cdot\cos 120^\circ+3\cos 60^\circ$, դ) $\operatorname{ctg}60^\circ\cdot\operatorname{tg}120^\circ+\cos 150^\circ\cdot\sin 60^\circ$:

➤**131.** Գտնել արտահայտության մեծագույն և փոքրագույն արժեքները.

ա) $2\sin\alpha$, բ) $-3\cos 2\alpha$, գ) $1+2\cos\alpha$,

դ) $5+3\sin\alpha$, ե) $3-\sin^2\alpha$, զ) $5\cos^2\alpha-2$:

* **132.** Օգտվելով 109-րդ խնդրից՝ ապացուցել, որ.

ա) $\sin\alpha<\alpha$, եթե $\alpha>0$; բ) $tg\alpha>\alpha$, եթե $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$:

➤**133.** Նշել t-ի երկու արժեք, որոնց դեպքում.

ա) $\sin t=\frac{1}{2}$, բ) $\cos t=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, գ) $\operatorname{tg}t=-1$,

դ) $\operatorname{ctg}t=1$, ե) $\sin t+\cos t=0$, զ) $\sin t-\cos t=0$:

134. Դիցուք, OA սկզբնական շառավիղն O կետի շուրջը α անկյունով պտույտի հետևանքով գրավում է OB դիրքը: Գտնել B կետի կոորդինատները, եթե՝

ա) $\sin\alpha=1$, $\cos\alpha=0$, բ) $\sin\alpha=0{,}6$, $\cos\alpha=0{,}8$:

գ) $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}$, դ) $\cos\alpha = -\frac{7}{11}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{7\sqrt{2}}{12}$:

Համեմատել a և b թվերը (135-136).

135. ա) $a = \sin 25^\circ$, $b = \sin 35^\circ$, բ) $a = \cos 25^\circ$, $b = \cos 35^\circ$,

գ) $a = \sin\frac{3\pi}{8}$, $b = \sin 35^\circ$, դ) $a = \cos 82^\circ$, $b = \cos\frac{\pi}{3}$:

136. ա) $a = \sin 27^\circ$, $b = \cos 27^\circ$, բ) $a = \cos 73^\circ$, $b = \sin 73^\circ$,

գ) $a = \sin\frac{\pi}{5}$, $b = \cos\frac{\pi}{5}$, դ) $a = \sin\frac{2\pi}{5}$, $b = \cos 72^\circ$:

Կրկնության համար

137. Լուծել անհավասարումների համակարգը.

ա) $\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \le 0 \\ 2x - 3 < 0 \end{cases}$, բ) $\begin{cases} x^2 + 7x + 12 \ge 0 \\ 2x + 10 > 0 \end{cases}$:

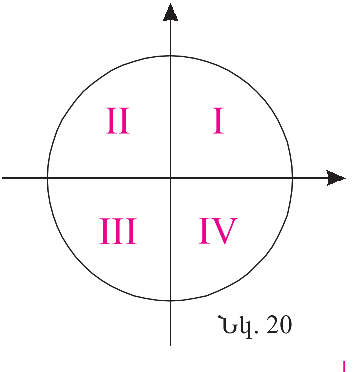
138. Լուծել անհավասարումը.

ա) $\frac{5}{x-6} \le \frac{2}{x+1}$, բ) $\frac{3}{2-x} \ge \frac{1}{x+2}$:

§3. Եռանկյունաչափական ֆունկցիաների նշաններն ըստ քառորդների

Այս պարագրաֆում կպարզենք, թե ինչ նշաններ ունեն $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ մեծությունները՝ կախված α-ից:

Կոորդինատային հարթության քառորդները համարակալենք այնպես, ինչպես ցույց է տրված 20-րդ նկարում: Մասնավորապես, առաջին քառորդն այն կետերի բազմությունն է, որոնց կոորդինատները դրական են:



Նկ. 20

Եթե սկզբնական շառավիղն α անկյունով պտույտի հետևանքով հայտնվում է I քառորդում, ասում են, որ α-ն պատկանում է I քառորդին, կամ α-ն գտնվում է I քառորդում: Հանգունորեն սահմանվում է մյուս քառորդներին պատկանելությունը:

Աղյուսակում նշված են որոշ միջակայքերին պատկանող պտտման անկյունների քառորդները:

Միջակայքը ռադիաններով	Միջակայքն աստիճաններով	Քառորդը
$(0;\ \pi/2)$	$(0^\circ;\ 90^\circ)$	I
$(\pi/2;\ \pi)$	$(90^\circ;\ 180^\circ)$	II
$(\pi;\ 3\pi/2)$	$(180^\circ;\ 270^\circ)$	III
$(3\pi/2;\ 2\pi)$	$(270^\circ;\ 360^\circ)$	IV

Քանի որ 2π կամ -2π անկյունով պտույտից հետո շառավիղը հայտնվում է նույն տեղում, ուրեմն կամայական k ամբողջ թվի համար $\alpha+2\pi k$ անկյունով պտույտի հետևանքով սկզբնական շառավիղը կհայտնվի նույն դիրքում, որտեղ այն գտնվում էր α անկյունով պտույտից հետո: Հետևաբար՝ $\alpha+2\pi k$ անկյունները բոլոր ամբողջ k-երի դեպքում այն քառորդում են, որտեղ α-ն է:

Օրինակ 1: $\frac{\pi}{4}$-ը, $\frac{9\pi}{4}$-ը և $-\frac{7\pi}{4}$-ը առաջին քառորդում են, իսկ $\frac{6\pi}{5}$-ը և $-\frac{4\pi}{5}$-ը՝ երրորդ:

$\mathbf{0},\ \pm\boldsymbol{\frac{\pi}{2}},\ \pm\boldsymbol{\pi},\ \pm\boldsymbol{\frac{3\pi}{2}},\ \pm\mathbf{2\pi}, \ldots$ ***անկյունները ոչ մի քառորդի չեն պատկանում:***

Եթե α անկյան չափման միավորը ռադիանն է, ապա նրա քառորդը որոշելու համար անհրաժեշտ է α-ից մի քանի անգամ հանելով կամ գումարելով 2π՝ ստանալ մի թիվ 0-ի և 2π-ի միջև: Կախված այն բանից, թե

$$\left(0;\frac{\pi}{2}\right),\ \left(\frac{\pi}{2};\pi\right),\ \left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right),\ \left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right)$$

միջակայքերից որին է պատկանում այդ թիվը, α-ն կգտնվի համապատասխանաբար I, II, III, IV քառորդում:

Օրինակ 2: Պարզենք, թե որ քառորդին է պատկանում $12{,}25\pi$-ն: Քանի որ $12{,}25\pi-6\cdot2\pi=0{,}25\pi$ և $0<0{,}25\pi<0{,}5\pi$, ուրեմն՝ $12{,}25\pi$-ն I քառորդում է:

Օրինակ 3: Այժմ պարզենք $12{,}25$-ի քառորդը:

π-ի մոտավոր արժեքն ընդունելով $3{,}14$, կարող ենք համոզվել, որ $1{,}5\pi<12{,}25-2\pi<2\pi$: Հետևաբար՝ $12{,}25$-ը IV քառորդում է:

Հանգունորեն հանելով կամ գումարելով ամբողջ թվով 360°, գտնում ենք α անկյան քառորդը, եթե չափման միավորն աստիճանն է: Օրինակ, 1390°-ը չորրորդ քառորդում է, քանի որ $1390-3\cdot360=310$ և $270<310<360$:

Քանի որ առաջին քառորդում կետի աբսցիսն ու օրդինատը դրական են, ուրեմն՝

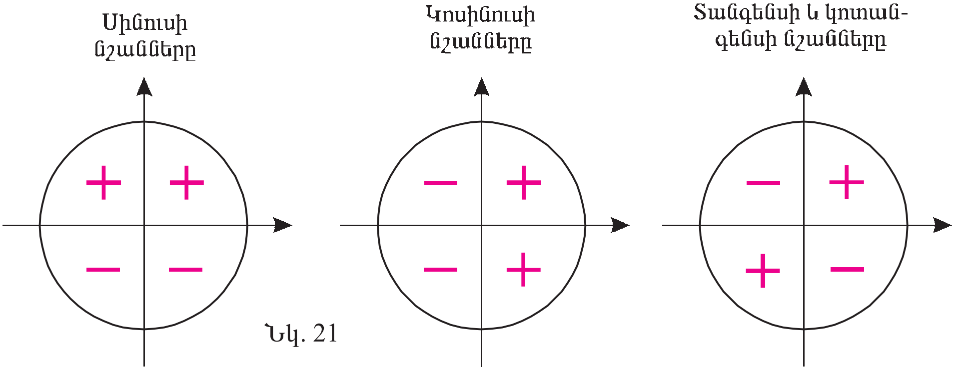
առաջին քառորդի α-ների համար **sinα, cosα, tgα, ctgα** ***մեծությունները դրական են:***

Երկրորդ քառորդում կետի աբսցիսը բացասական է, իսկ օրդինատը՝ դրական: Հետևաբար՝

երկրորդ քառորդում սինուսը դրական է, իսկ կոսինուսը, տանգենսը և կոտանգենսը՝ բացասական:

Նման դատողություններով կարող ենք համոզվել, որ

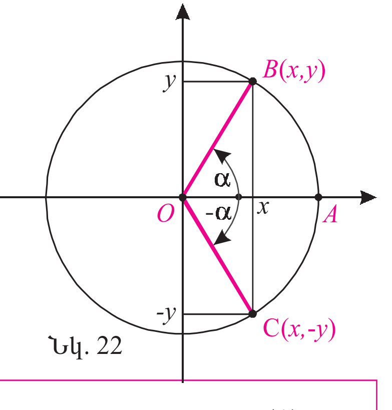
երրորդ քառորդում դրական են տանգենսը և կոտանգենսը, բացասական՝ սինուսը և կոսինուսը:
Չորրորդ քառորդում դրական է կոսինուսը, բացասական՝ սինուսը, տանգենսը և կոտանգենսը:



Նկ. 21

21-րդ նկարում բերված են եռանկյունաչափական ֆունկցիաների նշաններն ըստ քառորդների:

Դիցուք, *OA* սկզբնական շառավիղն α անկյունով պտտվելիս հայտնվում է *OB* դիրքում, իսկ $-\alpha$ անկյունով պտտվելիս՝ *OC* դիրքում (նկ. 22): Ակնհայտ է, որ *B* և *C* կետերի աբսցիսներն իրար հավասար են, իսկ օրդինատները՝ հակադիր: Հետևաբար՝



Նկ. 22

$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha\,,$$
$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha\,,\quad \mathrm{tg}(-\alpha)=-\mathrm{tg}\alpha\,,\quad \mathrm{ctg}(-\alpha)=-\mathrm{ctg}\alpha : \qquad (1)$$

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ինչպե՞ս են որոշվում կոորդինատային հարթության քառորդները:
2. Ի՞նչ նշաններ ունեն հարթության վրա կետի կոորդինատները, եթե կետը՝

   ա) I քառորդում է, բ) II քառորդում է,

   գ) III քառորդում է, դ) IV քառորդում է:
3. Նույն քառորդո՞ւմ են արդյոք α-ն և $\alpha+4\pi$-ն:
4. Ո՞ր քառորդում են 0, $\pm\frac{\pi}{2}$, $\pm\pi$, $\pm\frac{3\pi}{2}$, $\pm 2\pi$ անկյունները:
5. Ինչպե՞ս են որոշում α-ի քառորդը:
6. Նշեք եռանկյունաչափական ֆունկցիաների նշաններն ըստ քառորդների:
7. Ինչի՞ են հավասար $\sin(-\alpha)$-ն, $\cos(-\alpha)$-ն, $\mathrm{tg}(-\alpha)$-ն, $\mathrm{ctg}(-\alpha)$-ն:

Առաջադրանքներ

Ո՞ր քառորդում են α-ն, եթե (139 -142)՝

139. ա) $\alpha=85^\circ$, բ) $\alpha=185^\circ$, գ) $\alpha=-450^\circ$,

դ) $\alpha=790^\circ$, ե) $\alpha=-18^\circ$, զ) $\alpha=298^\circ$:

140. ա) $\alpha=\frac{3\pi}{4}$, բ) $\alpha=\frac{5\pi}{4}$, գ) $\alpha=-\frac{\pi}{10}$,

➤ դ) $\alpha=1{,}5$, ե) $\alpha=1{,}5\pi$, զ) $\alpha=\frac{11\pi}{6}$:

141. ա) $\alpha=12{,}25\pi$, ➤բ) $\alpha=7{,}5$, գ) $\alpha=-6{,}25\pi$,

դ) $\alpha=9{,}8\pi$, ե) $\alpha=-3{,}14\pi$, ➤զ) $\alpha=3{,}2$:

142. ա) $2{,}5\pi<\alpha<2{,}7\pi$, բ) $-0{,}7\pi<\alpha<-0{,}6\pi$,

գ) $4{,}2\pi<\alpha<4{,}5\pi$, ➤դ) $1<\alpha<\sqrt{2}$:

143. Ո՞ր քառորդում է $\frac{\alpha}{2}$-ը, եթե՝

ա) $\pi<\alpha<2\pi$, բ) $-3\pi<\alpha<-2\pi$, գ) $2\pi<\alpha<3\pi$,

դ) $360^\circ<\alpha<540^\circ$, ե) $-360^\circ<\alpha<-180^\circ$, զ) $180^\circ<\alpha<360^\circ$:

Ո՞ր քառորդում է α-ն, եթե (144-145).

➤**144.** ա) $\cos\alpha>0$, $\mathrm{tg}\,\alpha>0$, բ) $\cos\alpha<0$, $\mathrm{ctg}\,\alpha>0$,

գ) $\sin\alpha>0$, $\mathrm{tg}\,\alpha<0$, դ) $\mathrm{ctg}\,\alpha<0$, $\cos\alpha<0$,

ե) $\sin\alpha<0$, $\cos\alpha>0$, զ) $\cos\alpha>0$, $\mathrm{tg}\,\alpha<0$:

***145.** ա) $5\sin\alpha+\sqrt{3\cos\alpha}=0$, բ) $2\,\mathrm{tg}\,\alpha+\sqrt{-7\cos\alpha}=0$,

գ) $|\cos\alpha|=\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha<0$, դ) $|\sin\alpha|=\sin\alpha$, $\mathrm{ctg}\,\alpha<0$:

146. Ի՞նչ նշան ունեն $\sin\alpha$-ն, $\cos\alpha$-ն, $\operatorname{tg}\alpha$-ն և $\operatorname{ctg}\alpha$-ն, եթե՝

ա) $\alpha = 158^\circ$, բ) $\alpha = 1{,}3\pi$, գ) $\alpha = 0{,}3\pi$, դ) $\alpha = 355^\circ$:

Պարզել արտահայտության նշանը (147-149).

147. ա) $\sin 25^\circ$, բ) $\cos(-38^\circ)$, գ) $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{8}$,

դ) $\operatorname{ctg} 210^\circ$, ե) $\operatorname{ctg}\frac{18\pi}{7}$, զ) $\cos 13{,}6\pi$:

148. ա) $\sin 89^\circ \cdot \operatorname{tg} 91^\circ$, բ) $\cos\frac{\pi}{10} \cdot \sin\frac{7\pi}{3}$, գ) $\operatorname{tg} 19^\circ \cdot \cos 119^\circ$,

դ) $\sin 122^\circ \cdot \cos 390^\circ$, ե) $\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{8} \cdot \sin\frac{8\pi}{7}$, զ) $\cos\frac{11\pi}{5} \cdot \operatorname{tg}\frac{5\pi}{11}$:

149. ա) $(2 - \sin 112^\circ)\cos\frac{9}{8}\pi$, բ) $(\cos 25^\circ - 3)\operatorname{ctg} 132^\circ$:

150. Գտնել արտահայտության նշանը, եթե հայտնի է, որ α-ն սուր անկյուն է:

ա) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$, բ) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$, գ) $\operatorname{tg}(\pi - \alpha)$,

դ) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, ե) $\operatorname{ctg}(2\pi - \alpha)$, զ) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$:

➢**151.** Գտնել արտահայտության արժեքը.

ա) $\sin(-30^\circ)$, բ) $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$, գ) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$,

դ) $\operatorname{tg}\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$, ե) $\operatorname{ctg}(-135^\circ)$, զ) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$:

➢**152.** Գտնել α անկյան սինուսը, կոսինուսը, տանգենսը և կոտանգենսը, եթե՝

ա) $\alpha = \frac{25\pi}{6}$, բ) $\alpha = 840^\circ$, գ) $\alpha = -420^\circ$,

դ) $\alpha = -\frac{3\pi}{4}$, ե) $\alpha = \frac{7\pi}{6}$, զ) $\alpha = \frac{11\pi}{4}$:

➢**153.** Հաշվել արտահայտության արժեքը.

ա) $\dfrac{\operatorname{ctg}^2\frac{5\pi}{6} - 2\sin\frac{2\pi}{3}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} + \sqrt{2}\cos\frac{3\pi}{4}}$, բ) $\dfrac{2\cos^2(-\pi) + \sqrt{2}\operatorname{tg}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}{\sin^2\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \sqrt{3}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$:

Կրկնության համար

➢**154.** Ապացուցել հավասարությունը.

ա) $\sqrt{11 - 6\sqrt{2}} + \sqrt{11 + 6\sqrt{2}} = 6$, բ) $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} - \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = -2$:

➢**155.** Գտնել՝

ա) $\sqrt{(a+15)(6-a)}$ արտահայտության արժեքը, եթե $\sqrt{a+15}+\sqrt{6-a}=5$,

բ) $\sqrt{25-a}+\sqrt{9-a}$ արտահայտության արժեքը, եթե $\sqrt{25-a}-\sqrt{9-a}=2$,

գ) a^2+a^{-2} արտահայտության արժեքը, եթե $a-\dfrac{1}{a}=4$,

դ) $27a^3+64a^{-3}$ արտահայտության արժեքը, եթե $3a+4a^{-1}=8$:

§4. Հիմնական եռանկյունաչափական նույնությունները

Դիցուք, սկզբնական շառավիղն α անկյունով պտտելուց ստացված շառավղի ծայրակետի կոորդինատներն են՝ x և y: Համաձայն եռանկյունաչափական ֆունկցիաների սահմանման՝

$$\sin\alpha = y,\ \cos\alpha = x,\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x},\ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}:$$

Այստեղից հետևում է, որ՝

$$\mathbf{tg}\boldsymbol{\alpha} = \frac{\mathbf{sin}\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{cos}\boldsymbol{\alpha}}, \qquad (1)$$

$$\mathbf{ctg}\boldsymbol{\alpha} = \frac{\mathbf{cos}\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{sin}\boldsymbol{\alpha}}, \qquad (2)$$

$$\mathbf{tg}\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{ctg}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{1}: \qquad (3)$$

Նշենք, որ այս հավասարությունները ճիշտ են միայն թույլատրելի արժեքների դեպքում: Այսպես՝ (1) հավասարությունը ճիշտ է, երբ $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2}+\pi k$, (2)-ը ճիշտ է, երբ $\alpha \neq \pi k$, իսկ (3)-ը ճիշտ է, երբ որոշված են $\operatorname{tg}\alpha$-ն ($\alpha \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$) և $\operatorname{ctg}\alpha$-ն ($\alpha \neq \pm\dfrac{\pi}{2}, \pm\dfrac{3}{2}\pi, \ldots$), այսինքն՝ $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2}k$, $k \in \mathbf{Z}$:

Այնուհետև, հաշվի առնելով, որ $B(x; y)$ կետը գտնվում է միավոր շրջանագծի վրա, այսինքն՝ $x^2+y^2=1$, որ կամայական α-ի համար կստանանք՝

$$\mathbf{sin}^2\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{cos}^2\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{1}: \qquad (4)$$

Այս նույնության բոլոր անդամները բաժանելով $\cos^2\alpha$-ի (եթե $\cos\alpha \neq 0$), ստանում ենք՝

$$1+\mathbf{tg}^2\boldsymbol{\alpha}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{cos}^2\boldsymbol{\alpha}}: \qquad (5)$$

Իսկ եթե (4) նույնության բոլոր անդամները բաժանենք $\sin^2\alpha$-ի (եթե $\sin\alpha\neq 0$), կստանանք՝

$$1+\mathbf{ctg}^2\boldsymbol{\alpha}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{sin}^2\boldsymbol{\alpha}}: \qquad (6)$$

Ստացված (1)-(6) բանաձևերը, որոնք առնչություններ են միևնույն արգումենտի (անկյան) եռանկյունաչափական ֆունկցիաների միջև, կոչվում են ***հիմնական եռանկյունաչափական նույնություններ***:

(3) նույնությունը հնարավորություն է տալիս գտնելու $\mathrm{tg}\,\alpha$-ն, եթե հայտնի է $\mathrm{ctg}\,\alpha$-ն և հակառակը:

Օրինակ 1: Ենթադրենք՝ $\mathrm{ctg}\,\alpha=2$:

Օգտվելով (3) նույնությունից՝ ստանում ենք՝ $\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{1}{\mathrm{ctg}\,\alpha}=\frac{1}{2}$:

Փորձենք գտնել նաև $\sin\alpha$-ն և $\cos\alpha$-ն: Կիրառելով (5) և (6) նույնությունները՝ ստանում ենք.

$$\sin^2\alpha=\frac{1}{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}=\frac{1}{1+4}=0{,}2$$

և

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}=\frac{1}{1+0{,}25}=0{,}8:$$

Այստեղից $\sin\alpha$-ն և $\cos\alpha$-ն որոշելու համար անհրաժեշտ է իմանալ նաև դրանց նշանները: Դրա համար բավական է իմանալ α անկյան քառորդը: Օրինակ՝ եթե α-ն առաջին քառորդում է, ապա՝ $\sin\alpha=\sqrt{0{,}2}$, $\cos\alpha=\sqrt{0{,}8}$, իսկ եթե α-ն երրորդ քառորդում է, ապա՝ $\sin\alpha=-\sqrt{0{,}2}$, $\cos\alpha=-\sqrt{0{,}8}$:

Օրինակ 2: Դիցուք, $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ և $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$: Գտնենք $\cos\alpha$-ն, $\mathrm{tg}\,\alpha$-ն, $\mathrm{ctg}\,\alpha$-ն:

Ըստ պայմանի՝ α-ն առաջին քառորդում է: Հետևաբար՝ նրա կոսինուսը դրական է, և

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\frac{4}{5}:$$

Կիրառելով (1) և (3) նույնությունները՝ կստանանք՝

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{3}{4},\ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{4}{3}:$$

Օրինակ 3: Դիցուք, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}$ և $13\pi < \alpha < 13{,}25\pi$: Գտնենք $\sin\alpha$-ն, $\cos\alpha$-ն և $\operatorname{ctg}\alpha$-ն:

Նախ, համաձայն (3)-ի, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = 2{,}4$: Քանի որ $\pi < \alpha - 6\cdot 2\pi < \frac{3\pi}{2}$, ուրեմն α-ն երրորդ քառորդում է, որտեղ կոսինուսը և սինուսը բացասական են: Կիրառելով (5), ապա (4) նույնությունները՝ կստանանք՝

$$\cos\alpha = -\sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = -\sqrt{\frac{1}{1+\frac{25}{144}}} = -\sqrt{\frac{144}{169}} = -\frac{12}{13},$$

$$\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{144}{169}} = -\frac{5}{13}:$$

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Որո՞նք են հիմնական եռանկյունաչափական նույնությունները:
2. Ապացուցեք $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ և $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ նույնությունները:
3. Հաշվեք $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha$-ն:
4. Ապացուցեք $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ նույնությունը:
5. Ապացուցեք $1+\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ և $1+\operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$ նույնությունները:
6. Դիցուք, գիտեք α անկյան եռանկյունաչափական ֆունկցիաներից մեկի արժեքը: Դա բավարա՞ր է արդյոք α անկյան մյուս եռանկյունաչափական ֆունկցիաների արժեքները հաշվելու համար: Եթե ոչ, ապա էլ ի՞նչ է պետք իմանալ մյուս եռանկյունաչափական ֆունկցիաների արժեքները հաշվելու համար:

Առաջադրանքներ

156. Ապացուցեք, որ կամայական α անկյան սինուսը և կոսինուսը միաժամանակ զրո լինել չեն կարող:

157. Դիցուք, $|b| \le 1$: Դիտարկելով $y = b$ ուղղի և միավոր շրջանագծի հատման կետերը՝ ապացուցեք, որ գոյություն ունի այնպիսի α, որ $\sin\alpha = b$:

158. Դիցուք, $|b| \le 1$: Դիտարկելով $x = b$ ուղղի և միավոր շրջանագծի հատման կետերը՝ ապացուցեք, որ գոյություն ունի այնպիսի α, որ $\cos\alpha = b$:

➢**159.** Ապացուցեք, որ եթե $a^2+b^2=1$, ապա գոյություն ունի այնպիսի α, որ $\sin\alpha=a$ և $\cos\alpha=b$:

➢**160.** Գոյություն ունի՞ արդյոք այնպիսի α, որ՝

ա) $\sin\alpha=0{,}4$ և $\cos\alpha=0{,}4$, բ) $\sin\alpha=0{,}3$ և $\cos\alpha=0{,}7$,

գ) $\sin\alpha=0{,}6$ և $\cos\alpha=0{,}8$, դ) $\sin\alpha=-0{,}6$ և $\cos\alpha=0{,}8$:

Օգտվելով հիմնական եռանկյունաչափական նույնություններից՝ պարզեցնել արտահայտությունը (161-163).

161. ա) $1-\cos^2\alpha$, բ) $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-1$,

գ) $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha$, դ) $\operatorname{tg}\beta\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{tg}^2\beta$:

162. ա) $\dfrac{\sin\alpha-\sin^3\alpha}{\cos\alpha-\cos^3\alpha}$, բ) $\dfrac{\sin^3\alpha-\sin^5\alpha}{\cos^3\alpha-\cos^5\alpha}$,

գ) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha-\cos^2\alpha}{\sin\alpha}$, դ) $\dfrac{1-\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha$:

163. ա) $\dfrac{\operatorname{tg}\beta\operatorname{ctg}\beta-\sin^2\beta}{\operatorname{ctg}\beta}$, բ) $\cos^2\beta\left(1+\operatorname{tg}^2\beta\right)-\sin^2\beta$,

գ) $\operatorname{ctg}^2\alpha+\left(1+\operatorname{tg}^2\alpha\right)\cos^2\alpha$, դ) $\cos^2\alpha\left(\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}+1\right)+\operatorname{tg}^2\alpha$:

Ապացուցեք, որ թույլատրելի արժեքների տիրույթում արտահայտության արժեքը կախված չէ α-ից (164-165):

164. ա) $\dfrac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha+1}{\sin^2\alpha}$, բ) $\dfrac{\cos^4\alpha-\sin^4\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$,

գ) $(\cos\alpha+\sin\alpha)^2-2\sin\alpha\cos\alpha$, դ) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$:

165. ա) $\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}+\dfrac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$, բ) $\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}+\dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}-\dfrac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$:

Ապացուցել նույնությունը (166-167):

166. ա) $(\sin\beta-\cos\beta)^2+(\sin\beta+\cos\beta)^2=2$, բ) $(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)^2-(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha)^2=4$,

գ) $\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}+\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{\cos\alpha}$, դ) $\dfrac{\operatorname{tg}^2x-1}{\operatorname{tg}^2x+1}+\cos^2x=\sin^2x$:

➢**167.** ա) $\dfrac{\sin^3x+\cos^3x}{\cos x+\sin x}-\sin x\cos x=(\cos x-\sin x)^2$,

բ) $\dfrac{\cos^3x-\sin^3x}{\cos x-\sin x}-\sin x\cos x=1$, գ) $\dfrac{1-2\sin z\cos z}{\sin z-\cos z}=\sin z-\cos z$:

168. Գտնել α անկյան մնացած եռանկյունաչափական ֆունկցիաների արժեքները, եթե հայտնի է, որ՝

ա) $\cos\alpha = 0{,}8$, և α-ն չորրորդ քառորդի անկյուն է,

բ) $\sin\alpha = \dfrac{5}{13}$, և α-ն երկրորդ քառորդի անկյուն է,

գ) $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}75$, և α-ն երրորդ քառորդի անկյուն է,

դ) $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{7}{24}$, և α-ն առաջին քառորդի անկյուն է:

169. Գտնել a պարամետրը, եթե հայտնի է, որ տրված հավասարման արմատները որևէ անկյան սինուսը և կոսինուսն են.

ա) $25x^2 - 5x + a = 0$, բ) $ax^2 - 5x - 12 = 0$:

170. Գտնել՝

ա) $\cos\alpha$-ն, եթե $\sin\alpha = \dfrac{9}{41}$ և $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$,

բ) $\operatorname{tg}\alpha$-ն, եթե $\cos\alpha = \dfrac{8}{17}$ և $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < 0$,

գ) $\operatorname{ctg}\alpha$-ն, եթե $\sin\alpha = -0{,}6$ և $-\pi < \alpha < -\dfrac{\pi}{2}$,

դ) $\sin\alpha$-ն, եթե $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{8}{15}$ և $-\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < -\pi$:

➢**171.** Հաշվել՝

ա) $\dfrac{7}{\sqrt{40}}\sin\alpha$-ն, եթե $\cos\alpha = -\dfrac{3}{7}$ և $3\pi < \alpha < \dfrac{7\pi}{2}$,

բ) $-15\operatorname{tg}\alpha$-ն, եթե $\cos\alpha = -\dfrac{15}{17}$ և $\dfrac{9\pi}{2} < \alpha < 5\pi$,

գ) $\dfrac{15}{\sqrt{2}}\cos\alpha$-ն, եթե $\sin\alpha = -\dfrac{1}{3}$ և $-3\pi < \alpha < -\dfrac{5\pi}{2}$:

172. Հաշվել՝

ա) $\cos\alpha$-ն, եթե $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{65}}{9}$ և $\operatorname{tg}\alpha > 0$,

բ) $9\sin\alpha$-ն, եթե $\operatorname{ctg}\alpha = -2\sqrt{2}$ և $\cos\alpha < 0$,

գ) $3\cos\alpha$-ն, եթե $\operatorname{tg}\alpha = 2\sqrt{2}$ և $\sin\alpha > 0$:

* **173.** Դիցուք, $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = 3$: Հաշվել արտահայտության արժեքը.

ա) $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha$, բ) $\operatorname{tg}^3\alpha + \operatorname{ctg}^3\alpha$, գ) $\operatorname{tg}^4\alpha + \operatorname{ctg}^4\alpha$:

***174.** Դիցուք, $\sin\alpha + \cos\alpha = 0{,}8$: Հաշվել արտահայտության արժեքը.

ա) $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$, բ) $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha$, գ) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha$:

***175.** Ապացուցել, որ եթե $\alpha \neq \pi k/2$, $k \in \mathbf{Z}$, ապա՝

ա) $\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha\geq 2$, բ) $|\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha|\geq 2$:

Կրկնության համար

176. Լուծել հավասարումը.

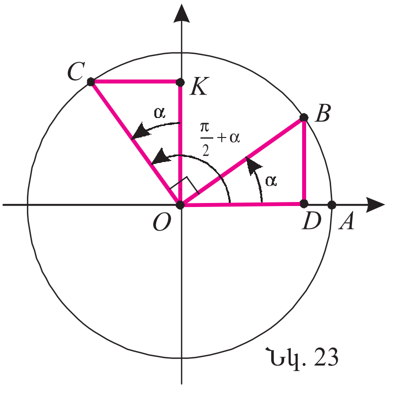
ա) $|3x-5|=7$, բ) $|6x-7|=7x+1$, գ) $|8x-4|=|9x-5|$:

177. Լուծել անհավասարումը.

ա) $|2-7x|<5$, բ) $|5x-5|\geq 2$, գ) $|7x+2|\leq|3-x|$:

§5. Բերման բանաձևերը

Այս պարագրաֆում ստանում ենք բանաձևեր, որոնք $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$, $\pi\pm\alpha$, $\frac{3}{2}\pi\pm\alpha$ և $2\pi\pm\alpha$ անկյունների եռանկյունաչափական ֆունկցիաներն արտահայտում են α անկյան եռանկյունաչափական ֆունկցիաներով: Այդ բանաձևերն անվանում են ***բերման բանաձևեր***:



Նկ. 23

Ենթադրենք՝ OA սկզբնական շառավիղը α և $\alpha+\frac{\pi}{2}$ անկյուններով պտտելիս համընկնում է համապատասխանաբար OB և OC շառավիղներին (նկ. 23): Այդ դեպքում OB և OC շառավիղները փոխուղղահայաց են:

Դիտարկենք BOD և COK ուղղանկյուն եռանկյունները: Նրանց ներքնաձիգները հավասար են՝ $OB=OC$, իսկ $\angle COK=\angle BOD$, որպես փոխուղղահայաց կողմերով անկյուններ ($OB\perp OC$, $OK\perp OD$): Ըստ ուղղանկյուն եռանկյունների հավասարության հայտանիշի՝ $\Delta BOD=\Delta COK$: Հետևաբար՝ $OK=OD$ և $CK=BD$:

Հեշտ է ստուգել, որ, անկախ այն բանից, թե որ քառորդում է B կետը, C կետը պտույտի դրական ուղղությամբ հաջորդ քառորդում է, և եթե B կետի կոորդինատներն են՝ $B(x,y)$, ապա C կետի կոորդինատները կլինեն՝ $C(-y,x)$, և կունենանք՝

$$\sin\alpha=y,\quad \cos\alpha=x,\quad \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=x,\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-y\ :$$

Հետևաբար՝

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha, \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha: \tag{1}$$

Հաջորդաբար կիրառելով (1) բանաձևը՝ ստանում ենք՝

$$\begin{aligned}\sin(\pi+\alpha)&=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha,\\ \cos(\pi+\alpha)&=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha:\end{aligned} \tag{2}$$

Հանգունորեն՝

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha, \ \cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha \ : \tag{3}$$

Արդեն գիտենք, որ

$$\sin(2\pi+\alpha)=\sin\alpha, \quad \cos(2\pi+\alpha)=\cos\alpha: \tag{4}$$

Ստացված (1) – (4) բանաձևերը նույնություններ են: Այդ բանաձևերում α-ի փոխարեն տեղադրելով $-\alpha$ և կիրառելով §3-ի (1) բանաձևերը՝ կստանանք բերման բանաձևերի հաջորդ խումբը՝

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)&=\sin\left(\frac{\pi}{2}+(-\alpha)\right)=\cos(-\alpha)=\cos\alpha,\\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)&=\cos\left(\frac{\pi}{2}+(-\alpha)\right)=-\sin(-\alpha)=\sin\alpha,\end{aligned} \tag{5}$$

$$\sin(\pi-\alpha)=-\sin(-\alpha)=\sin\alpha, \quad \cos(\pi-\alpha)=-\cos(-\alpha)=-\cos\alpha$$

և այլն:

Տանգենսի և կոտանգենսի բերման բանաձևերը կարելի է ստանալ սինուսի և կոսինուսի բերման բանաձևերից: Օրինակ՝

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha: \tag{6}$$

Հանգունորեն՝

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{ctg}\alpha, \quad \operatorname{tg}(\pi-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha, \quad \operatorname{ctg}(\pi-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha: \tag{7}$$

Ինչպե՞ս մտապահել այսքան բանաձևերը: Պարզվում է, որ կա ընդհանուր օրինաչափություն: Եթե նորից նայեք բոլոր բանաձևերին, կնկատեք, որ երբ α-ին (կամ $-\alpha$-ին) գումարվում է π կամ 2π, բանաձևերի աջ և ձախ մասերում գրված են նույն եռանկյունաչափական ֆունկցիաները: Իսկ այն դեպքերում, երբ α-ին (կամ $-\alpha$-ին) գումարվում է $\pi/2$ կամ $3\pi/2$, բանաձևի ձախ մասում գրված սինուս (կոսինուս, տանգենս, կոտանգենս) ֆունկցիան աջ մասում փոխարինվում է կոսինուս (համապատասխանաբար՝ սինուս, կոտանգենս, տանգենս) ֆունկցիայով:

Մնում է պարզել, թե աջ մասում ի՞նչ նշան դնել՝ պլյուս, թե մինուս: Քանի որ ստացված բանաձևերը նույնություններ են, բավական է, որ աջ և ձախ մասերի նշանները համընկնեն որևէ α-ի դեպքում: Եթե α-ն համարենք սուր անկյուն, ապա աջ մասի եռանկյունաչափական ֆունկցիան կլինի դրական: Հետևաբար՝ պետք է որոշել ձախ մասի ֆունկցիայի նշանը և աջ մասում դնել այդ նշանը: Այսպիսով՝ բերման բանաձևերի համար ստացվում է հետևյալ կանոնը:

1. ***Եռանկյունաչափական ֆունկցիան չի փոխվում, եթե α-ին (կամ $-\alpha$-ին) գումարված է π կամ 2π և փոխվում է, եթե գումարված է $\frac{\pi}{2}$ կամ $\frac{3}{2}\pi$: Ընդ որում, սինուսը փոխվում է կոսինուսի, կոսինուսը՝ սինուսի, տանգենսը՝ կոտանգենսի, կոտանգենսը՝ տանգենսի:***

2. ***Աջ մասում եռանկյունաչափական ֆունկցիայից առաջ դրվում է այն նշանը, ինչ նշան կունենա ձախ մասը, եթե α-ն լինի սուր անկյուն:***

Օրինակ 1: Գտնենք $\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)$-ն:

Քանի որ $-\alpha$-ին գումարված է $\frac{3}{2}\pi$, ուրեմն՝ կոսինուսը կփոխվի սինուսի: Եթե α-ն սուր անկյուն է, ապա $\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)$-ն գտնվում է երրորդ քառորդում, որտեղ կոսինուսը բացասական է: Հետևաբար՝

$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=-\sin\alpha:$$

Օրինակ 2: Ստանանք բերման բանաձև $\operatorname{tg}(\pi+\alpha)$-ի համար:

Ֆունկցիան չի փոխվում, քանի որ գումարված է π: Եթե α-ն առաջին քառորդում է, ապա $(\pi+\alpha)$-ն երրորդ քառորդում է, որտեղ տանգենսը դրական է: Հետևաբար՝ $\operatorname{tg}(\pi+\alpha)=\operatorname{tg}\alpha$:

Նույն ձևով կարող ենք համոզվել, որ $\operatorname{ctg}(\pi+\alpha)=\operatorname{ctg}\alpha$: Այս բանաձևերը ցույց են տալիս, որ տանգենս և կոտանգենս ֆունկցիաների արժեքները չեն փոխվում, եթե արգումենտին գումարում կամ հանում ենք π (հետևաբար՝ նաև ամբողջ թվով π-եր).

$$\mathbf{tg}(\boldsymbol{\alpha} \pm \boldsymbol{\pi}) = \mathbf{tg}\boldsymbol{\alpha} \qquad \mathbf{ctg}(\boldsymbol{\alpha} \pm \boldsymbol{\pi}) = \mathbf{ctg}\boldsymbol{\alpha}$$

Օրինակ 3: Պարզեցնենք $\sin\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)$ արտահայտությունը:

Նախ՝ $\sin\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$, այնուհետև՝ $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\alpha$:

Հետևաբար՝ $\sin\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = \cos\alpha$:

Բերման բանաձևերն ունեն կարևոր կիրառություն: Կամայական անկյան եռանկյունաչափական ֆունկցիայի արժեքը հաշվելու համար բավական է իմանալ սուր անկյան եռանկյունաչափական ֆունկցիաների արժեքները:

Նախքան նոր օրինակների քննարկումը, հիշեցնենք որոշ սուր անկյունների եռանկյունաչափական ֆունկցիաների արժեքները (աղ. 1).

Աղյուսակ 1

α	0° 0	30° $\frac{\pi}{6}$	45° $\frac{\pi}{4}$	60° $\frac{\pi}{3}$	90° $\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	որոշվ. չէ
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	որոշվ. չէ	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Օրինակ 4: Գտնենք $\sin 150^\circ$-ը: Նկատենք, որ $150^\circ = 180^\circ - 30^\circ$: Բերման բանաձև կիրառելով՝ ստանում ենք՝ $\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$:

Հանգունորեն՝ $\cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\cos\frac{2\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$, $\cos\frac{5\pi}{4} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$:

Կիրառելով բերման բանաձևերը և օգտվելով աղյուսակ 1-ից՝ դժվար չէ ստանալ հետևյալ աղյուսակը:

α	120° $\frac{2\pi}{3}$	135° $\frac{3\pi}{4}$	150° $\frac{5\pi}{6}$	180° π	270° $\frac{3\pi}{2}$
$\sin\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\cos\alpha$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0
$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	որոշվ. չէ
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	որոշվ. չէ	0

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ո՞ր բանաձևերն են անվանում բերման բանաձևեր:
2. Արտածեք (1) բանաձևերը:
3. Արտածեք (2) բանաձևերը:
4. Արտածեք (6) բանաձևերը:
5. Արտածեք (7) բանաձևերը:
6. Ձևակերպեք բերման բանաձևերի մտապահման կանոնը:
7. Ի՞նչ կարևոր կիրառություն ունեն բերման բանաձևերը:
8. Փորձեք ինքնուրույն լրացնել աղյուսակ 2-ը:

Առաջադրանքներ

178. Բերել α անկյան եռանկյունաչափական ֆունկցիայի.

ա) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$, բ) $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$, գ) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$,

դ) $\mathrm{ctg}(\alpha-\pi)$, ե) $\mathrm{tg}(\alpha-\pi)$, զ) $\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)$,

է) $\sin\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)$, ը) $\cos(\pi+\alpha)$, թ) $\mathrm{ctg}(\pi-\alpha)$:

179. Օգտվելով բերման բանաձևերից՝ 1-ին աղյուսակից գտնել α անկյան սինուսը, կոսինուսը, տանգենսը և կոտանգենսը.

ա) $\alpha=210^\circ$, բ) $\alpha=\frac{5}{4}\pi$, գ) $\alpha=\frac{4}{3}\pi$,

դ) $\alpha=300^\circ$, ե) $\alpha=\frac{9}{4}\pi$, զ) $\alpha=330^\circ$:

180. Փոխարինել α անկյան եռանկյունաչափական ֆունկցիայով.

ա) $\mathrm{ctg}(90^\circ-\alpha)$, բ) $\cos(90^\circ+\alpha)$, գ) $\sin(270^\circ-\alpha)$,

դ) $\sin(270^\circ+\alpha)$, ե) $\mathrm{tg}(\alpha-270^\circ)$, զ) $\mathrm{ctg}(\alpha-180^\circ)$:

181. Դարձնել $\frac{\pi}{2}-\alpha$ անկյան եռանկյունաչափական ֆունկցիա.

ա) $\sin\alpha$, բ) $\cos\alpha$, գ) $\mathrm{tg}\,\alpha$, դ) $\mathrm{ctg}\,\alpha$:

182. Փոխարինել α անկյան եռանկյունաչափական ֆունկցիայով.

ա) $\cos(810^\circ+\alpha)$, բ) $\sin(990^\circ-\alpha)$, գ) $\mathrm{tg}(\alpha-450^\circ)$,

դ) $\mathrm{tg}(7\pi-\alpha)$, ե) $\cos\left(\alpha-\frac{13\pi}{2}\right)$, զ) $\mathrm{ctg}\left(\frac{7\pi}{2}+\alpha\right)$:

183. Ձևափոխել արտահայտությունը.

ա) $\sin^2(\pi+x)$, բ) $\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)$, գ) $\mathrm{tg}^2(\pi+x)$,

դ) $\cos^4(\pi-x)$, ե) $\sin^3\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)$, զ) $\mathrm{ctg}^3\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)$:

184. Պարզեցնել արտահայտությունը.

ա) $\sin^2(180^\circ-\alpha)+\sin^2(270^\circ-\alpha)$,

բ) $\sin(90^\circ-\alpha)+\cos(180^\circ+\alpha)+\mathrm{tg}(270^\circ+\alpha)+\mathrm{ctg}(360^\circ+\alpha)$,

գ) $\sin(\pi+\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\cos(2\pi+\alpha)\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$,

դ) $\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\mathrm{tg}(\pi+\alpha)\,\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$:

➢**185.** Գտնել ուղղանկյուն եռանկյան սուր անկյունների տանգենսները, եթե նրանցից մեկին կից արտաքին անկյան տանգենսը $-\sqrt{5}$ է:

186. Գտնել՝

ա) $27\sin(2\pi-\alpha)$-ն, եթե $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{65}}{9}$ և $\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi$,

բ) $27\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$-ն, եթե $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{32}}{9}$ և $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$,

գ) $15\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$-ն, եթե $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{21}}{5}$ և $3\pi<\alpha<\frac{7}{2}\pi$,

դ) $3{,}75\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$-ն, եթե $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ և $4\pi<\alpha<\frac{9}{2}\pi$:

➢**187.** Գտնել $\operatorname{tg}\alpha$-ն, եթե՝

ա) $\dfrac{2\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha-2\cos\alpha}=3$, բ) $\dfrac{5\sin\alpha-2\cos(\pi+\alpha)}{\sin(\pi-\alpha)+3\cos\alpha}=3$:

➢**188.** Գտնել $\operatorname{ctg}\alpha$-ն, եթե՝

ա) $\dfrac{2\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha+2\cos\alpha}=4$, բ) $\dfrac{6\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)-\cos\alpha}{\sin\alpha-3\cos(\pi-\alpha)}=5$:

189. Գտնել $\sin\alpha$-ն, եթե՝

ա) $2\sin^2\alpha+5\sin\alpha+2=0$, բ) $2\sin^2\alpha-5\sin\alpha+2=0$,

գ) $\cos^2\alpha+1=2\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)$, դ) $\sin^2\left(\dfrac{5\pi}{2}+\alpha\right)-2\sin\alpha+1=0$:

190. Գտնել $\cos\alpha$-ն, եթե՝

ա) $3\cos^2\alpha-10\cos\alpha+3=0$, բ) $3\cos^2\alpha+10\cos\alpha+3=0$,

գ) $2\cos(3\pi+\alpha)+\sin^2\alpha=0$, դ) $2\cos\alpha+\sin^2(5\pi+\alpha)=0$:

➢**191.** Գտնել $\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}$ արտահայտության արժեքը, եթե հայտնի է, որ

ա) $3\operatorname{tg}^2\alpha-11\operatorname{tg}\alpha-4=0$, բ) $3\operatorname{ctg}^2\alpha-2\operatorname{ctg}\alpha-1=0$:

➢**192.** Ապացուցել (3) և (4) բերման բանաձևերը՝ չօգտվելով (1) և (2) բանաձևերից:

193. Գտնել $\operatorname{ctg}\alpha$-ն, եթե՝

ա) $7\operatorname{tg}^2\alpha+6\operatorname{tg}\alpha-1=0$ և $|\operatorname{ctg}\alpha+1|<2$,

բ) $10\operatorname{tg}\alpha+3=\operatorname{ctg}\alpha$ և $|\operatorname{ctg}\alpha-3|<3$:

* **194.** Ապացուցել, որ կարելի է հաշվել կամայական անկյան եռանկյունաչափական ֆունկցիաների արժեքները, եթե հայտնի են $\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$ միջակայքի անկյունների եռանկյունաչափական ֆունկցիաների արժեքները:

Կրկնության համար

➢**195.** Գետի հոսանքով նավակն անցավ 28 կմ և անմիջապես վերադարձավ՝ ամբողջ ուղևորության համար ծախսելով 7 ժ: Գտնել նավակի արագությունը կանգնած ջրում, եթե գետի հոսանքի արագությունը 3 կմ/ժ է:

➢**196.** Գետի հոսանքով նավակն անցավ 80 կմ և անմիջապես վերադարձավ՝ ամբողջ ուղևորության համար ծախսելով 9 ժ: Գտնել գետի հոսանքի արագությունը, եթե նավակի արագությունը կանգնած ջրում 18 կմ/ժ է:

➢**197.** Ուղևորը նավակով գետի հոսանքին հակառակ անցավ 6 կմ, իսկ լճով՝ 15 կմ: Ընդ որում, լճով ընթանալիս նա ծախսեց 1 ժ ավելի, քան գետով շարժվելիս: Իմանալով, որ գետի հոսանքի արագությունը 2 կմ/ժ է, գտնել նավակի արագությունը լճով ընթանալիս:

§6. Երկու անկյունների գումարի և տարբերության եռանկյունաչափական ֆունկցիաների բանաձևերը

Այս պարագրաֆում կստանանք բանաձևեր, որոնք երկու անկյունների գումարի և տարբերության եռանկյունաչափական ֆունկցիաներն արտահայտում են այդ անկյունների եռանկյունաչափական ֆունկցիաների միջոցով:

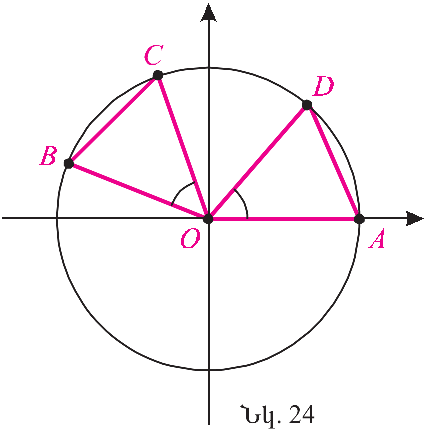
Երկու անկյունների տարբերության կոսինուսը հավասար է այդ անկյունների կոսինուսների արտադրյալի և սինուսների արտադրյալի գումարին՝

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta : \qquad (1)$$

Այս բանաձևը կոչվում է ***երկու անկյունների տարբերության կոսինուսի բանաձև:***

Ապացուցում: Դիցուք, միավոր շրջանագծի OA սկզբնական շառավիղը պտտելով α, β և $\alpha-\beta$ անկյուններով, համապատասխանաբար ստանում ենք OB, OC և OD շառավիղները (նկ. 24): Այդ դեպքում, ըստ սինուսի և կոսինուսի սահմանման, A, B, C, D կետերը կունենան հետևյալ կոորդինատները՝

$A(1;0)$, $B(\cos\alpha;\sin\alpha)$, $C(\cos\beta;\sin\beta)$, $D(\cos(\alpha-\beta);\sin(\alpha-\beta))$:



Նկ. 24

Պարզ է, որ OC շառավիղն $\alpha-\beta$ անկյունով պտտելով՝ կստանանք OB-ն: Հետևաբար՝ BOC և DOA կենտրոնական անկյունները հավասար են: Ուստի հավասար են նաև նրանց հենման BC և AD աղեղները և այդ աղեղների ձգող լարերը՝ $BC=AD$: Օգտվելով երկրաչափությունից հայտնի՝ երկու կետերի հեռավորության բանաձևից, ստանում ենք՝

$$AD=\sqrt{(1-\cos(\alpha-\beta))^2+(0-\sin(\alpha-\beta))^2},\quad BC=\sqrt{(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2} :$$

Քանի որ $AD=BC$, ուրեմն՝

$$(1-\cos(\alpha-\beta))^2+\sin^2(\alpha-\beta)=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2 :$$

Բացելով փակագծերը և օգտվելով $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ նույնությունից՝ ստանում ենք (1) բանաձևը:

Երկու անկյունների գումարի կոսինուսը հավասար է այդ անկյունների կոսինուսների արտադրյալի և սինուսների արտադրյալի տարբերությանը.

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\,: \qquad (2)$$

Այս բանաձևը կոչվում է ***երկու անկյունների գումարի կոսինուսի բանաձև:***

Ապացուցում: Օգտվելով (1) նույնությունից և հաշվի առնելով, որ $\cos(-\beta)=\cos\beta$, $\sin(-\beta)=-\sin\beta$, ստանում ենք՝

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha-(-\beta))=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)=$$
$$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta:$$

Երկու անկյունների գումարի սինուսը հավասար է առաջին անկյան սինուսի և երկրորդ անկյան կոսինուսի արտադրյալին գումարած առաջին անկյան կոսինուսի և երկրորդ անկյան սինուսի արտադրյալը.

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\,: \qquad (3)$$

Այս բանաձևը կոչվում է ***երկու անկյունների գումարի սինուսի բանաձև:***

Ապացուցում: Կիրառելով բերման բանաձևեր և (1) նույնությունը՝ կստանանք՝

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right)=$$
$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta:$$

Երկու անկյունների տարբերության սինուսը հավասար է առաջին անկյան սինուսի և երկրորդ անկյան կոսինուսի արտադրյալից հանած առաջին անկյան կոսինուսի և երկրորդ անկյան սինուսի արտադրյալը.

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\,: \qquad (4)$$

Այս բանաձևը կոչվում է ***երկու անկյունների տարբերության սինուսի բանաձև:***

Ապացուցում: Կիրառելով (3) բանաձևը α և $-\beta$ անկյունների համար և հաշվի առնելով, որ $\sin(-\beta)=-\sin\beta$, $\cos(-\beta)=\cos\beta$, կստանանք՝

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha+(-\beta))=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)=$$
$$=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta:$$

Ստացված (1)-(4) նույնությունները հնարավորություն են տալիս կամայական α-ի և β-ի դեպքում $\alpha \pm \beta$ անկյունների սինուսը և կոսինուսն արտահայտել α-ի և β-ի սինուսով և կոսինուսով:

Օրինակ 1: Կիրառելով (4) և (1) բանաձևերը՝ ստանում ենք՝

$$\sin 15^\circ = \sin\left(45^\circ - 30^\circ\right) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{4},$$

$$\cos 105^\circ = \cos\left(60^\circ + 45^\circ\right) = \cos 60^\circ \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \sin 45^\circ =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}\left(1-\sqrt{3}\right)}{4}:$$

(1)-(4) նույնություններից ստացվում են բանաձևեր $\alpha \pm \beta$ անկյան տանգենսի և կոտանգենսի համար: Իրոք, եթե $\cos(\alpha+\beta) \neq 0$, ապա

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}: \qquad (5)$$

Եթե $\cos\alpha\cos\beta \neq 0$, ապա (5) հավասարության աջ մասի համարիչն ու հայտարարը բաժանելով $\cos\alpha\cos\beta$-ի՝ ստանում ենք՝

$$\boldsymbol{\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}}: \qquad (6)$$

Այս բանաձևը ճիշտ է, երբ որոշված են α, β և $\alpha+\beta$ անկյունների տանգենսները: Նկատենք, որ (6) բանաձևի ձախ մասը կարող է որոշված լինել, իսկ աջը՝ ոչ: Այդպես կլինի, օրինակ, երբ $\alpha = \frac{\pi}{2}$ և $\beta = \frac{\pi}{4}$: Կարող է նաև որոշված լինեն $\operatorname{tg}\alpha$-ն ու $\operatorname{tg}\beta$-ն, բայց որոշված չլինեն (6) բանաձևի աջ և ձախ մասերը: Օրինակ՝ երբ $\alpha = \beta = \frac{\pi}{4}$:

Նույն ձևով ստացվում են հետևյալ բանաձևերը, որոնք ճիշտ են, եթե որոշված են դրանցում առկա եռանկյունաչափական ֆունկցիաները:

$$\boldsymbol{\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}},$$

$$\boldsymbol{\operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}}, \quad \boldsymbol{\operatorname{ctg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta + 1}{\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha}}:$$

Օրինակ 2: Հաշվենք $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$-ն, եթե $\sin\alpha = 3/5$, $\cos\beta = 24/25$, $\pi/2 < \alpha < \pi$

և $3\pi/2<\beta<2\pi$: Քանի որ α-ն պատկանում է երկրորդ քառորդին, ուրեմն՝

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\frac{4}{5} \text{ և } \operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{3}{4}:$$

Հանգունորեն ստանում ենք՝

$$\sin\beta=-\sqrt{1-\cos^2\beta}=-\frac{7}{25}, \quad \operatorname{tg}\beta=\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=-\frac{7}{24}:$$

Հետևաբար՝ $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\dfrac{-\frac{3}{4}-\frac{7}{24}}{1-\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{24}}=-\dfrac{4}{3}:$

Պատասխան՝ $-4/3$:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Գրեք երկու անկյունների գումարի և տարբերության կոսինուսի բանաձևերը:
2. Գրեք երկու անկյունների գումարի և տարբերության սինուսի բանաձևերը:
3. Գրեք $\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)$-ի բանաձևը:
4. Գրեք $\operatorname{ctg}(\alpha\pm\beta)$-ի բանաձևը:

Առաջադրանքներ

198. Ձևափոխել արտահայտությունը.

ա) $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$, բ) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$, գ) $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$,

դ) $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$, ե) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$, զ) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$:

199. Հաշվել $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ և $\operatorname{ctg}\alpha$ մեծությունները, եթե.

ա) $\alpha=15^\circ$, բ) $\alpha=75^\circ$, գ) $\alpha=105^\circ$, դ) $\alpha=165^\circ$:

➢**200.** Ապացուցել բերման բանաձևերը, օգտվելով երկու անկյունների գումարի և տարբերության սինուսի և կոսինուսի բանաձևերից:

Պարզեցնել արտահայտությունը (200-201).

201. ա) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\sin\alpha$, բ) $\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)-\cos\alpha$,

գ) $2\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)-\cos\alpha$, դ) $\sqrt{2}\cos\alpha-2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$:

202. ա) $\dfrac{\sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{4}+\alpha\right)+\cos\alpha}{\sqrt{2}\cos\left(\frac{5\pi}{4}-\alpha\right)+\sin\alpha}$, բ) $\dfrac{\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\alpha\right)+\frac{1}{2}\sin\alpha}{\sin\left(\frac{7\pi}{6}-\alpha\right)+\frac{1}{2}\cos\alpha}$:

203. Հաշվել արտահայտության արժեքը.

ա) $\sin 27^\circ \cos 3^\circ + \cos 27^\circ \sin 3^\circ$,   բ) $\cos 87^\circ \cos 27^\circ + \sin 87^\circ \sin 27^\circ$,

գ) $\cos 92^\circ \cos 28^\circ - \sin 92^\circ \sin 28^\circ$,   դ) $\sin 105^\circ \cos 45^\circ - \cos 105^\circ \sin 45^\circ$:

Ապացուցել հավասարությունը (204-205).

204. ա) $\left(\sin\frac{\pi}{15}+\cos\frac{\pi}{10}\right)^2+\left(\cos\frac{\pi}{15}+\sin\frac{\pi}{10}\right)^2=3$,

բ) $\left(\cos\frac{\pi}{9}-\cos\frac{2\pi}{9}\right)^2+\left(\sin\frac{\pi}{9}+\sin\frac{2\pi}{9}\right)^2=1$:

➢**205.** ա) $\dfrac{\cos 23^\circ - \operatorname{tg} 22^\circ \sin 23^\circ}{\sin 8^\circ + \operatorname{tg} 22^\circ \cos 8^\circ}=\sqrt{2}$,   բ) $\dfrac{\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{9}\cos\frac{\pi}{18}+\sin\frac{\pi}{18}}{\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9}-\sin\frac{\pi}{9}}=\sqrt{3}$:

➢**206.** Ապացուցել նույնությունը.

ա) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$,

բ) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\cos^2\beta-\cos^2\alpha$,

գ) $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$,

դ) $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\beta-\sin^2\alpha$:

207. Գտնել.

ա) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$-ն, եթե $\sin\alpha=-\frac{3}{\sqrt{10}}$ և $\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi$,

բ) $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{4}-\alpha\right)$-ն, եթե $\sin\alpha=-\frac{5}{\sqrt{34}}$ և $\frac{3}{2}\pi<\alpha<2\pi$,

գ) $10\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$-ը, եթե $\sin\alpha=-\frac{2}{\sqrt{13}}$ և $\frac{7}{2}\pi<\alpha<4\pi$:

208. Հաշվել՝

ա) $\sin(\alpha+\beta)$-ն, եթե $\sin\alpha=\frac{4}{5}$, $\cos\beta=-\frac{4}{5}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$,

բ) $\sin(\alpha-\beta)$-ն, եթե $\sin\alpha=\frac{24}{25}$, $\cos\beta=-\frac{4}{5}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$,

գ) $\cos(\alpha+\beta)$-ն, եթե $\cos\alpha=\frac{5}{13}$, $\sin\beta=\frac{12}{13}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$:

➢**209.** Հաշվել $\sin(\alpha+\beta)$-ն և $\cos(\alpha+\beta)$-ն, եթե՝

ա) $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\sin\beta=\frac{7}{25}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ և $\cos(\alpha-\beta)>0$, բ) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\beta = \frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ և $\sin(\alpha - \beta) < 0$,

գ) $\sin\alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg}\beta = -3$, $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$, $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) > 0$:

➢**210.** Օգտվելով 159 առաջադրանքից, ցույց տալ, որ՝

ա) եթե $a^2 + b^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 1$, ապա $|ax + by| \leq 1$,

բ) եթե $a^2 + b^2 = c^2$, $x^2 + y^2 = z^2$, ապա $|ax + by| \leq |cz|$:

➢**211.** Եռանկյան երկու անկյունների կոսինուսներն են՝ $\frac{1}{\sqrt{5}}$ և $\frac{1}{\sqrt{10}}$: Գտնել երրորդ անկյունը:

➢**212.** Եռանկյան երկու սուր անկյունների սինուսներն են՝ $\frac{11}{14}$ և $\frac{13}{14}$: Գտնել երրորդ անկյունը:

➢**213.** Եռանկյան երկու անկյունների տանգենսները տրված հավասարման արմատներն են: Գտնել երրորդ անկյունը:

ա) $3x^2 - 16x + 19 = 0$; բ) $13x^2 - 9\sqrt{3} \cdot x + 4 = 0$:

214. r շառավղով շրջանին արտագծած եռանկյան կողմերից մեկը շոշափման կետերով բաժանվում է m և n մասերի: Գտնել եռանկյան մյուս երկու կողմերի երկարությունները, եթե)

ա) $r = 6$, $m = 14$, $n = 15$, բ) $r = \sqrt{3}$, $m = 6$, $n = 7$:

Կրկնության համար

215. Պարզեցնել արտահայտությունը.

ա) $$\left(\frac{5(m-2)}{m^3 - 8} - \frac{m+2}{m^2 + 2m + 4}\right) \cdot \frac{2m^2 + 4m + 8}{m - 3},$$

բ) $$\left(\frac{n+2}{3n} - \frac{2}{n-2} - \frac{n-14}{3n^2 - 6n}\right) : \frac{n+2}{6n} \cdot \frac{1}{n-5}:$$

➢**216.** Պարզեցնել արտահայտությունը և հաշվել նրա արժեքը:

ա) $$\left(\frac{a\sqrt{a} - 1}{\sqrt{a} + 1} : (a-1) + \frac{\sqrt{a}}{(\sqrt{a}+1)^2}\right)(2a+1), \text{ երբ } a = 6,$$

բ) $$\left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)\left(\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}} - 2\right)^{-1}\left(1 - \frac{2}{\sqrt{a}+1}\right) + 3a, \text{ երբ } a = 10:$$

§7. Կրկնակի անկյան եռանկյունաչափական ֆունկցիաների բանաձևերը

Նախորդ պարագրաֆում տեսանք, որ կամայական α-ի և β-ի համար

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta :$$

Այս նույնության մեջ տեղադրելով $\beta=\alpha$, ստանում ենք՝

$$\mathbf{\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha} : \qquad (1)$$

Այստեղից և $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ նույնությունից ստանում ենք հետևյալ բանաձևերը.

$$\mathbf{\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha,\qquad \cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1} : \qquad (2)$$

Նման ձևով երկու անկյունների գումարի սինուսի, տանգենսի և կոտանգենսի բանաձևերում վերցնելով $\beta=\alpha$, ստանում ենք՝

$$\mathbf{\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha}, \qquad (3)$$

$$\mathbf{tg 2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha},\quad ctg 2\alpha=\frac{ctg^2\alpha-1}{2ctg\alpha}} : \qquad (4)$$

(1)-(4) բանաձևերն անվանում են ***կրկնակի անկյան եռանկյունաչափական ֆունկցիաների բանաձևեր:***

Նշենք, որ (4) բանաձևերից առաջինը ճիշտ է, եթե որոշված են $tg\alpha$-ն և $tg 2\alpha$-ն, իսկ երկրորդը ճիշտ է, եթե որոշված են $ctg\alpha$-ն և $ctg 2\alpha$-ն (համոզվեք ինքնուրույն):

Օրինակ 1: Գտնենք $\sin 2\alpha$-ն, եթե $\cos\alpha=0{,}6$ և $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$:

Քանի որ α-ն պատկանում է չորրորդ քառորդին, ուրեմն՝ $\sin\alpha<0$ և

$$\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-0{,}8 :$$

Հետևաբար՝ $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=-2\cdot 0{,}8\cdot 0{,}6=-0{,}96$:

Պատասխան՝ $-0{,}96$:

Օրինակ 2: Գտնենք $\cos 2\alpha$-ն, եթե $\cos\alpha=\frac{1}{3}$:

Համաձայն (2) բանաձևի՝ $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\cdot\frac{1}{9}-1=-\frac{7}{9}$:

Պատասխան՝ $-7/9$:

Օրինակ 3: Հավասարասրուն եռանկյան հիմքին առընթեր α անկյան կոսինուսը $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ է: Գտնենք եռանկյան գագաթի β անկյան տանգենսը:

Նախ գտնենք $\operatorname{tg}\alpha$-ն: Օգտվելով

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

բանաձևից և հաշվի առնելով, որ α-ն սուր անկյուն է, ստանում ենք՝ $\operatorname{tg}\alpha=0{,}5$: Քանի որ եռանկյունը հավասարասրուն է, ուրեմն՝ $\beta=\pi-2\alpha$ և, հետևաբար,

$$\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}(\pi-2\alpha)=-\operatorname{tg}2\alpha=-\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=-\frac{2\cdot 0{,}5}{1-(0{,}5)^2}=-\frac{1}{0{,}75}=-\frac{4}{3}:$$

Պատասխան՝ $-4/3$:

Եռանկյունաչափական արտահայտությունները ձևափոխելիս հաճախ կիրառվում են (2) առնչություններից անմիջապես ստացվող հետևյալ բանաձևերը, որոնք անվանում են ***աստիճանի իջեցման բանաձևեր***.

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2},\quad \cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}: \qquad (5)$$

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ձևակերպեք կրկնակի անկյան եռանկյունաչափական ֆունկցիաների բանաձևերը:
2. Արտածեք կրկնակի անկյան եռանկյունաչափական ֆունկցիաների բանաձևերը:
3. Արտածեք աստիճանի իջեցման բանաձևերը:

Առաջադրանքներ

217. Պարզեցնել արտահայտությունը.

ա) $\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}$, բ) $\frac{\sin 2\alpha}{2\cos^2\alpha}$, գ) $\frac{\sin 2\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}+\frac{\sin 2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}$,

դ) $\cos 2\alpha-\cos^2\alpha$, ե) $\sin^2\alpha+\cos 2\alpha$, զ) $\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$:

218. Գտնել արտահայտության արժեքը.

ա) $2\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}$, բ) $\cos^2 15^\circ-\sin^2 15^\circ$,

գ) $4\sin 105^\circ\cos 105^\circ$, դ) $2\left(\sin^2\frac{\pi}{8}-\cos^2\frac{\pi}{8}\right)^2$:

219. Հաշվել արտահայտության արժեքը.

ա) $\frac{2\operatorname{tg}15^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 15^\circ}$, բ) $\frac{2\sqrt{3}\operatorname{tg}75^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 75^\circ}$, գ) $\frac{\operatorname{ctg}^2\frac{3\pi}{8}-1}{2\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{8}}$, դ) $\dfrac{4\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{8}}{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\pi}{8}}$, ե) $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2 75^\circ}{2\operatorname{tg}75^\circ}$, զ) $\dfrac{2\sqrt{3}\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{8}}{\operatorname{ctg}^2\dfrac{\pi}{8}-1}$:

Ձևափոխել արտահայտությունը, կիրառելով կրկնակի անկյան բանաձևերը (220-221).

220. ա) $\sin\alpha$, բ) $\cos 3x$, գ) $\sin(\alpha-\beta)$, դ) $\operatorname{ctg}\dfrac{3}{5}\alpha$:

221. ա) $\sin 18^\circ$, բ) $\operatorname{tg} 38^\circ$, գ) $\sin\dfrac{3\pi}{5}$, դ) $\cos\dfrac{\pi}{9}$:

222. Օգտվելով աստիճանի իջեցման բանաձևերից՝ հաշվել արտահայտության արժեքը.

ա) $\sin^2\dfrac{\pi}{8}+2\sin^2\dfrac{\pi}{12}$, բ) $\cos^2\dfrac{\pi}{12}-\sin^2\dfrac{\pi}{8}$,

գ) $4\cos^2\dfrac{\pi}{8}-6\cos^2\dfrac{\pi}{12}$, դ) $2\sin^2\dfrac{\pi}{12}+8\cos^2\dfrac{\pi}{8}$:

Պարզեցնել արտահայտությունը (223-224).

223. ա) $\sin\dfrac{\pi-\alpha}{2}\cos\dfrac{\pi-\alpha}{2}$, բ) $2\cos^2\dfrac{\pi+\alpha}{4}-2\sin^2\dfrac{\pi+\alpha}{4}$,

գ) $\dfrac{4\operatorname{tg}\dfrac{3\pi-\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{3\pi-\alpha}{2}}$, դ) $4\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\pi-\alpha}{2}\sin\dfrac{3\pi-2\alpha}{2}$:

224. ա) $\dfrac{\sin 2\alpha-2\sin\alpha}{\cos\alpha-1}$, բ) $\sin 2\alpha\operatorname{ctg}\alpha-1$, գ) $\dfrac{\cos 2\alpha-\cos^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}$,

դ) $(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)\sin 2\alpha$, ե) $(\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha)\sin 2\alpha$:

Ապացուցել նույնությունը (225-226).

225. ա) $1+\sin 2\alpha=(\sin\alpha+\cos\alpha)^2$, բ) $1-\sin 2\alpha=(\sin\alpha-\cos\alpha)^2$,

գ) $\dfrac{\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}$, դ) $\dfrac{1-\cos\alpha+\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha-\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha$:

➤**226.** ա) $\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos 2\alpha}$, բ) $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}2\alpha=\dfrac{1}{\sin 2\alpha}$,

գ) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{2}{\sin 2\alpha}$, դ) $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha=2\operatorname{ctg}2\alpha$:

Պարզեցնել արտահայտությունը (227-228).

227. ա) $\dfrac{1+\sin 2\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}$, բ) $1-2\sin^2\dfrac{\alpha}{8}$, գ) $1-8\cos^2\alpha\sin^2\alpha$:

228. ա) $2\cos^2\alpha - \cos 2\alpha$,   բ) $\dfrac{2\sin\alpha - \sin 2\alpha}{2\sin\alpha + \sin 2\alpha}$,

գ) $\dfrac{1-\cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha + \sin 2\alpha}$,   դ) $\dfrac{\cos^2 2\alpha - 4\cos^2\alpha + 3}{\cos^2 2\alpha + 4\cos^2\alpha - 1}$:

➢**229.** Հավասարասրուն եռանկյան հիմքին առընթեր անկյան կոսինուսը 0,6 է: Գտնել գագաթի անկյան սինուսը և կոսինուսը:

➢**230.** Ապացուցել նույնությունը.

ա) $\dfrac{2}{\sin 4x} - \operatorname{ctg} 2x = \operatorname{tg} 2x$,   բ) $\dfrac{\sin 4x}{1+\cos 4x}\cdot\dfrac{\cos 2x}{1+\cos 2x} = \operatorname{tg} x$,

գ) $\cos 4x + 4\cos 2x = 8\cos^4 x - 3$,   դ) $\sin 4x + \cos 4x \operatorname{ctg} 2x = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2 x}{2\operatorname{tg} x}$:

Հաշվել (231-233).

231. ա) $25\sin 2\alpha$ -ն, եթե $\cos\alpha = -0{,}6$ և $\pi < \alpha < \dfrac{3}{2}\pi$,

բ) $18\cos 2\alpha$ -ն, եթե $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{11}}{6}$:

➢**232.** ա) $8\cos 2\alpha$ -ն, եթե $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{4}$,

բ) $2\sqrt{2}\operatorname{ctg} 2\alpha$ -ն, եթե $\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$ և $\dfrac{5\pi}{2} < \alpha < 3\pi$:

233. ա) $\dfrac{1-\cos 56^\circ}{1+\cos 28^\circ} + 2(1+\sin 62^\circ)$,   բ) $\dfrac{1-\sin 42^\circ}{1+\sin 66^\circ} + 2(1+\sin 114^\circ)$:

➢**234.** Ուղղանկյուն եռանկյան սուր անկյան կիսորդի երկարությունը $\sqrt{3}$ է, իսկ այդ անկյանը կից էջինը՝ $\sqrt{2}$: Գտնել մյուս էջի երկարությունը:

➢**235.** Ուղղանկյուն եռանկյան մի անկյունը 15° է: Գտնել ներքնաձիգի երկարությունը, եթե նրան տարված բարձրության երկարությունը 2 է:

➢**236.** Ողղանկյուն եռանկյան ներքնաձիգի երկարությունը 8 է: Գտնել ներքնաձիգին տարված բարձրության երկարությունը, եթե եռանկյան սուր անկյուններից մեկը հավասար է՝ ա) $\pi/12$, բ) $\pi/8$:

➢**237.** Գտնել ողղանկյուն եռանկյան ներքնաձիգի երկարությունը, եթե նրա մակերեսը 18 է, իսկ սուր անկյուններից մեկը՝ $\dfrac{5\pi}{12}$:

➢**238.** Կարո՞ղ է արդյոք որևէ x-ի դեպքում.

ա) $\sin x\cos x = 0{,}45$,   բ) $\cos^2 x - \sin^2 x = \sqrt{2}$,

գ) $\cos 3x \sin 3x = -0{,}6$,   դ) $\sin^2 2x - \cos^2 2x = \sqrt{3} - 1$:

239. 60 գ 15% -անոց սպիրտի լուծույթից վերցրին որոշ քանակություն և տեղը լցրին նույն կշռով 20% -անոց սպիրտի լուծույթ, որից հետո ստացվեց 16% -անոց սպիրտի լուծույթ: Քանի՞ գրամ լուծույթ էին վերցրել:

240. 80 գ 15% -անոց սպիրտի լուծույթից վերցրին որոշ քանակություն և տեղը լցրին նույն կշռով թորած ջուր, որից հետո ստացվեց 12% -անոց սպիրտի լուծույթ: Ինչքա՞ն սպիրտի լուծույթ վերցրին:

241. 100 գ 5% -անոց աղի լուծույթից վերցրին որոշ քանակություն և տեղը լցրին նույն կշռով մաքուր աղ, որից հետո ստացվեց 24% -անոց աղի լուծույթ: Որքա՞ն աղի լուծույթ վերցրին:

§8. Կես անկյան եռանկյունաչափական ֆունկցիաների բանաձևերը

Նախորդ պարագրաֆի (5) նույնություններում α-ի փոխարեն վերցնելով $\alpha/2$, կստանանք հետևյալ բանաձևերը, որոնց աջ կողմում նշանը պետք է ընտրել այնպես, որ աջ և ձախ մասերի նշանները համընկնեն.

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},\qquad \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}: \tag{1}$$

Օրինակ 1: Դիցուք, $\sin\alpha=-\frac{4}{5}$ և $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$: Գտնենք $\sin\frac{\alpha}{2}$-ը և $\cos\frac{\alpha}{2}$-ը:

Նախ անհրաժեշտ է գտնել $\cos\alpha$-ն: Քանի որ α-ն երրորդ քառորդում է, ուրեմն՝ $\cos\alpha<0$ և

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\frac{16}{25}}=-\frac{3}{5}:$$

$\sin\frac{\alpha}{2}$-ը և $\cos\frac{\alpha}{2}$-ը հաշվելու համար անհրաժեշտ է իմանալ $\alpha/2$-ի քառորդը: Խնդրի պայմանի համաձայն՝ $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$, որտեղից հետևում է, որ $\frac{\pi}{2}<\frac{\alpha}{2}<\frac{3\pi}{4}$: Ուրեմն՝ $\alpha/2$-ը երկրորդ քառորդում է, որտեղ սինուսը դրական է, իսկ կոսինուսը՝ բացասական: Կիրառելով (1) բանաձևերը, ստանում ենք՝

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}{2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5},\qquad \cos\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}}=-\frac{\sqrt{5}}{5}:$$

Պատասխան՝ $\frac{2\sqrt{5}}{5},\ -\frac{\sqrt{5}}{5}$:

Օգտվելով (1) բանաձևերից՝ կարող ենք ստանալ բանաձև կես անկյան տանգենսի համար, որտեղ դարձյալ նշանը որոշվում է ըստ $\alpha/2$-ի քառորդի.

$$\mathbf{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}: \qquad (2)$$

Օրինակ 2: Հաշվենք $\operatorname{tg}\pi/8$-ը:

Քանի որ $\pi/8$-ը առաջին քառորդում է, ուրեմն՝ $\operatorname{tg}\pi/8>0$ և

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}=\sqrt{\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)^2}{2}}=\sqrt{2}-1:$$

Պատասխան՝ $\sqrt{2}-1$:

$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$-ի համար կարելի է ստանալ բանաձևեր, որոնցում նշանի ընտրության հարց չի առաջանում: Իրոք, եթե $\sin\frac{\alpha}{2}\neq 0$, ապա

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}:$$

$$\mathbf{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}: \qquad (3)$$

Նման ձևով կստանանք, որ եթե $\cos\frac{\alpha}{2}\neq 0$, ապա

$$\mathbf{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}: \qquad (4)$$

(1)–(4) նույնությունները կոչվում են ***կես անկյան բանաձևեր:***

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Որո՞նք են կես անկյան եռանկյունաչափական ֆունկցիաների բանաձևերը:
2. Ինչպե՞ս է որոշվում նշանը կես անկյան (1) և (2) բանաձևերում:
3. Արտածեք (4) բանաձևը:

Առաջադրանքներ

242. Հաշվել α անկյան սինուսը, կոսինուսը և տանգենսը, եթե

ա) $\alpha=22{,}5^\circ$, բ) $\alpha=\frac{3\pi}{8}$, գ) $\alpha=\frac{5\pi}{12}$, դ) $\alpha=165^\circ$:

Պարզեցնել արտահայտությունը (243-244).

243. ա) $\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$, բ) $\dfrac{1+\cos 3\alpha}{\sin 3\alpha}$, գ) $\dfrac{1-\cos 5\alpha}{\sin 5\alpha}$, դ) $\dfrac{\sin 6\alpha}{1-\cos 6\alpha}$:

244. ա) $\cos\alpha+\sin\alpha\,\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}$, բ) $\cos\alpha-\sin\alpha\,\mathrm{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$, գ) $\sin^2\alpha-2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\cos\alpha$,

դ) $2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}+\cos\alpha$, ե) $\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-\dfrac{\cos\alpha}{2}$, զ) $\dfrac{1+\cos\alpha}{\mathrm{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2}}+\cos\alpha$:

➢**245.** Ապացուցել նույնությունը.

ա) $1+\sin\alpha=2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)$, բ) $1-\sin\alpha=2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)$,

գ) $\dfrac{\cos\dfrac{\alpha}{2}-\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}+\sin\dfrac{\alpha}{2}}=\dfrac{1}{\cos\alpha}-\mathrm{tg}\,\alpha$, դ) $\mathrm{ctg}\dfrac{\alpha}{2}-\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}=2\,\mathrm{ctg}\,\alpha$:

➢**246.** Հավասարասրուն եռանկյան գագաթի անկյան կոսինուսը $1/9$ է: Գտնել հիմքին առընթեր անկյան կոսինուսը:

* **247.** Գտնել ABC եռանկյան B և C գագաթների հեռավորությունը A անկյան կիսորդից, եթե՝

ա) $AB=BC=9$, $AC=14$, բ) $AB=9$, $AC=7$, $\angle C=90^\circ$,

գ) $AB=12$, $AC=15$, $\cos A=1/3$, դ) $AB=25$, $AC=15$, $BC=8\sqrt{10}$:

248. Գտնել՝

ա) $\sqrt{3}\sin\dfrac{\alpha}{2}$ -ը, եթե $\cos\alpha=\dfrac{5}{6}$ և $0<\alpha<\pi$,

բ) $8\cos\dfrac{\alpha}{2}$ -ը, եթե $\cos\alpha=\dfrac{1}{8}$ և $-\pi<\alpha<0$,

գ) $3\sqrt{15}\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}$ -ը, եթե $\cos\alpha=\dfrac{7}{8}$ և $\dfrac{3}{2}\pi<\alpha<2\pi$,

➢դ) $\sqrt{10}\sin\dfrac{\alpha}{2}$ -ը, եթե $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$ և $5\dfrac{\pi}{2}<\alpha<3\pi$,

➢ե) $4\cos\dfrac{\alpha}{2}$ -ը, եթե $\sin\alpha=-\dfrac{\sqrt{15}}{8}$ և $\pi<\alpha<3\dfrac{\pi}{2}$:

➢**249.** Ապացուցել, որ՝

ա) $\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{12}+\mathrm{ctg}\dfrac{\pi}{12}=4$, բ) $\mathrm{ctg}\dfrac{\pi}{8}-\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{8}=2$, գ) $\dfrac{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{12}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}}{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{8}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}=\sqrt{\frac{3}{2}}$,   դ) $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{12}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{8}}=\sqrt{3}$:

250. Հաշվել՝

ա) $\sqrt{6}\sin\frac{\alpha}{2}$ -ը, եթե $\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{4}$ և $\frac{5}{2}\pi<\alpha<3\pi$,

բ) $\sqrt{11}\cos\frac{\alpha}{2}$ -ը, եթե $\operatorname{tg}\alpha=\frac{6\sqrt{2}}{7}$ և $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$,

գ) $\sqrt{118}\sin\frac{\alpha}{2}$ -ը, եթե $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{24\sqrt{6}}{5}$ և $\frac{5}{2}\pi<\alpha<3\pi$:

251. Հաշվել՝

ա) $3\sqrt{7}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ -ը, եթե $\cos 2\alpha=\frac{1}{8}$ և $\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi$,

բ) $4\sqrt{15}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ -ը, եթե $\cos 2\alpha=\frac{17}{32}$ և $\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi$:

Կրկնության համար

252. Ի՞նչ կշռային հարաբերությամբ պետք է խառնել 25% -անոց աղի լուծույթը մաքուր աղի հետ 40% -անոց աղի լուծույթ ստանալու համար:

253. Ի՞նչ կշռային հարաբերությամբ պետք է խառնել 15% -անոց աղի լուծույթը թորած ջրի հետ 12% -անոց աղի լուծույթ ստանալու համար:

254. 20% -անոց աղի լուծույթը խառնեցին թորած ջրի հետ՝ $2:3$ կշռային հարաբերությամբ: Քանի՞ տոկոսանոց աղի լուծույթ ստացվեց:

255. 15% -անոց աղի լուծույթը խառնեցին մաքուր աղի հետ՝ $4:1$ կշռային հարաբերությամբ: Քանի՞ տոկոսանոց աղի լուծույթ ստացվեց:

§9. Եռանկյունաչափական ֆունկցիաների արտադրյալի և գումարի բանաձևերը

Այս պարագրաֆում կստանանք եռանկյունաչափական ֆունկցիաների արտադրյալը գումարի և գումարը արտադրյալի ձևափոխելու բանաձևեր: Գումարելով

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \tag{1}$$

և

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \tag{2}$$

նույնությունները, և ստացված հավասարության երկու մասերը բաժանելով 2-ի, ստանում ենք.

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)): \qquad (3)$$

Իսկ եթե (2)-ից հանենք (1)-ը և ստացվածը բաժանենք 2-ի, կստանանք.

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)): \qquad (4)$$

Նման ձևով

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \quad \text{և} \quad \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

նույնություններից կստանանք.

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)): \qquad (5)$$

Ստացված (3)-(5) բանաձևերը հնարավորություն են տալիս եռանկյունաչափական ֆունկցիաների ***արտադրյալը ձևափոխել գումարի:***

Օրինակ 1: Գտնենք $\sin 37{,}5^\circ\cdot\sin 7{,}5^\circ$ արտահայտության արժեքը: Կիրառելով (4) բանաձևը՝ ստանում ենք՝

$$\sin 37{,}5^\circ\cdot\sin 7{,}5^\circ=\frac{1}{2}\left(\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}:$$

Պատասխան՝ $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)/4:$

Եթե (3) նույնության մեջ տեղադրենք $\alpha=\frac{x+y}{2}$ և $\beta=\frac{x-y}{2}$, կստանանք՝

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}: \qquad (6)$$

Հանգունորեն (4) և (5) նույնություններից համապատասխանաբար ստացվում են՝

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}, \qquad (7)$$

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}: \qquad (8)$$

Վերջին բանաձևում y-ի փոխարեն տեղադրելով $-y$, ստանում ենք՝

$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2} \,: \qquad (9)$$

(6)-(9) բանաձևերը կոչվում են ***եռանկյունաչափական ֆունկցիաների գումարի բանաձևեր***: Դրանք հնարավորություն են տալիս եռանկյունաչափական ֆունկցիաների գումարը և տարբերությունը ձևափոխել արտադրյալի:

Օրինակ 2: Ստուգենք, որ $\sin 61^\circ - \sin 59^\circ = \sin 1^\circ$: Իրոք,

$$\sin 61^\circ - \sin 59^\circ = 2\sin\frac{61^\circ - 59^\circ}{2}\cdot\cos\frac{61^\circ + 59^\circ}{2} = 2\sin 1^\circ \cdot \cos 60^\circ = \sin 1^\circ :$$

Նկատենք, որ գումարման (6)-(9) բանաձևերում գումարվում կամ հանվում են նույնանուն ֆունկցիաներ: Սակայն այդ բանաձևերը կիրառվում են նաև այն դեպքում, երբ ֆունկցիաներից մեկը սինուսն է, մյուսը՝ կոսինուսը: Օրինակ՝

$$\sin x + \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos y = 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x+y}{2}\right):$$

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ինչի՞ է հավասար երկու անկյունների կոսինուսների արտադրյալը:
2. Ինչի՞ է հավասար երկու անկյունների սինուսների արտադրյալը:
3. Ձևափոխեք գումարի $\sin x \cos y$ արտադրյալը:
4. Ապացուցեք $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ նույնությունը:
5. Ձևափոխեք արտադրյալի $\cos\alpha - \cos\beta$ արտահայտությունը:
6. Ձևափոխեք արտադրյալի $\sin\alpha + \sin\beta$ արտահայտությունը:
7. Ապացուցեք, որ $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$:

Առաջադրանքներ

Գտնել արտահայտության արժեքը (256-258).

256. ա) $\sin 37{,}5^\circ \cdot \sin 7{,}5^\circ$, բ) $\cos 37{,}5^\circ \cdot \cos 7{,}5^\circ$,

գ) $\sin 37{,}5^\circ \cdot \cos 7{,}5^\circ$, դ) $\sin 75^\circ \cdot \sin 15^\circ$:

257. ա) $\sin 75^\circ \cdot \cos 15^\circ$, բ) $\cos 67{,}5^\circ \cdot \sin 22{,}5^\circ$,

գ) $\cos 67{,}5^\circ \cdot \cos 22{,}5^\circ$, դ) $\cos 97{,}5^\circ \cdot \cos 37{,}5^\circ$:

258. ա) $\cos\frac{5\pi}{12}\cdot\cos\frac{\pi}{4}$, բ) $\cos\frac{5\pi}{12}\cdot\sin\frac{\pi}{4}$,

գ) $\sin\frac{\pi}{12}\cdot\cos\frac{\pi}{4}$, դ) $\sin\frac{\pi}{12}\cdot\sin\frac{\pi}{4}$:

259. Ապացուցել հավասարությունը.

ա) $\dfrac{1}{2\sin 70^\circ}-2\cos 40^\circ=-1$, բ) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sin 20^\circ}-4\cos 40^\circ=2$:

Արտահայտությունը ներկայացնել արտադրյալի տեսքով (260-262).

260. ա) $\sin\alpha+\sin 5\alpha$, բ) $\sin 8x-\sin 2x$,

գ) $\cos 3y-\cos y$, դ) $\cos 2x+\cos 4x$:

261. ա) $\sin 12^\circ+\sin 24^\circ$, բ) $\cos\dfrac{11}{12}\pi+\cos\dfrac{3}{4}\pi$,

գ) $\cos\dfrac{\pi}{6}-\cos\dfrac{7\pi}{12}$, դ) $\sin\dfrac{2\pi}{5}+\sin\dfrac{\pi}{5}$:

262. ա) $\sin x+\cos 3x$, բ) $\sin 2x-\cos 2y$,

գ) $\cos y+\sin 3y$, դ) $\cos 4x-\sin 2y$:

➢**263.** a և b էջերով ուղղանկյուն եռանկյան մի անկյունը 15° է: Գտնել ներքնաձիգի երկարությունը, եթե՝ ա) $a+b=\sqrt{54}$, բ) $a-b=\sqrt{50}$:

* **264.** Շրջանագծին արտագծած սեղանի սուր անկյունները հավասար են 15° և 75°, իսկ բարձրությունը՝ 6 սմ: Գտնել սեղանի պարագիծը:

265. Ցույց տալ, որ՝

ա) $\dfrac{\sin 47^\circ+\sin 13^\circ}{\cos 62^\circ+\cos 28^\circ}=\sqrt{0{,}5}$, բ) $\dfrac{\sin 41^\circ-\sin 19^\circ}{\cos 34^\circ-\cos 56^\circ}=\sqrt{1{,}5}$,

գ) $\dfrac{1+\sqrt{2}\cos 15^\circ}{1+\sqrt{2}\sin 15^\circ}=\sqrt{3}$, դ) $\dfrac{1-\sqrt{2}\cos 75^\circ}{\sqrt{2}-2\sin 75^\circ}=-\sqrt{1{,}5}$:

➢**266.** Ապացուցել նույնությունը.

ա) $\dfrac{\sin(\alpha+30^\circ)-\cos(\alpha+60^\circ)}{\sin(\alpha+60^\circ)-\cos(\alpha+30^\circ)}=\sqrt{3}$, բ) $\dfrac{\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)-\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)-\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)}=\sqrt{2}$:

267. Ապացուցել, որ՝

ա) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$, բ) $\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$:

268. Ձևափոխել արտահայտությունը, օգտվելով նախորդ վարժությունից.

ա) $\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}3x$, բ) $\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}3x$,

գ) $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{12}-\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3}$, դ) $\operatorname{tg}\dfrac{4\pi}{5}-\operatorname{tg}\dfrac{3\pi}{5}$:

Ներկայացնել արտադրյալի տեսքով (269-270).

269. ա) $\dfrac{1}{2}+\cos x$, բ) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\sin 2\alpha$, գ) $1-\sin x$, դ) $\frac{1}{2}+\sin 4x$, ե) $\sqrt{3}-2\sin 2\alpha$, զ) $\sqrt{2}+2\cos x$:

270. ա) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x$, բ) $\cos x-\cos 3x+\cos 5x-\cos 7x$,

գ) $1-\cos 4x+\cos 5x-\cos 9x$, դ) $1+\cos 2x+\sin 8x+\sin 6x$:

271. Ապացուցել նույնությունը.

ա) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\beta$, բ) $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}=\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta$:

Կրկնության համար

272. Գյուղից կայարան հեռավորությունը 60 կմ է: Մոտոցիկլավարը գյուղից դուրս եկավ հեծանվորդից $1\frac{1}{4}$ ժամ ուշ և կայարան հասավ այն ժամանակ, երբ հեծանվորդը կայարանից հեռու էր 21 կմ: Գտնել հեծանվորդի արագությունը, եթե այն 18 կմ/ժ-ով փոքր է մոտոցիկլավարի արագությունից:

273. Գյուղից դեպի քաղաք, որոնց հեռավորությունը 120 կմ է, մեկնեց մարդատար ավտոմեքենան: 30 ր անց քաղաքից գյուղ մեկնեց բեռնատարը և մարդատարին հանդիպեց քաղաքից 45 կմ հեռավորությամբ: Գտնել բեռնատարի արագությունը, եթե այն մարդատար մեքենայի արագությունից փոքր է 5 կմ/ժ-ով:

274. Երկու ավտոմեքենաներ գյուղից միաժամանակ մեկնեցին քաղաք, որը գյուղից հեռու է 180 կմ: Մի մեքենան քաղաք հասավ մյուսից 45 րոպեով ուշ, քանի որ նրա արագությունը 20 կմ/ժ-ով փոքր էր: Ի՞նչ արագությամբ էր ընթանում յուրաքանչյուր ավտոմեքենան:

§10. Եռանկյունաչափական արտահայտությունների նույնական ձևափոխություններ

Նույնական են համարվում այն ձևափոխությունները, որոնք չեն փոփոխում արտահայտության թույլատրելի արժեքների բազմությունը, և ձևափոխությունից հետո ստացված արտահայտության արժեքը յուրաքանչյուր թույլատրելի արժեքի դեպքում համընկնում է սկզբնական արտահայտության արժեքին: Մենք ստացել ենք մի շարք եռանկյունաչափական նույնություններ, որոնց զգալի մասը կարելի է դիտարկել որպես նույնական ձևափոխություններ: Օրինակ՝ եթե $\sin x+\sin y$ արտահայտությունը փոխարինենք

$$2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

արտահայտությամբ, ապա $\sin x+\sin y$ արտահայտության հետ կատարած կլինենք նույնական ձևափոխություն: Ընդհանրապես, մեր ստացած բոլոր այն բանաձևերը, որոնցում մասնակցում են միայն սինուսը և կոսինուսը, և չկա արմատանշան, կարելի է դիտարկել որպես ձախ մասի նույնական ձևափոխություն աջ մասին:

Վիճակն այլ է, երբ բանաձևում կա տանգենս կամ կոտանգենս: Օրինակ՝

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \qquad (1)$$

բանաձևը նույնություն է, քանի որ բոլոր այն α-ների և β-ների համար, որոնց դեպքում որոշված են (1) հավասարության աջ և ձախ մասերը, դրանց արժեքները իրար հավասար են: Սակայն աջ և ձախ մասերի թույլատրելի արժեքների բազմությունները տարբեր են: Եթե $\alpha=\beta=\frac{\pi}{2}$, ապա (1) բանաձևի ձախ մասը որոշված է և զրո է, իսկ աջ մասը որոշված չէ: Հետևաբար՝ (1)-ը նույնական ձևափոխություն չէ:

Կատարելով նույնական ձևափոխություններ և կիրառելով մեզ արդեն հայտնի եռանկյունաչափական նույնությունները, կարելի է ստանալ նոր նույնություններ:

Օրինակ 1: Ստանանք բանաձև $\sin 3\alpha$-ի համար: Կիրառելով գումարի սինուսի և կրկնակի անկյան բանաձևերը՝ ստանում ենք՝

$$\sin 3\alpha=\sin(\alpha+2\alpha)=\sin\alpha\cos 2\alpha+\cos\alpha\sin 2\alpha=$$

$$=\sin\alpha\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)+2\sin\alpha\cos^2\alpha=$$

$$=\sin\alpha\left(1-2\sin^2\alpha\right)+2\sin\alpha\left(1-\sin^2\alpha\right)=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha:$$

Այսպիսով՝ $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$:

Օրինակ 2: Ապացուցենք, որ երբ $0<\alpha<\pi$, ապա

$$\sqrt{1+\cos\alpha}+\sqrt{1-\cos\alpha}=2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right):$$

Քանի որ $0<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}$, ուրեմն՝ $\frac{\alpha}{2}$ անկյան սինուսն ու կոսինուսը դրական են, և համաձայն կես անկյան բանաձևերի՝

$$\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{1+\cos\alpha}, \qquad \sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{1-\cos\alpha}:$$

Օգտվելով երկու անկյունների գումարի սինուսի բանաձևից՝ կստանանք՝

$$2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{1+\cos\alpha}+\sqrt{1-\cos\alpha}\ :$$

Օրինակ 3: Հաշվենք հետևյալ արտահայտության արժեքը.

$$16\sin 20^\circ\cdot\sin 40^\circ\cdot\sin 60^\circ\cdot\sin 80^\circ\ :$$

Օգտվելով եռանկյունաչափական ֆունկցիաների արտադրյալը գումարի ձևափոխելու բանաձևերից՝ ստանում ենք՝

$$16\sin 20^\circ\cdot\sin 40^\circ\cdot\sin 60^\circ\cdot\sin 80^\circ=8\left(\cos 20^\circ-\cos 60^\circ\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos 10^\circ=$$
$$=2\sqrt{3}\left(2\cos 20^\circ\cdot\cos 10^\circ-\cos 10^\circ\right)=$$
$$=2\sqrt{3}\left(\cos 30^\circ+\cos 10^\circ-\cos 10^\circ\right)=2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=3:$$

Օրինակ 4: Պարզեցնենք

$$\frac{\sin\alpha-2\sin 2\alpha+\sin 3\alpha}{\cos\alpha-2\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}$$

արտահայտությունը: Համարիչում ու հայտարարում առաջին և երրորդ անդամների գումարը դարձնելով արտադրյալ՝ կստանանք՝

$$\frac{2\sin 2\alpha\cos\alpha-2\sin 2\alpha}{2\cos 2\alpha\cos\alpha-2\cos 2\alpha}=\frac{\sin 2\alpha(\cos\alpha-1)}{\cos 2\alpha(\cos\alpha-1)}=\operatorname{tg}2\alpha\ :$$

Օրինակ 5: Ապացուցենք, որ $\sqrt{3}\cos 15^\circ+\sin 15^\circ=2\sin 75^\circ$:

Իրոք, օգտվելով երկու անկյունների գումարի սինուսի բանաձևից՝ կստանանք՝

$$\sqrt{3}\cos 15^\circ+\sin 15^\circ=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 15^\circ+\frac{1}{2}\sin 15^\circ\right)=$$
$$=2\left(\sin 60^\circ\cos 15^\circ+\cos 60^\circ\sin 15^\circ\right)=2\sin 75^\circ\ :$$

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ո՞ր ձևափոխությունն է կոչվում նույնական:
2. Ի՞նչ տարբերություն կա նույնության և նույնական ձևափոխության միջև:
3. Նույնությո՞ւն է, թե՞ նույնական ձևափոխություն հետևյալ բանաձևը.

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}\ :$$

4. Արտածեք բանաձև, որը $\cos 3\alpha$ -ն արտահայտում է $\cos\alpha$ -ով:

Առաջադրանքներ

Ապացուցել նույնությունը (275-281).

275. ա) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=\cos 2\alpha$, բ) $(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)\sin 2\alpha=2$,

գ) $\dfrac{\cos^2\alpha}{1+\sin\alpha}+\sin\alpha=1$, դ) $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}=\cos 2\alpha$:

276. ա) $\cos^2(\pi+\alpha)+\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=1$,

բ) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\sin(\pi-\alpha)=\dfrac{1}{2}\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+2\alpha\right)$:

277. ա) $(1+\operatorname{ctg}^2\alpha)(1-\sin^2\alpha)=\operatorname{ctg}^2\alpha$,

բ) $(1+\operatorname{tg}^2\alpha)(1-\cos^2\alpha)=\operatorname{tg}^2\alpha$, գ) $\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha\operatorname{ctg}\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$:

278. ա) $\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}+\dfrac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}=1$, բ) $\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}-\dfrac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}=\cos 2\alpha$:

➢**279.** ա) $\operatorname{tg}3\alpha-\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}3\alpha\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}\alpha$,

բ) $\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha\cos 8\alpha\cos 16\alpha=\dfrac{\sin 32\alpha}{32\sin\alpha}$:

➢**280.** 4α անկյան սինուսն ու կոսինուսն արտահայտեք α անկյան սինուսով և կոսինուսով:

* **281.** Ապացուցեք, որ եթե A-ն, B-ն, C-ն եռանկյան անկյուններ են, ապա

ա) $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\dfrac{A}{2}\cdot\cos\dfrac{B}{2}\cdot\cos\dfrac{C}{2}$,

բ) $\operatorname{tg}\dfrac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{B}{2}+\operatorname{tg}\dfrac{B}{2}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{C}{2}+\operatorname{tg}\dfrac{C}{2}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{A}{2}=1$,

գ) $\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C=\operatorname{tg}A\cdot\operatorname{tg}B\cdot\operatorname{tg}C$ (եթե ուղղանկյուն եռանկյուն չէ):

282. Պարզեցնել արտահայտությունը.

ա) $\dfrac{\sin(45^\circ+\alpha)+\sin(45^\circ-\alpha)}{\sin(45^\circ+\alpha)-\sin(45^\circ-\alpha)}$, բ) $\dfrac{\cos(\alpha+60^\circ)-\cos(\alpha-60^\circ)}{\cos(\alpha+60^\circ)+\cos(\alpha-60^\circ)}$:

Ապացուցել հավասարությունը (283-286).

* **283.** ա) $\cos\dfrac{2\pi}{7}+\cos\dfrac{4\pi}{7}+\cos\dfrac{6\pi}{7}=-\dfrac{1}{2}$,

բ) $\cos\dfrac{\pi}{5}+\cos\dfrac{3\pi}{5}=\dfrac{1}{2}$, գ) $\sin\dfrac{3\pi}{10}-\sin\dfrac{\pi}{10}=\dfrac{1}{2}$:

➢**284.** ա) $8\cos 10^\circ\cos 20^\circ\cos 40^\circ=\operatorname{ctg}10^\circ$, բ) $16\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ = 1$,

գ) $16\sin 6^\circ \cdot \cos 12^\circ \cdot \cos 24^\circ \cdot \sin 42^\circ = 1$,

դ) $\operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 40^\circ \operatorname{tg} 60^\circ \operatorname{tg} 80^\circ = 3$:

➢285. Ապացուցել, որ եթե $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, ապա՝

ա) $\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x} = 2\cos\frac{x}{2}$, բ) $\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x} = 2\sin\frac{x}{2}$:

***286.** Ապացուցել հավասարությունը.

ա) $\sin 47^\circ + \sin 61^\circ - \sin 11^\circ - \sin 25^\circ = \cos 7^\circ$,

բ) $\sin 19^\circ + \sin 25^\circ + \sin 31^\circ = 4\sin 25^\circ \cos 33^\circ \cos 27^\circ$,

գ) $\sin 16^\circ + \sin 24^\circ + \sin 40^\circ = 4\sin 20^\circ \cos 12^\circ \cos 8^\circ$:

Ապացուցել նույնությունը (287-289).

➢287. ա) $\left(\frac{2}{1+\operatorname{tg}\alpha} + \operatorname{tg} 2\alpha\right)\left(\cos^2\alpha - \frac{1}{2}\right) = \cos^2\alpha$,

բ) $\operatorname{tg}\alpha + 2\operatorname{tg} 2\alpha + \frac{2(1-\operatorname{tg}^2 2\alpha)}{\operatorname{tg} 2\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$:

➢288. ա) $\frac{\operatorname{tg}(\alpha+\beta) - \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}(\alpha+\beta)} = \operatorname{tg}\beta$, բ) $\frac{\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha) - \operatorname{tg}(45^\circ-\alpha)}{\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha) + \operatorname{tg}(45^\circ-\alpha)} = \sin 2\alpha$:

➢289. ա) $\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos^3\alpha} = 1 + \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^3\alpha$,

բ) $(\operatorname{tg} 2\alpha - 2\operatorname{tg}\alpha)(\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha) = 2\operatorname{tg}^2\alpha$:

Ապացուցել հավասարությունը (290-291).

➢290. ա) $\sin^4\frac{\pi}{8} + \cos^4\frac{\pi}{8} = \frac{3}{4}$, բ) $\sin^4\frac{\pi}{12} + \cos^4\frac{\pi}{12} = \frac{7}{8}$:

գ) $\sin^2 10^\circ + \sin^2 50^\circ + \sin^2 70^\circ = 1{,}5$,

դ) $\cos^2 50^\circ + \cos^2 70^\circ - \cos^2 80^\circ = 0{,}5$:

➢291. ա) $\frac{2\cos 50^\circ + \cos 70^\circ}{\sqrt{3}\sin 70^\circ} = 1$, բ) $\frac{2\sin 70^\circ - \sqrt{3}\cos 10^\circ}{\sin 10^\circ} = 1$,

գ) $\frac{1}{\sin 50^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{\cos 50^\circ} = 4$, դ) $\frac{\sqrt{3}}{\cos 70^\circ} - \frac{1}{\sin 70^\circ} = 4$:

292. Գտնել արտահայտության թույլատրելի արժեքների բազմությունը.

ա) $x+\dfrac{1}{x^2-4}$,

բ) $\dfrac{x}{x^2-5x+6}$,

գ) $\sqrt{x^2-7x+10}$,

դ) $\dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2+x-6}}$,

ե) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-2}}+2\sqrt{x^2-1}$,

զ) $\dfrac{3}{\sqrt[5]{3-x}}+\sqrt[4]{x^2+x-2}$:

3-րդ ԳԼՈՒԽ

Ֆունկցիա

§1. Թվային ֆունկցիա

Դուք արդեն ծանոթ եք ֆունկցիայի գաղափարին՝ որպես կամայական բազմությունների տարրերի համապատասխանության: Այս գլխում կուսումնասիրենք միայն թվային ֆունկցիաներ, այսինքն՝ այնպիսի ֆունկցիաներ, որոնք որոշված են թվային բազմությունում և ընդունում են թվային արժեքներ: Հիշեցնենք, որ թվային է կոչվում այն բազմությունը, որի տարրերը թվեր են:

Սահմանում: ***Ասում են, որ X թվային բազմությունում որոշված է f թվային ֆունկցիա, եթե այն X բազմության ամեն մի x թվի համապատասխանեցնում է որևէ y թիվ՝ $y = f(x)$:***

Ֆունկցիայի՝ $y = f(x)$ գրելաձևում x-ը և y-ը փոփոխականներ են, իսկ f տառը խորհրդանշում է այն կանոնը, որով x փոփոխականի յուրաքանչյուր արժեքին (X բազմությունից) համապատասխանում է y փոփոխականի որոշակի արժեք: Նման դեպքում ասում են, որ y-ը x-ից ֆունկցիա է, կամ՝ y-ը ***ֆունկցիոնալ կախվածության մեջ է*** x-ից: x փոփոխականն անվանում են ***անկախ փոփոխական***, իսկ y-ը՝ ***կախյալ փոփոխական***: x փոփոխականն անվանում են նաև ***ֆունկցիայի արգումենտ***:

X բազմությունն անվանում են f ***ֆունկցիայի որոշման տիրույթ*** և նշանակում՝ $D(f)$:

Անկախ փոփոխականը սովորաբար նշանակում են x տառով, կախյալը՝ y, իսկ թվային ֆունկցիաները՝ f, g, F, φ և այլ տառերով:

f ֆունկցիայի որոշման տիրույթը նշելու համար ընդունված է նաև գրության հետևյալ ձևը՝ $f : X \to Y$: Սա նշանակում է, որ $D(f) = X$ և f-ն ընդունում է արժեքներ Y բազմությունից:

Եթե f ֆունկցիան $a \in X$ թվին համապատասխանեցնում է b թիվը, ապա ասում են, որ a կետում f ***ֆունկցիայի արժեքը*** b-ն է, կամ f ***ֆունկցիան*** a ***կետում ընդունում է*** b ***արժեքը*** և գրում են՝ $f(a) = b$: Այս դեպքում ասում են նաև, որ b թիվը f ֆունկցիայի արժեք է, իսկ այդպիսի բոլոր b-երի բազմությունն անվանում են f ***ֆունկցիայի արժեքների բազմություն*** կամ ***արժեքների փիրույթ*** և նշանակում $E(f)$: Այս նշանակումներով կարող ենք գրել՝ $f:D(f)\to E(f)$:

«Տրված է f ֆունկցիան» ասելով հասկանում ենք, որ տրված են նրա որոշման $X=D(f)$ տիրույթը և այն կանոնը, որով X բազմության ամեն մի x թվին համապատասխանում է որևէ $f(x)$ թիվ: Հաճախ այդ կանոնը տրվում է ինչ-որ արտահայտությամբ, որը ցույց է տալիս, թե ինչ գործողություններ պետք է կատարել x թվով $f(x)$-ը ստանալու համար:

Դիցուք, f ֆունկցիայի որոշման տիրույթը X բազմությունն է և այդ բազմության ամեն մի թվին ֆունկցիան համապատասխանեցնում է նրա քառակուսին: Այս ֆունկցիան տալու համար մենք կօգտագործենք գրության հետևյալ համարժեք ձևերը՝

ա) $y=x^2$, $x\in X$,

բ) $f(x)=x^2$, $x\in X$,

գ) x^2, $x\in X$:

Օրինակ 1: $f(x)=b$, $x\in X$, ֆունկցիան իր որոշման տիրույթի կամայական կետում ընդունում է միևնույն՝ b արժեքը: Այսպիսի ֆունկցիան կոչվում է ***հաստատուն ֆունկցիա***:

Օրինակ 2: $x+1$, $x\in X$, ֆունկցիան X բազմության կամայական թվին համապատասխանեցնում է $x+1$ թիվը:

Եթե ֆունկցիան տրված է արտահայտությամբ և նշված չէ որոշման տիրույթը, ապա ֆունկցիայի որոշման տիրույթ համարվում է այդ արտահայտության թույլատրելի արժեքների բազմությունը:

Օրինակ 3: $f(x)=x+1$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթը $(-\infty;\infty)$-ն է: Ակնհայտ է, որ $E(f)=(-\infty;\infty)$:

Չնայած երկրորդ և երրորդ օրինակներում ֆունկցիաները որոշվում են նույն արտահայտությամբ, այդ ֆունկցիաները նույնն են միայն այն դեպքում, երբ $X=(-\infty;\infty)$: Մնացած դեպքերում այդ ֆունկցիաների որոշման տիրույթները տարբեր են, հետևաբար, տարբեր են նաև ֆունկցիաները:

Ֆունկցիան կարելի է տալ նաև մի քանի արտահայտությամբ:

Օրինակ 4: Դիցուք,

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{եթե } x\ge 0 \\ -x, & \text{եթե } x<0: \end{cases}$$

Այս ֆունկցիան $[0;\infty)$ բազմությունում որոշվում է x արտահայտությամբ, իսկ $(-\infty;0)$ բազմությունում՝ $-x$ արտահայտությամբ: Սա մեզ լավ ծանոթ $f(x)=|x|$ ֆունկցիան է: Այն որոշված է ամբողջ թվային առանցքի վրա, իսկ $E(f)=[0;\infty)$:

Օրինակ 5: Դիտարկենք $y=f(x)$ ֆունկցիան, որը յուրաքանչյուր x թվի համապատասխանեցնում է նրա ***ամբողջ մասը***՝ ամենամեծ ամբողջ թիվը, որը չի գերազանցում x-ը: Օրինակ՝ $f(2{,}5)=2$, $f(0{,}3)=0$, $f(7)=7$, $f(-1{,}2)=-2$: Ինչպես տեսնում եք, այս ֆունկցիան չի տրվում բանաձևով, մենք պարզապես նկարագրեցինք այն կանոնը, որով հաշվվում է ֆունկցիայի արժեքը յուրաքանչյուր կետում: Ֆունկցիայի որոշման տիրույթն ամբողջ թվային առանցքն է, իսկ արժեքների բազմությունը՝ ամբողջ թվերի բազմությունը: Այն ընդունված է նշանակել այսպես՝ $y=[x]$:

Օրինակ 6: Գիտենք, որ քառակուսու մակերեսը հավասար է նրա կողմի երկարության քառակուսուն: Փաստորեն, եթե x-ով նշանակենք քառակուսու կողմի երկարությունը, իսկ y-ով՝ մակերեսը, ապա $y=x^2$: Քառակուսու մակերեսի ֆունկցիոնալ կախվածությունը նրա կողմի երկարությունից տրվում է $y=x^2$ բանաձևով:

Այս օրինակում բնական է $y=x^2$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթը համարել $(0;\infty)$ միջակայքը*, քանի որ քառակուսու կողմի երկարությունն արտահայտվում է դրական թվով: Ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը նույնպես $(0;\infty)$ միջակայքն է, քանի որ յուրաքանչյուր y դրական թիվ $x=\sqrt{y}$ կողմով քառակուսու մակերեսն է:

Օրինակ 7: Եթե y-ով նշանակենք x մակերեսով քառակուսու կողմի երկարությունը, ապա կստանանք $y=\sqrt{x}$, $x\in(0;\infty)$, ֆունկցիան կամ քառակուսու կողմի երկարության ֆունկցիոնալ կախվածությունը քառակուսու մակերեսից:

Օրինակ 8: Դիցուք, մարմինը երկրի մակերևույթից h բարձրության կետից ազատ անկում է կատարում: Որոշենք անկումն սկսելուց t վրկ անց մարմնի բարձրությունը՝ մինչև երկրի մակերևույթին ընկնելը:

Ֆիզիկայի դասընթացից գիտեք, որ ազատ անկում կատարող մարմինը t վայրկյանում անցնում է $gt^2/2$ ճանապարհ, որտեղ g-ն ազատ անկման արագացումն է: Որոշենք այն T ժամանակը, որից հետո մարմինը կհայտնվի երկրի

---

*) *Այսուհետև միջակայք կանվանենք նաև $(-\infty;\infty)$, $(-\infty;a)$, $(a;\infty)$ տեսքի բազմությունները, որտեղ $a\in\mathbf{R}$:*

մակերևույթին: Այդ ժամանակը որոշվում է $gT^2/2=h$ հավասարումից՝ $T=\sqrt{2h/g}$: Հետևաբար՝ t պահին մարմինը կգտնվի երկրի մակերևույթից $h-gt^2/2$ բարձրության վրա, որտեղ $0\le t\le T$: Այսպիսով՝ եթե y-ով նշանակենք t պահին մարմնի բարձրությունը երկրի մակերևույթից, ապա կստանանք

$$y=h-\frac{gt^2}{2},\quad t\in[0;T]$$

ֆունկցիոնալ կախվածությունը:

Օրինակ 9: Գտնենք $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4+x^2}}$ ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը:

Երբ x-ը փոփոխվում է $(-\infty;+\infty)$ միջակայքում, x^2 արտահայտությունն ընդունում է $[0;+\infty)$ միջակայքի բոլոր արժեքները, ուստի $(4+x^2)$ արտահայտության արժեքների բազմությունը կլինի $[4;+\infty)$ միջակայքը, իսկ $\sqrt{4+x^2}$ արտահայտության արժեքների բազմությունը՝ $[2;+\infty)$ միջակայքը: Մնում է նկատել, որ երբ t թիվն ընդունում է $[2,+\infty)$ միջակայքի բոլոր արժեքները, $\dfrac{1}{t}$ արտահայտությունը «լցնում» է $(0;0{,}5]$ միջակայքը: Հետևաբար՝ $E(f)=(0;0{,}5]$:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ո՞ր բազմությունն են անվանում թվային:
2. Ի՞նչ է թվային ֆունկցիան:
3. Ո՞րն է անկախ փոփոխականը և ո՞րը՝ կախյալ:
4. Ի՞նչ ենք հասկանում, ասելով՝ «տրված է f ֆունկցիան»:
5. Ո՞ր բազմությունն են անվանում f ֆունկցիայի արժեքների բազմություն:
6. Ո՞ր ֆունկցիան են անվանում հաստատուն ֆունկցիա:
7. Ո՞րն է ֆունկցիայի որոշման տիրույթը, եթե ֆունկցիան տրված է արտահայտությամբ և նշված չէ նրա որոշման տիրույթը:
9. Ի՞նչ բանաձևով է տրվում քառակուսու մակերեսի ֆունկցիոնալ կախվածությունը նրա կողմի երկարությունից:

Առաջադրանքներ

293. Գտնել f ֆունկցիայի արժեքները տրված x կետերում.

ա) $f(x)=x+\dfrac{1}{x},\quad x=-2,\ x=3,\ x=\dfrac{1}{3}$,

բ) $f(x)=\sqrt{4x-x^2}+1,\quad x=0,\ x=2,\ x=4$,

գ) $f(x)=\sin^2 2x,\quad x=-\dfrac{\pi}{12},\ x=0,\ x=\dfrac{\pi}{3}$,

դ) $f(x)=x^3+\sqrt[3]{x},\quad x=-1,\ x=0,\ x=8$;

294. Դիցուք, $f(x)=\dfrac{3x-5}{x^2-1}$:

ա) Գտնել f ֆունկցիայի որոշման տիրույթը:

բ) Գտնել f ֆունկցիայի արժեքները $x=-2$; $x=0{,}5$; $x=3$ կետերում:

գ) -7; 0; $2{,}5$ թվերը պատկանո՞ւմ են արդյոք f ֆունկցիայի արժեքների բազմությանը:

295. ա) Գտնել $f(1)$-ը, $f(1{,}5)$-ը, $f(2)$-ը և $f(\sqrt{6})$-ը, եթե՝

$$f(x)=\begin{cases} x-1, & \text{երբ } x\in[0;1{,}5] \\ 7-4x, & \text{երբ } x\in(1{,}5;2] \\ x^2+2, & \text{երբ } x\in(2;3]: \end{cases}$$

բ) Գտնել f ֆունկցիայի արժեքը -2; $-\dfrac{1}{3}$; $0{,}5$; $\sqrt{2}$ կետերում, եթե

$$f(x)=\begin{cases} x^3+3, & \text{երբ } x\le -1 \\ 1-x, & \text{երբ } -1<x<1 \\ x^2-1, & \text{երբ } x\ge 1: \end{cases}$$

296. Գտնել այն կետը, որտեղ $f(x)=\dfrac{5x}{4x^2-3}$ ֆունկցիան ընդունում է՝

ա) 5 արժեքը, բ) $2{,}5$ արժեքը, գ) -5 արժեքը:

297. Որոշ երկրներում (օրինակ՝ ԱՄՆ-ում) մարմինների ջերմաստիճանն ընդունված է չափել ոչ թե Ցելսիուսի սանդղակով, որը կիրառում ենք մենք, այլ Ֆարենհեյթի սանդղակով: Ֆարենհեյթի սանդղակով T աստիճանի ֆունկցիոնալ կախվածությունը Ցելսիուսի t աստիճանից տրվում է $T=1{,}8t+32$ բանաձևով: Գտնել ջերմաստիճանն ըստ Ֆարենհեյթի, եթե ըստ Ցելսիուսի այն հավասար է.

ա) 0°, բ) -15°, գ) -40°, դ) 10°:

298. Օգտվելով նախորդ խնդրում բերված բանաձևից, գրեք ըստ Ցելսիուսի t աստիճանի ֆունկցիոնալ կախվածության բանաձևն ըստ Ֆարենհեյթի T աստիճանից և գտեք ջերմաստիճանն ըստ Ցելսիուսի, եթե ըստ Ֆարենհեյթի այն հավասար է.

ա) 23°, բ) 0°, գ) -40°, դ) 84°:

299. Գտնել ֆունկցիայի որոշման տիրույթը.

ա) $y=\dfrac{1}{x^4-10x^2+9}$, բ) $y=\dfrac{3x+3}{x^2-6x+8}$,

գ) $y=\dfrac{3x^2}{x-|x|}$, դ) $y=\dfrac{x}{1-x-|x-1|}$:

300. Գտնել ֆունկցիայի որոշման և արժեքների տիրույթները.

ա) $y=2+\dfrac{4}{x-3}$, բ) $y=\dfrac{2+x}{x+1}$, գ) $y=\dfrac{1}{x^2+9}$,

դ) $y=\dfrac{x}{|x|}$, ե) $y=\sqrt{50-2x^2}$, զ) $y=\dfrac{2}{|x-3|+5}$:

301. Գտնել ֆունկցիայի որոշման տիրույթը.

ա) $f(x)=\sqrt{x^2-16}+2x$, բ) $f(x)=\sqrt{36-x^2}+3x^3$,

գ) $y=\sqrt{6-x}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$, դ) $y=\dfrac{\sqrt{x^2-4x-12}}{\sqrt{8-x}}$:

302. Գտնել 15 մ/վրկ հաստատուն արագությամբ շարժվող կետի անցած ճանապարհի ֆունկցիոնալ կախվածությունը շարժման սկզբից անցած ժամանակից, եթե՝

ա) ճանապարհը չափվում է մետրերով, իսկ ժամանակը՝ վայրկյաններով,

բ) ճանապարհը չափվում է կիլոմետրերով, իսկ ժամանակը՝ ժամերով:

303. Գտնել խորանարդի ծավալի ֆունկցիոնալ կախվածությունը նրա՝

ա) կողմի երկարությունից, բ) լրիվ մակերևույթի մակերեսից:

304. Ինչպե՞ս է արտահայտվում կանոնավոր եռանկյանն արտագծած շրջանագծի շառավղի ֆունկցիոնալ կախվածությունը՝ ա) եռանկյան միջնագծի երկարությունից, բ) եռանկյան կողմի երկարությունից:

305. Գտնել շրջանագծին ներգծած քառակուսու մակերեսի ֆունկցիոնալ կախվածությունը շրջանագծի շառավղից:

306. R շառավղով շրջանագծին ներգծած ուղղանկյան կողմերից մեկի երկարությունն x է: Գտնել ուղղանկյան մակերեսի ֆունկցիոնալ կախվածությունն x-ից: Գտնել այդ ֆունկցիայի որոշման տիրույթը:

307. Դիցուք, $f(x)$, $x\in\mathbf{R}$ ֆունկցիան այնպիսին է, որ $f(5)=10$ և կամայական x և y թվերի համար $f(x+y)=f(x)+f(y)$: Գտնել այդ ֆունկցիայի արժեքները $0,\ 3,\ -5,\ \dfrac{2}{3}$ կետերում:

Կրկնության համար

308. Եթե եռանիշ թվին ձախից կցագրենք 7 թվանշանը և ստացված թվից հանենք 6857, կստանանք եռանիշ թվի կրկնապատիկը: Գտնել եռանիշ թիվը:

309. Եթե երկնիշ թվին ձախից և աջից կցագրենք 2 թվանշանը, կստանանք երկնիշ թվից 32 անգամ մեծ թիվ: Գտնել երկնիշ թիվը:

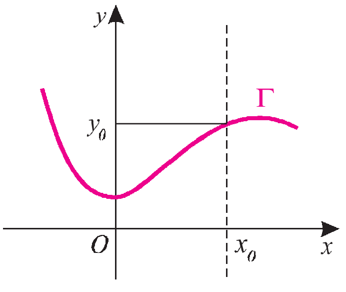
§2. Ֆունկցիայի գրաֆիկը

Թվային ֆունկցիաներն ուսումնասիրելիս հաճախ օգտվում են նրա գրաֆիկից:

Սահմանում: ***f ֆունկցիայի գրաֆիկ անվանում են կոորդինատային հարթության այն $(x; y)$ կետերի բազմությունը, որոնց համար $y = f(x)$:***

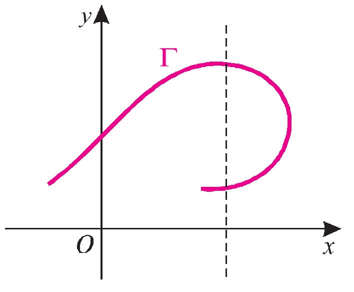
Սահմանումից հետևում է, որ ֆունկցիայի գրաֆիկը կոորդինատային հարթության ենթաբազմություն է: Սակայն կոորդինատային հարթության ամեն մի ենթաբազմություն չէ, որ ինչ-որ ֆունկցիայի գրաֆիկ է:

Եթե կոորդինատային հարթության Γ ենթաբազմությունը որևէ ֆունկցիայի գրաֆիկ է, ապա օրդինատների առանցքին զուգահեռ կամայական ուղիղ, որը հատում է աբսցիսների առանցքը որևէ x_0 կետում, կա՛մ Γ-ի հետ չունի ընդհանուր կետ (եթե $x_0 \notin D(f)$), կա՛մ ունի մեկ ընդհանուր կետ՝ $(x_0; y_0)$, որտեղ $y_0 = f(x_0)$ (նկ. 25, ա):



ա)

Նկ. 25



բ)

Հետևաբար՝ եթե Γ բազմությունն օրդինատների առանցքին զուգահեռ որևէ ուղղի հետ հատվում է մեկից ավելի կետերում, այն որևէ ֆունկցիայի գրաֆիկ լինել չի կարող (նկ. 25, բ):

Հակառակը, եթե կոորդինատային հարթության կետերի Γ բազմությունը օրդինատների առանցքին զուգահեռ յուրաքանչյուր ուղղի հետ հատվում է ոչ ավելի, քան մեկ կետում, ապա դա այն f ֆունկցիայի գրաֆիկն է, որը որոշվում է հետևյալ կանոնով. եթե $(x_0; y_0)$ կետը պատկանում է Γ-ին, ապա $f(x_0) = y_0$:

Հաճախ ֆունկցիայի գրաֆիկը լինում է գիծ կամ մի քանի գծերից կազմված պատկեր:

Որպեսզի կոորդինատային հարթության վրա գտնվող գիծը լինի որևէ ֆունկցիայի գրաֆիկ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ օրդինատների առանցքին զուգահեռ կամայական ուղիղ կամ չհատվի այդ գծի հետ, կամ հատվի միայն մի կետում:

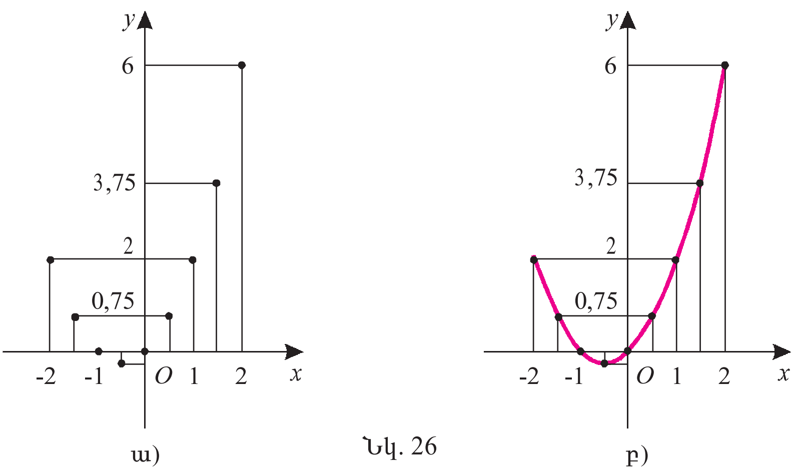
X միջակայքում տրված $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը մոտավոր պատկերելու համար կարելի է X միջակայքից ընտրել անկախ փոփոխականի մի քանի արժեք՝ $x_1, \cdots, x_n$, հաշվել այդ կետերում ֆունկցիայի $y_1, \dots, y_n$ արժեքները, հարթության վրա նշել $M_1(x_1; y_1), \cdots, M_n(x_n; y_n)$ կետերը և, եթե հայտնի է, որ ֆունկցիայի գրաֆիկն ինչ-որ իմաստով ողորկ գիծ է, ապա ստացված $M_1, \cdots, M_n$ կետերը ողորկ կորով միացնել:

Օրինակ 1: Կառուցենք $f(x) = x^2 + x$, $x \in [-2; 2]$, ֆունկցիայի գրաֆիկը:

Հաշվելով ֆունկցիայի արժեքները $-2; -1{,}5; -1; -0{,}5;$ $0;\ 0{,}5;\ 1;\ 1{,}5;\ 2$ կետերում՝ ստանում ենք՝ $f(-2) = 2$, $f(-1{,}5) = 0{,}75$, $f(-1) = 0$, $f(-0{,}5) = -0{,}25$, $f(0) = 0$; $f(0{,}5) = 0{,}75$, $f(1) = 2$, $f(1{,}5) = 3{,}75$, $f(2) = 6$ և լրացնում աղյուսակը: Կոորդինատային հարթության վրա նշելով $(-2; 2)$, $(-1{,}5; 0;75)$, $(-1; 0)$, $(-0{,}5; -0;25)$, $(0; 0)$, $(0{,}5; 0;75)$, $(1; 2)$, $(1{,}5; 3{,}75)$, $(2; 6)$ կետերը (նկ. 26, ա) և ողորկ կորով հաջորդաբար միացնելով, կստանանք ֆունկցիայի (մոտավոր) գրաֆիկը (նկ. 26, բ):

x	y
-2	2
$-1{,}5$	0,75
-1	0
$-0{,}5$	0,25
0	0
0,5	0,75
1	2
1,5	3,75
2	6

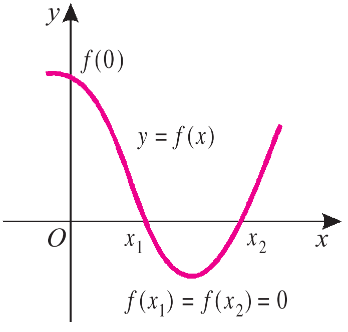
Որոշ հարցերում նույնիսկ այս մոտավոր գրաֆիկը կարևոր տեղեկություն-



Նկ. 26

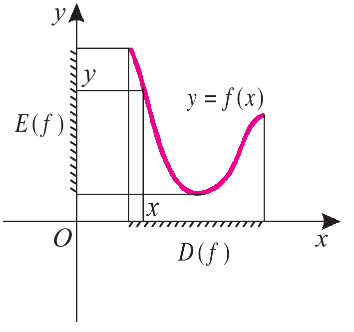
ներ են տալիս ֆունկցիայի մասին: Օրինակ՝ եթե ֆունկցիայի գրաֆիկն առաջին և երկրորդ քառորդներում է, ապա ֆունկցիան ընդունում է միայն դրական արժեքներ: Եթե ֆունկցիայի գրաֆիկն առաջին և չորրորդ քառորդներում է, ապա ֆունկցիան բացասական x-երի համար որոշված չէ:

Ֆունկցիայի գրաֆիկի և աբսցիսների առանցքի հատման կետերը ցույց են տալիս, թե որ կետերում է ֆունկցիան ընդունում 0 արժեքը, իսկ օրդինատների առանցքի հետ հատման (միակ) կետը որոշվում է ֆունկցիայի՝ զրո կետում ընդունած արժեքով (եթե զրո կետում ֆունկցիայի որոշված է, նկ. 27, ա):



ա)

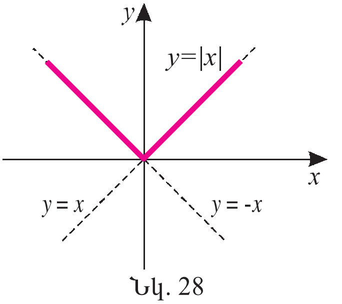
Նկ. 27



բ)

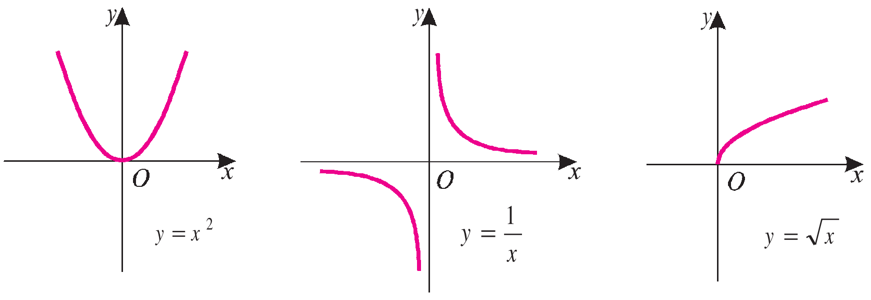
Եթե աբսցիսների առանցքի x կետով անցնող և այդ առանցքին ուղղահայաց ուղիղը հատում է f ֆունկցիայի գրաֆիկը, ուրեմն՝ $x \in D(f)$: Եթե օրդինատների առանցքի y կետով անցնող և այդ առանցքին ուղղահայացն է հատում f ֆունկցիայի գրաֆիկը, ուրեմն՝ $y \in E(f)$: Հետևաբար՝ ֆունկցիայի գրաֆիկի պրոյեկցիան x-երի առանցքի վրա ֆունկցիայի որոշման տիրույթն է, իսկ y-ների առանցքի վրա պրոյեկցիան ֆունկցիայի արժեքների բազմությունն է (նկ. 27, բ):

Օրինակ 2: Դիտարկենք $y = |x|$ ֆունկցիան: Ինչպես գիտենք, այն ոչ բացասական x-երի դեպքում համընկնում է $y = x$ ֆունկցիային, իսկ բացասական x-երի դեպքում՝ $y = -x$ ֆունկցիային: Գիտենք նաև, որ $y = x$ և $y = -x$ ֆունկցիաների գրաֆիկները համապատասխանաբար I ու III և II ու IV քառորդների կիսորդներն են: Հետևաբար, $y = |x|$ ֆունկցիայի գրաֆիկը կունենա 28-րդ նկարում պատկերված տեսքը:



Նկ. 28

29-րդ նկարում պատկերված են մեզ ծանոթ ևս երեք ֆունկցիաների գրաֆիկներ. $y = x^2$ (պարաբոլ), $y = \frac{1}{x}$ (հիպերբոլ) և $y = \sqrt{x}$:



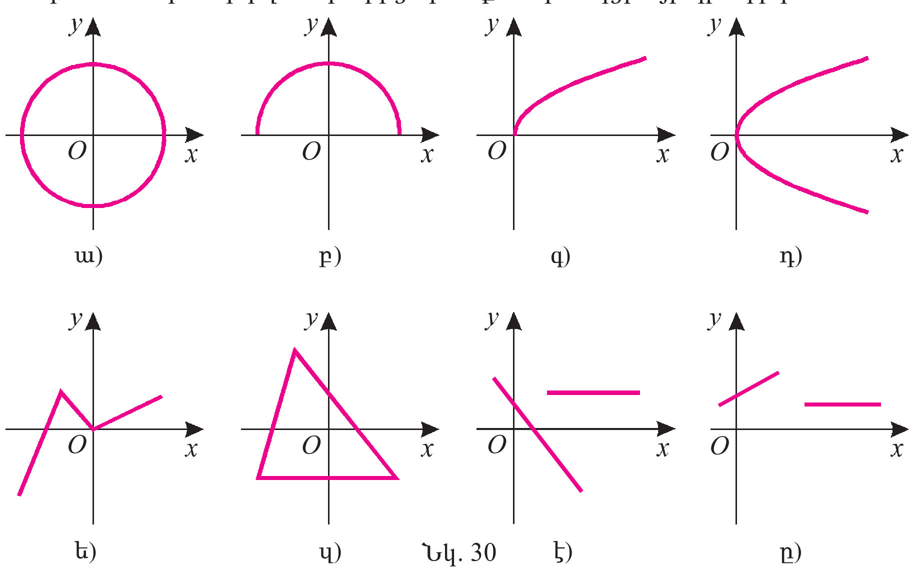
Նկ. 29

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ո՞ր կետերի բազմությունն են անվանում ֆունկցիայի գրաֆիկ:
2. Արդյո՞ք կոորդինատային հարթության վրա գտնվող ամեն մի գիծ ինչ-որ ֆունկցիայի գրաֆիկ է:
3. Կարո՞ղ է արդյոք ֆունկցիայի գրաֆիկը հատել օրդինատների առանցքը երկու կետում: Իսկ աբսցիսների առա՞նցքը:
4. Ինչպե՞ս կառուցել տրված ֆունկցիայի մոտավոր գրաֆիկը:
5. Ի՞նչ կարելի է ասել ֆունկցիայի մասին, եթե նրա գրաֆիկն առաջին և երկրորդ քառորդներում է:
6. Ի՞նչ են ցույց տալիս ֆունկցիայի գրաֆիկի և աբսցիսների առանցքի հատման կետերը:
7. Ինչո՞վ է որոշվում ֆունկցիայի գրաֆիկի և օրդինատների առանցքի հատման կետը:

Առաջադրանքներ

310. Նկ. 30-ում պատկերված գծերից որո՞նք են ֆունկցիայի գրաֆիկ:



Նկ. 30

311. Պատկերել ֆունկցիայի գրաֆիկը.

ա) x^2+1, $x\in[-3;3]$,		բ) x^3-1, $x\in[-2;2]$,

գ) $\dfrac{16}{x^2+4}$, $x\in[0;4]$,		դ) $\sqrt{x}+1$, $x\in[0;9]$:

312. Պատկանո՞ւմ է արդյոք հարթության տրված կետը $y=\sqrt{2x-5}$ ֆունկցիայի գրաֆիկին.

ա) $(0, \sqrt{5})$,	բ) $(3; 1)$,	գ) $(4; 1{,}7)$,	դ) $(5; \sqrt{5})$:

313. Գտնել f ֆունկցիայի գրաֆիկի և կոորդինատային առանցքների հատման կետերի կոորդինատները, եթե՝

ա) $y=5x-9$,		բ) $y=15-3x$,

գ) $y=3x^2-2x-8$,		դ) $y=x^2-121$:

314. Գտնել f և g ֆունկցիաների գրաֆիկների հատման կետի (կետերի) կոորդինատները, եթե՝

ա) $f(x)=2x-1$, $g(x)=9-3x$,		բ) $f(x)=5-x$, $g(x)=7+x$,

գ) $f(x)=2-3x$, $g(x)=4-5x^2$,		դ) $f(x)=x^2$, $g(x)=x+2$:

315. Ցույց տալ, որ f և g ֆունկցիաների գրաֆիկները չեն հատվում, եթե՝

ա) $f(x)=9x-7$, $g(x)=9x-3$,		բ) $f(x)=7-9x$, $g(x)=4-9x$,

գ) $f(x)=\dfrac{2}{1+x}$, $g(x)=1-x$,		դ) $f(x)=\dfrac{x^2}{x-3}$, $g(x)=x+3$:

316. Պատկերել որևէ ֆունկցիայի գրաֆիկ, որի համար՝

ա) $D(f)=[-1;5]$, $E(f)=[0;4]$,

բ) $D(f)=[-2;0]\bigcup[1;5]$, $E(f)=[-3;3]$,

գ) $D(f)=(-\infty;\infty)$, $E(f)=[0;\infty)$, $f(-2)=f(2)$,

դ) $D(f)=[0;\infty)$, $E(f)=(0;1]$, $f(0)=1$:

317. Կառուցել ֆունկցիայի գրաֆիկը.

ա) $f(x)=\begin{cases} x^2-4, & \text{եթե } x\ge 2 \\ 2-x, & \text{եթե } x<2, \end{cases}$		բ) $f(x)=\begin{cases} 3-x^2, & \text{եթե } x>1 \\ x-2, & \text{եթե } x\le 1: \end{cases}$

318. Նկ. 31-ում գրաֆիկորեն պատկերված f ֆունկցիայի համար գտնել.

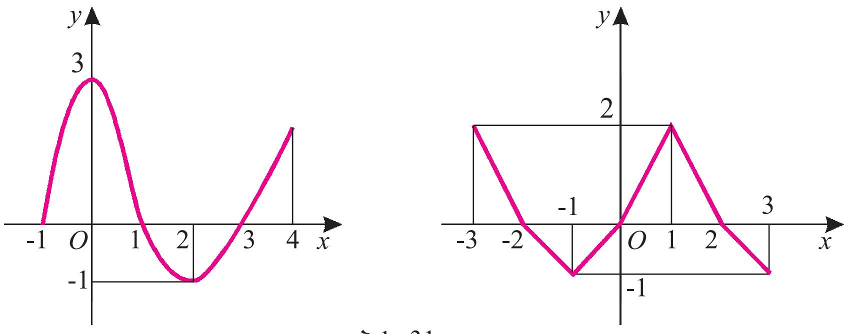
1) $D(f)$-ը,		2) $E(f)$-ը,		3) $f(0)$-ն,

4) այն կետերը, որոնցում ֆունկցիան ընդունում է 0 արժեքը, -1 արժեքը,

5) այն բազմությունը, որտեղ ֆունկցիան դրական է,

6) այն բազմությունը, որտեղ ֆունկցիան բացասական է,

7) $f(x)=-0,5$ հավասարմանը բավարարող x-երի քանակը:



ա) Նկ. 31 բ)

***319.** $y=[x]$ ֆունկցիայի արժեքը կամայական $x\in(-\infty,\infty)$ կետում հավասար է x-ը չգերազանցող ամենամեծ ամբողջ թվին (x-ի ամբողջ մասին): Կառուցել այդ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

***320.** $y=\{x\}$ ֆունկցիայի արժեքը կամայական $x\in(-\infty,\infty)$ կետում $x-[x]$ է (x-ի կոտորակային մասը, տե՛ս նախորդ խնդիրը): Կառուցել այդ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

***321.** Ֆունկցիայի արժեքը կամայական $x\in(-\infty,\infty)$ կետում հավասար է x կետից մինչև մոտակա ամբողջ կետը հեռավորությանը: Կառուցել այդ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

Կրկնության համար

322. Քառանիշ թվի առաջին թվանշանը 7 է: Եթե այդ թվանշանը տեղափոխենք վերջին տեղը, թիվը կփոքրանա 864-ով: Գտնել սկզբնական թիվը:

323. Հնգանիշ թվի առաջին թվանշանը 1 է: Եթե այդ թվանշանը տեղափոխենք վերջին տեղը, թիվը կմեծանա 2187-ով: Գտնել սկզբնական թիվը:

§3. Գործողություններ ֆունկցիաների հետ

Դիցուք, տրված են f և g ֆունկցիաները: Դիտարկենք մի նոր՝ F ֆունկցիա, որի արժեքն x կետում հավասար է այդ կետում f և g ֆունկցիաների արժեքների գումարին՝

$$F(x)=f(x)+g(x):$$

Բնականաբար, F ֆունկցիան որոշված է այն x կետերում, որտեղ որոշված են և՛ f, և՛ g ֆունկցիաները՝ $D(F)=D(f)\bigcap D(g)$: Այս կերպ սահմանված F ֆունկցիան անվանում են f և g ***ֆունկցիաների գումար***՝ $F=f+g$:

Ակնհայտ է, որ եթե f-ը և g-ն որոշվում են ինչ-որ արտահայտություններով, ապա F ֆունկցիան կորոշվի այդ արտահայտությունների գումարով:

Օրինակ 1: Դիցուք, $f(x)=x^2+1$, $x\in[-15;10]$ և $g(x)=x^3-x^2+2$, $x\in[-5;18]$: Այդ դեպքում $F(x)=x^3+3$ և $D(F)=[-15;10]\bigcap[-5;18]=[-5;10]$:

Հանգունորեն սահմանվում են f և g ***ֆունկցիաների տարբերությունը և արտադրյալը***: Օրինակ՝ f և g ֆունկցիաների արտադրյալն այն F ֆունկցիան է, որի արժեքն x կետում հավասար է այդ կետում f և g ֆունկցիաների արժեքների արտադրյալին՝

$$F(x)=f(x)\cdot g(x):$$

Պարզ է, որ այստեղ նույնպես $D(F)=D(f)\bigcap D(g)$:

Փոքր-ինչ այլ է պատկերը, երբ սահմանում ենք f և g ***ֆունկցիաների քանորդը***, այն F ֆունկցիան, որի արժեքն x կետում հավասար է այդ կետում f և g ֆունկցիաների արժեքների հարաբերությանը՝

$$F(x)=\frac{f(x)}{g(x)}:$$

Այս դեպքում F ֆունկցիան x կետում որոշված է, եթե այդ կետում որոշված են և՛ f, և՛ g ֆունկցիաները, ընդ որում, $g(x)\neq 0$:

Այժմ դիտարկենք F ֆունկցիան, որի արժեքն x կետում որոշվում է հետևյալ կերպ. նախ հաշվում ենք g ֆունկցիայի արժեքն x կետում՝ $g(x)$-ը, այնուհետև՝ f ֆունկցիայի արժեքը $g(x)$ կետում, այսինքն՝

$$F(x)=f[g(x)]:$$

Այս կերպ սահմանված F ֆունկցիան անվանում են f և g ***ֆունկցիաների համադրույթ*** և գրում՝ $F=f\circ g$: Նման դեպքում ասում են նաև, որ F-ը ***բարդ ֆունկցիա*** է:

Հասկանալի է, որ f և g ֆունկցիաների համադրույթի որոշման տիրույթը բաղկացած է այն x կետերից, որոնք պատկանում են g ֆունկցիայի որոշման տիրույթին, և որոնց համար $g(x)$-ը պատկանում է f ֆունկցիայի որոշման տիրույթին:

Օրինակ 2: Դիցուք, $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ և $g(x)=x^4+3$:

Քանի որ կամայական x-ի համար $x^4+3\neq 1$, ուրեմն $D(f\circ g)=\mathbf{R}$, և

$$(f\circ g)(x)=\frac{1}{g(x)-1}=\frac{1}{x^4+3-1}=\frac{1}{x^4+2}:$$

Այժմ գտնենք $g\circ f$-ը: Քանի որ g ֆունկցիան որոշված է բոլոր x-երի համար, $g\circ f$ ֆունկցիան որոշված կլինի, եթե որոշված է f-ը: Այսինքն՝ $D(g\circ f)=D(f)=(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$, և

$$(g\circ f)(x)=\left(\frac{1}{x-1}\right)^4+3=\frac{1}{(x-1)^4}+3:$$

Այսպիսով՝ եթե նույնիսկ որոշված են $f\circ g$ և $g\circ f$ ֆունկցիաները, ապա, ընդհանրապես ասած, $f\circ g\neq g\circ f$:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ինչպե՞ս է սահմանվում երկու ֆունկցիաների՝ ա) գումարը, բ) արտադրյալը:
2. Ո՞րն է երկու ֆունկցիաների քանորդի որոշման տիրույթը:
3. Ո՞րն է երկու ֆունկցիաների համադրույթի որոշման տիրույթը:
4. Սահմանեք երկու ֆունկցիաների համադրույթը:
5. Մի՞շտ է արդյոք ճիշտ $f\circ g=g\circ f$ հավասարությունը:

Առաջադրանքներ

324. Դիցուք, $f(x)=\sqrt{x-1}$ և $g(x)=\sqrt{3-x}$: Գտեք F ֆունկցիայի որոշման տիրույթը և այն արտահայտությունը, որով տրվում է ֆունկցիան, եթե՝

ա) $F=f+g$, բ) $F=f-g$, գ) $F=f\cdot g$, դ) $F=f/g$,
ե) $F=g/f$, զ) $F=f+f$, ➤է) $F=f\cdot f$, ➤ը) $F=g-g$:

325. Դիցուք, $f(x)=1+x^2$ և $g(x)=\dfrac{1}{1-x}$: Գտեք F ֆունկցիայի որոշման տիրույթը և այն արտահայտությունը, որով տրվում է այդ ֆունկցիան, եթե՝

ա) $F=f-g$, բ) $F=f\cdot g$, գ) $F=f/g$, դ) $F=g/f$,
ե) $F=f\circ g$, զ) $F=g\circ f$, է) $F=g\circ g$, ը) $F=f\circ f$:

➤**326.** Դիցուք, f ֆունկցիան որոշված է $[-1;0]$ հատվածում: Գտնել F ֆունկցիայի որոշման տիրույթը, եթե՝

ա) $F(x)=f(-x^2)$, բ) $F(x)=f(x-1)$, գ) $F(x)=f(2x)$, դ) $F(x)=f(|x|+x)$, ե) $F(x)=f(\sqrt{x}-0{,}5)$, զ) $F(x)=f(x-\sqrt{x})$:

327. Դիցուք, $f(x)=x^2$ և $g(x)=\sqrt{x}$: Գտեք F ֆունկցիայի որոշման տիրույթը և այն արտահայտությունը, որով տրվում է այդ ֆունկցիան, եթե՝

ա) $F=f\circ g$, բ) $F=g\circ f$, գ) $F=g\circ g$, դ) $F=f\circ f$,

* **328.** Գտնել $f(x)$ ֆունկցիան, եթե հայտնի է, որ ցանկացած x թվի համար.

ա) $2f(x)+f(1-x)=x^2$, բ) $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=x$, $(x\neq 0)$,

գ) $f(x)-2f\left(\frac{4-2x}{x+2}\right)=1$, $(x\neq -2)$, դ) $f(1-x)-3f\left(\frac{2x+2}{3-x}\right)=1$, $(x\neq 3)$:

Կրկնության համար

329. Քառակուսային եռանդամից անջատել լրիվ քառակուսի.

ա) $x^2-8x+21$, բ) $4x-2x^2-2$, գ) $3x^2-6x-10$:

330. Ապացուցել անհավասարությունը.

ա) $\frac{1}{x^2+x+1}\leq\frac{4}{3}$, բ) $\frac{x^2+1}{2x^2+x+1}<2$, գ) $\frac{x^2+2x+2}{x^2+2x+3}\geq\frac{1}{2}$:

§4. Ֆունկցիայի գրաֆիկի ձևափոխություններ

Այս պարագրաֆում կսովորենք $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի միջոցով կառուցել

$$y=f(x)+a,\qquad y=f(x+a),\qquad y=f(ax),\qquad y=af(x),$$

$$y=|f(x)|,\qquad y=f(|x|)$$

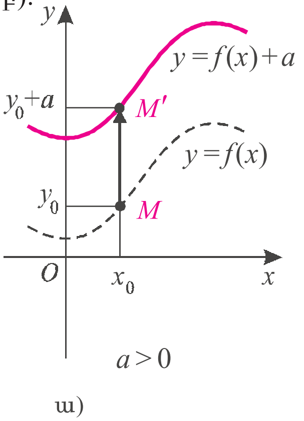
ֆունկցիաների գրաֆիկները, որտեղ a-ն զրոյից տարբեր հաստատուն է:

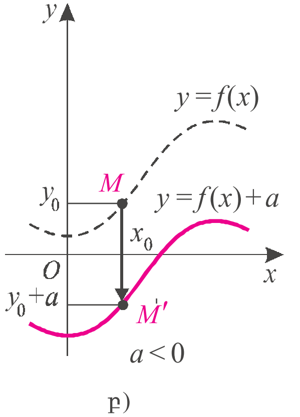
1. $y=f(x)+a$ (տեղաշարժ օրդինատների առանցքի ուղղությամբ):

Եթե $y=f(x)$ ֆունկցիայի արժեքն x_0 կետում y_0 է, ապա $y=f(x)+a$ ֆունկցիայի արժեքն x_0 կետում կլինի y_0+a: Նշանակում է՝ եթե $M(x_0;y_0)$ կետը պատկանում է $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկին, ապա $M'(x_0;y_0+a)$ կետը կպատկանի $y=f(x)+a$ ֆունկցիայի գրաֆիկին (նկ. 32): Հետևաբար՝

$y=f(x)+a$ ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցելու համար անհրաժեշտ է $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկն օրդինատների առանցքի ուղղությամբ a-ով տեղաշարժել:

Ընդ որում, եթե a-ն դրական է, ապա $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկն a-ով բարձրանում է վեր (նկ. 32, ա), իսկ եթե a-ն բացասական է, ապա $|a|$-ով իջնում է վար (նկ. 32, բ):





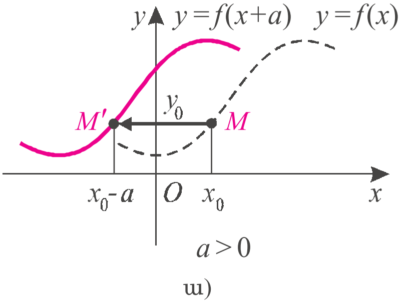
Նկ. 32

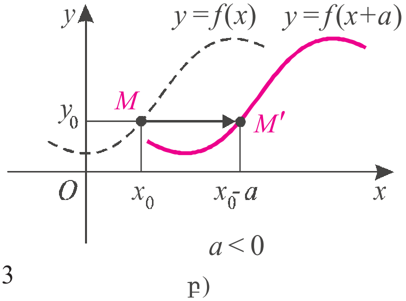
2. $y = f(x+a)$ (տեղաշարժ աբսցիսների առանցքի ուղղությամբ):

Եթե $y=f(x)$ ֆունկցիայի արժեքն x_0 կետում y_0 է, ապա $y=f(x+a)$ ֆունկցիան այդ նույն՝ y_0 արժեքն ընդունում է x_0-a կետում՝ $f((x_0-a)+a)=$ $=f(x_0)=y_0$: Նշանակում է՝ եթե $M(x_0;\, y_0)$ կետը պատկանում է $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկին, ապա $M'(x_0-a;\, y_0)$ կետը կպատկանի $y=f(x+a)$ ֆունկցիայի գրաֆիկին (նկ. 33): Հետևաբար՝

$y=f(x+a)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցելու համար անհրաժեշտ է $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկն աբսցիսների առանցքի ուղղությամբ տեղաշարժել $-a$-ով:

Ընդ որում, եթե a-ն դրական է, ապա $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկն a-ով տեղաշարժվում է ձախ (նկ. 33, ա), իսկ եթե a-ն բացասական է, ապա $|a|$-ով տեղաշարժվում է աջ (նկ. 33, բ):

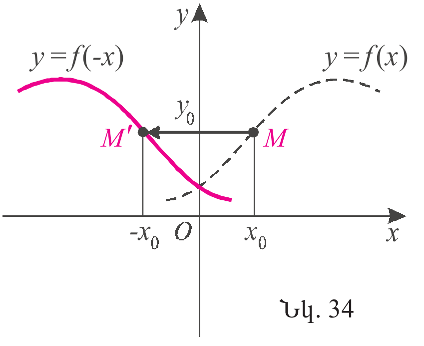




Նկ. 33

3. $y = f(-x)$ *(համաչափություն օրդինատների առանցքի նկատմամբ):*

Եթե $y=f(x)$ ֆունկցիայի արժեքն x_0 կետում y_0 է, ապա $y=f(-x)$ ֆունկցիան այդ նույն՝ y_0 արժեքը կընդունի $-x_0$ կետում՝ $f(-(-x_0))=f(x_0)=y_0$: Նշանակում է՝ եթե $M(x_0;\,y_0)$ կետը պատկանում է $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկին, ապա $M'(-x_0;\,y_0)$ կետը կպատկանի $y=f(-x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկին (նկ. 34): Քանի որ այդ կետերը համաչափ են օրդինատների առանցքի նկատմամբ, հետևաբար՝

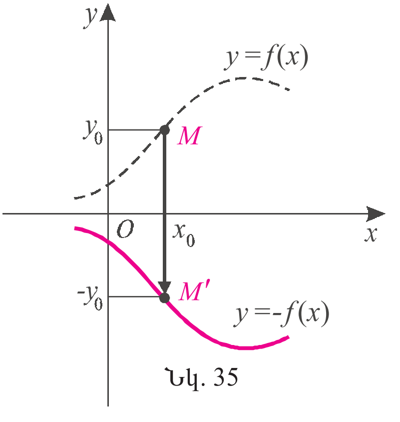


Նկ. 34

> ***$y=f(-x)$ և $y=f(x)$ ֆունկցիաների գրաֆիկները համաչափ են օրդինատների առանցքի նկատմամբ:***

4. $y = -f(x)$ *(համաչափություն աբսցիսների առանցքի նկատմամբ):*

Եթե $y=f(x)$ ֆունկցիայի արժեքն x_0 կետում y_0 է, ապա $y=-f(x)$ ֆունկցիայի արժեքն x_0 կետում կլինի $-y_0$: Նշանակում է՝ եթե $M(x_0;\,y_0)$ կետը պատկանում է $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկին, ապա $M'(x_0;\,-y_0)$ կետը կպատկանի $y=-f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկին (նկ. 35): Քանի որ այդ կետերը համաչափ են աբսցիսների առանցքի նկատմամբ, հետևաբար՝



Նկ. 35

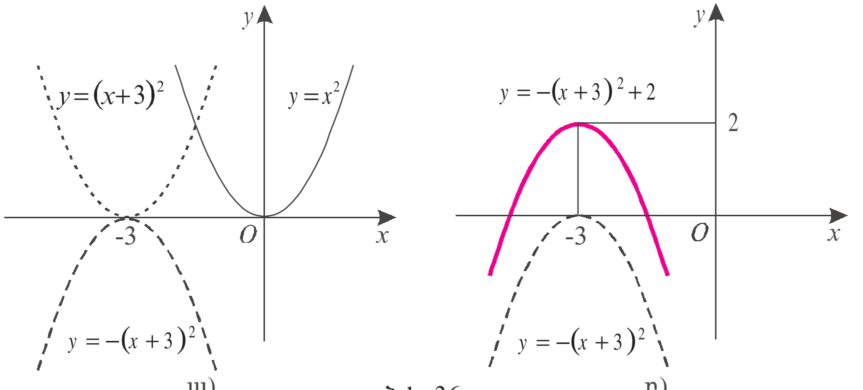
> ***$y=-f(x)$ և $y=f(x)$ ֆունկցիաների գրաֆիկները համաչափ են աբսցիսների առանցքի նկատմամբ:***

Օրինակ 1: Կառուցենք $y=-x^2-6x-7$ պարաբոլը: Քանի որ

$$-x^2-6x-7=-(x+3)^2+2,$$

ուստի որոնելի պարաբոլը կստացվի, եթե՝

ա) $y=x^2$ պարաբոլը տեղաշարժենք 3 միավորով ձախ (կստացվի $y=(x+3)^2$ պարաբոլը, նկ. 36, ա),



Նկ. 36

բ) ստացված պատկերը համաչափ արտապատկերենք աբսցիսների առանցքի նկատմամբ (կստացվի $y=-(x+3)^2$ պարաբոլը, նկ. 36, ա),

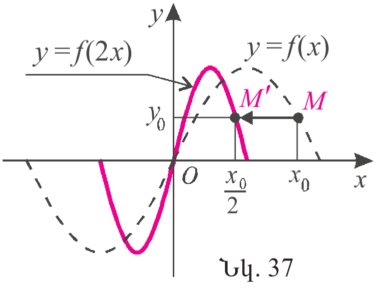
գ) ստացված պարաբոլը բարձրացնենք 2 միավորով (նկ. 36, բ):

5. $y=f(ax)$ *(սեղմում և ձգում աբսցիսների առանցքի երկայնքով)*:

Եթե $y=f(x)$ ֆունկցիայի արժեքն x_0 կետում y_0 է, ապա $y=f(ax)$ ֆունկցիայի արժեքն $\dfrac{x_0}{a}$ կետում նույնպես կլինի y_0: Նշանակում է՝ եթե $(x_0; y_0)$ կետը պատկանում է $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկին, ապա $\left(\dfrac{x_0}{a}; y_0\right)$ կետը կպատկանի $y=f(ax)$ ֆունկցիայի գրաֆիկին:

Օրինակ 2: 37-րդ նկարում կետագծերով պատկերված է $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը: Տեսնենք, թե ինչպես պետք է այն ձևափոխել $y=f(2x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը ստանալու համար: Եթե $y=f(x)$ ֆունկցիայի արժեքն x_0 կետում y_0 է, ապա $y=f(2x)$ ֆունկցիայի արժեքն $\dfrac{x_0}{2}$ կետում նույնպես կլինի y_0, քանի որ

$$f\left(2\cdot\frac{x_0}{2}\right)=f(x_0)=y_0:$$



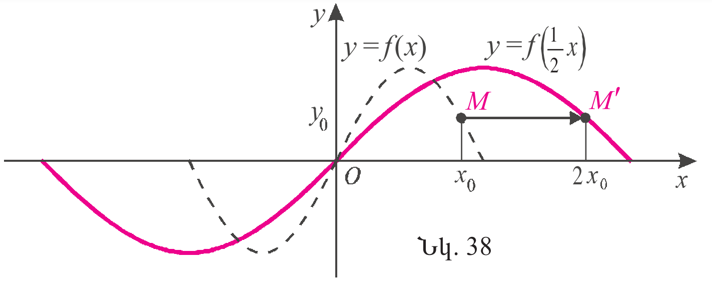
Նկ. 37

Նշանակում է՝ եթե $M(x_0; y_0)$-ն պատկանում է $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկին, ապա $M'\left(\dfrac{x_0}{2}; y_0\right)$ կետը կպատկանի $y=f(2x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկին: Հետևաբար՝

$y=f(2x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցելու համար անհրաժեշտ է $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը 2 անգամ «սեղմել» աբսցիսների առանցքի երկայնքով դեպի օրդինատների առանցքը (նկ. 37):

Նման դատողություններով կարող ենք համոզվել, որ

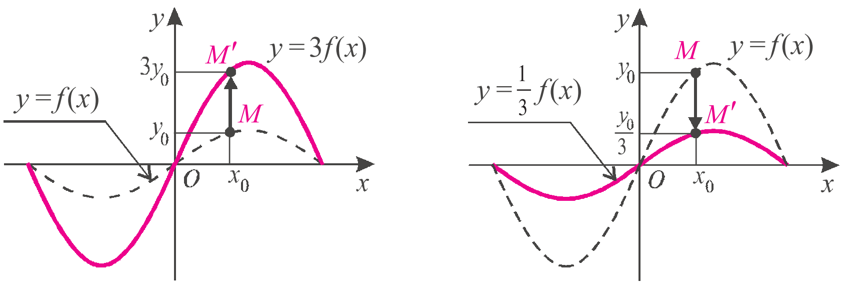
$y=f\left(\frac{1}{2}x\right)$ ֆունկցիայի գրաֆիկն ստանալու համար անհրաժեշտ է $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը 2 անգամ «ձգել» աբսցիսների առանցքի երկայնքով՝ հեռացնելով օրդինատների առանցքից (նկ. 38):



Նկ. 38

6. $y=af(x)$ (սեղմում և ձգում օրդինատների առանցքի երկայնքով):

Օրինակ 3: Նկ. 39, ա-ում կետագծերով պատկերված է $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը: Տեսնենք, թե ինչպես պետք է այն ձևափոխել $y=3f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկն ստանալու համար:



ա) Նկ. 39 բ)

Եթե $y=f(x)$ ֆունկցիայի արժեքն x_0 կետում y_0 է, ապա $y=3f(x)$ ֆունկցիայի արժեքն x_0 կետում կլինի $3y_0$: Նշանակում է՝ եթե $M(x_0;y_0)$ կետը պատկանում է $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկին, ապա $M'(x_0;3y_0)$ կետը կպատկանի $y=3f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկին: Հետևաբար՝

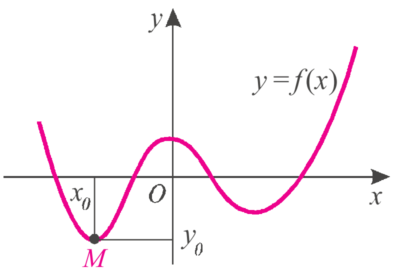
$y=3f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցելու համար անհրաժեշտ է $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը 3 անգամ «ձգել» օրդինատների առանցքի երկայնքով՝ հեռացնելով աբսցիսների առանցքից (նկ. 39,ա):

Նման դատողություններով կարող ենք համոզվել, որ

$y=\frac{1}{3}f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկն ստանալու համար անհրաժեշտ է $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը 3 անգամ «սեղմել» օրդինատների առանցքի երկայնքով դեպի աբսցիսների առանցքը (նկ. 39,բ):

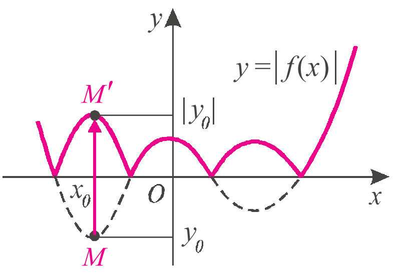
7. $y=|f(x)|$:

Եթե $y=f(x)$ ֆունկցիայի արժեքն x_0 կետում y_0 է, ապա $y=|f(x)|$ ֆունկցիայի արժեքն x_0 կետում կլինի $|y_0|$: Նշանակում է՝ եթե $M(x_0;\, y_0)$ կետը պատկանում է $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկին (նկ. 40, ա), ապա $M'(x_0;|y_0|)$ կետը կպատկանի $y=|f(x)|$ ֆունկցիայի գրաֆիկին (նկ. 40, բ): Եթե $y_0 \geq 0$, ապա M և M' կետերը համընկնում են, իսկ $y_0 < 0$ դեպքում համաչափ են աբսցիսների առանցքի նկատմամբ: Հետևաբար՝



ա)

Նկ. 40

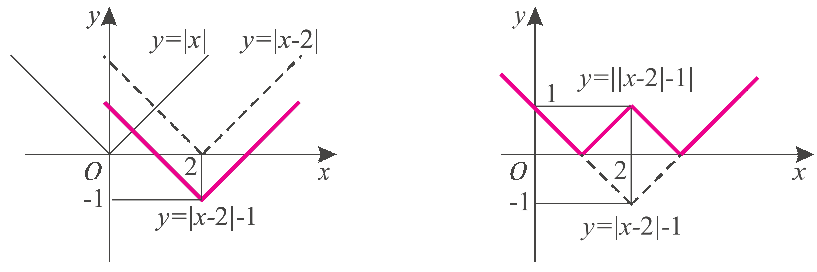


բ)

$y=|f(x)|$ ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցելու համար պետք է վերցնել $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի այն մասը, որն աբսցիսների առանցքի վրա է կամ նրանից վեր, իսկ աբսցիսների առանցքից ցած մասը համաչափ արտապատկերել աբսցիսների առանցքի նկատմամբ:

Օրինակ 4: Կառուցենք $f(x)=||x-2|-1|$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

$y=|x|$ ֆունկցիայի գրաֆիկը 2 միավորով տեղաշարժելով աջ՝ կստանանք $y=|x-2|$ ֆունկցիայի գրաֆիկը (նկ. 41, ա): Այն 1 միավորով իջեցնելով ցած՝ կստանանք $y=|x-2|-1$ ֆունկցիայի գրաֆիկը: Մնում է ստացվածի այն մասը, որն աբսցիսների առանցքից ցած է, համաչափ արտապատկերել այդ առանցքի նկատմամբ (նկ. 41, բ)։



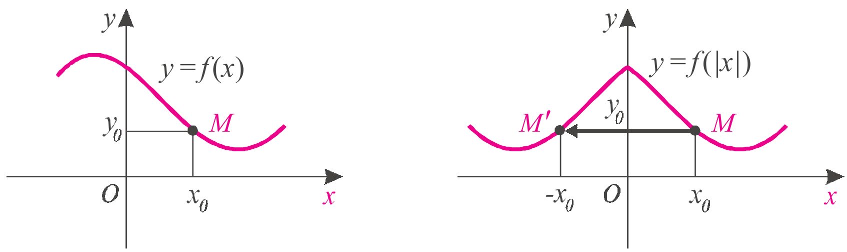
ա) Նկ. 41 բ)

8. $y = f(|x|)$։

Եթե $y = f(x)$ ֆունկցիան x_0 ոչ բացասական կետում ընդունում է y_0 արժեքը, ապա $y=f(|x|)$ ֆունկցիան այդ նույն y_0 արժեքը կընդունի և՛ x_0, և՛ $-x_0$ կետերում՝

$$y_0 = f(|x_0|) = f(|-x_0|) \ :$$

Նշանակում է՝ եթե $M(x_0; y_0)$, $x_0 \ge 0$ կետը պատկանում է $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկին (նկ. 42, ա), ապա $y=f(|x|)$ ֆունկցիայի գրաֆիկին կպատկանեն և՛ $M(x_0; y_0)$, և՛ $M'(-x_0; y_0)$ կետերը (նկ. 42, բ)։



ա) Նկ. 42 բ)

Քանի որ այդ կետերը համաչափ են օրդինատների առանցքի նկատմամբ, ուրեմն՝

> ***$y = f(|x|)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցելու համար պետք է՝***
> ***ա) ոչ բացասական x-երի համար կառուցել $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը,***
> ***բ) կառուցել ստացված պատկերի համաչափը օրդինատների առանցքի նկատմամբ*** (նկ. 42,բ)։

Հասկացե՞լ եք դասը

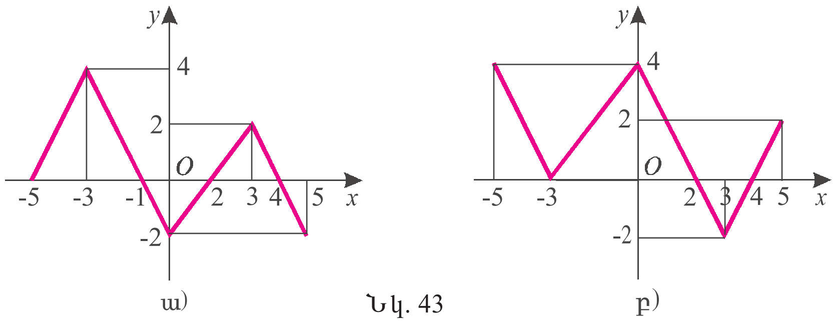
1. Ելնելով $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկից, ինչպե՞ս կառուցել՝

ա) $y = f(x)+a$, բ) $y = f(x+a)$ ֆունկցիաների գրաֆիկները։

2. Ո՞ր առանցքի նկատմամբ են համաչափ ա) $y=f(x)$ և $y=f(-x)$, բ) $y=f(x)$ և $y=-f(x)$ ֆունկցիաների գրաֆիկները:
3. Ո՞ր կետերն են պատկանում $y=f(ax)$ և $y=af(x)$ ֆունկցիաների գրաֆիկներին, եթե $(x_0;\,y_0)$ կետը պատկանում է $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկին:
4. Ինչպե՞ս կառուցել $y=|f(x)|$ ֆունկցիայի գրաֆիկը, եթե տրված է $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:
5. Ինչպե՞ս կառուցել $y=f(|x|)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը, եթե տրված է $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

Առաջադրանքներ

Նկ. 43-ում պատկերված է $[-5;\,5]$ հատվածում որոշված f ֆունկցիայի գրաֆիկը: Պատկերել F ֆունկցիայի գրաֆիկը և նշել նրա որոշման և արժեքների տիրույթները, եթե (331-333).



Նկ. 43

331. ա) $F(x)=f(x)+2$, բ) $F(x)=f(x)-3$,
գ) $F(x)=f(x-4)$, դ) $F(x)=f(x+2)$,
ե) $F(x)=f(-x)$, զ) $F(x)=-f(x)$:

332. ա) $F(x)=2f(x)$, բ) $F(x)=f(2x)$,
գ) $F(x)=0{,}5f(x)$, դ) $F(x)=f(0{,}5x)$:

333. ա) $F(x)=|f(x)|$, բ) $F(x)=|2-f(x)|$,
գ) $F(x)=|f(-x)|+2$, դ) $F(x)=|f(-x)+1|$:

334. Ձևափոխելով $y=|x|$ ֆունկցիայի գրաֆիկը՝ կառուցել տրված ֆունկցիայի գրաֆիկը.
ա) $y=|x+2|$, բ) $y=-|x|$, գ) $y=|-x|$,
դ) $y=|x-4|+1$, ե) $y=|1-|1-x||$, զ) $y=1-|x|$:

335. Ձևափոխելով $y=x^2$ պարաբոլը՝ կառուցել տրված քառակուսային եռանդամի գրաֆիկը (տե՛ս օրինակ 1).

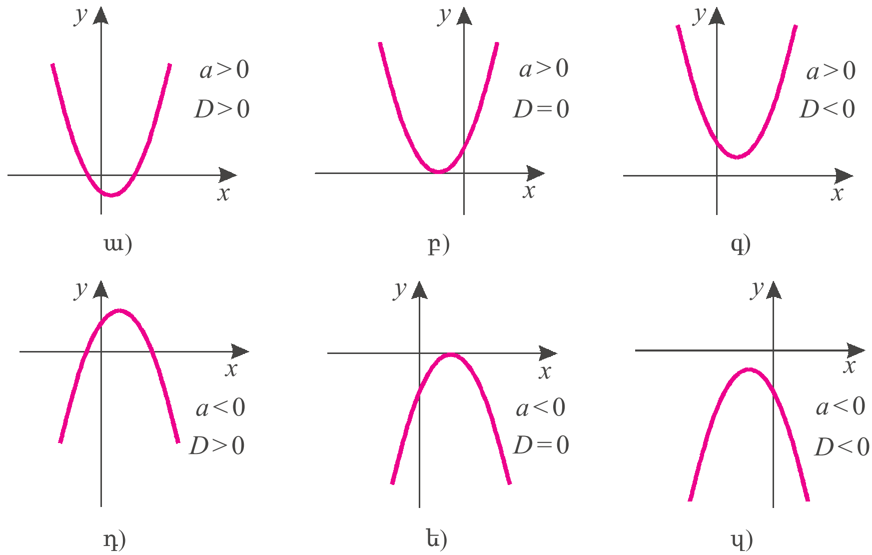
ա) x^2-2x-1,   բ) $2x^2-8x+7$,   գ) $-x^2+6x-4$:

336. Օգտվելով հետևյալ նույնությունից՝

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a},$$

ա) պարզել, թե ինչպես ձևափոխել $y=x^2$ պարաբոլը $y=ax^2+bx+c$ եռանդամի գրաֆիկն ստանալու համար,

բ) ապացուցել, որ եռանդամի $D=b^2-4ac$ տարբերիչի և a գործակցի՝ 44-րդ նկարում նշված պայմանների դեպքում եռանդամի գրաֆիկն ունի պատկերված տեսքը,



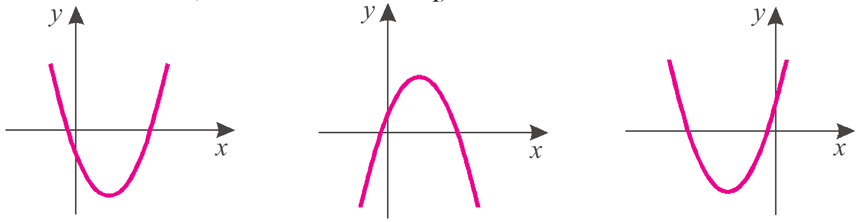
Նկ. 44

գ) գտնել եռանդամի գրաֆիկի գագաթի կոորդինատները:

337. Ապացուցել, որ x-ի կամայական արժեքի համար՝

ա) $3x^2-8x+7>0$,   բ) $-5x^2+9x-5<0$,

գ) $-x^2+6x-9\le 0$,   դ) $4x^2-12x+9\ge 0$:



ա)   բ)   գ)

Նկ. 45

* **338.** Որոշել a, b, c գործակիցների նշանները, եթե հայտնի է, որ $y=ax^2+bx+c$ պարաբոլն ունի 45-րդ նկարում բերված տեսքը:

339. Կառուցել ֆունկցիայի գրաֆիկը.

ա) $y=\left|x^2-4x+3\right|$, բ) $y=3\left|x^2-2\right|+2$, գ) $y=\left|x^2+2x\right|+1$:

340. Բանաձևով տալ ֆունկցիան, որի գրաֆիկն ստացվում է.

ա) $y=x^2$ պարաբոլը 3 միավոր ձախ և 2 միավոր ներքև տեղաշարժելով,

բ) $y=x^2$ պարաբոլը 5 միավոր աջ և 4 միավոր վերև տեղաշարժելով,

գ) $y=\dfrac{1}{x}$ հիպերբոլը 8 միավոր ձախ և 7 միավոր վերև տեղաշարժելով,

բ) $y=\dfrac{4}{x}$ հիպերբոլը 6 միավոր աջ և 9 միավոր ներքև տեղաշարժելով:

* **341.** $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը 2 անգամ սեղմել են աբսցիսների առանցքի երկայնքով, 3 անգամ ձգել են օրդինատների առանցքի երկայնքով, 5 միավոր տեղաշարժել ձախ և 4 միավորով տեղաշարժել ցած: Ո՞ր ֆունկցիայի գրաֆիկն է ստացվել:

* **342.** Կառուցել f ֆունկցիայի գրաֆիկը և պարզել $f(x)=a$ հավասարման արմատների քանակը, եթե՝

ա) $f(x)=\left|\left|x-2\right|-3\right|$, $a=-1;\ 0;\ 2;\ 3;\ 5$,

բ) $f(x)=\left|x^2-6x\right|$, $a=-2;\ 0;\ 4;\ 9;\ 13$:

343. Գրաֆիկորեն պարզել, թե a պարամետրի որ արժեքների դեպքում $||3x-5|-7|=2a+1$ հավասարումն ունի՝

ա) երկու արմատ, գ) երեք արմատ, դ) չորս արմատ:

344. Գրաֆիկորեն պարզել, թե a պարամետրի որ արժեքների դեպքում $\left|x^2-8x+12\right|=2-3a$ հավասարումն ունի՝

ա) երկու արմատ, գ) երեք արմատ, դ) չորս արմատ:

* **345.** Դիցուք, $f_0(x)=|x|$ և $f_n(x)=\left|f_{n-1}(x)-1\right|$, $n=1,2,\cdots$: Կառուցել f_n ֆունկցիայի գրաֆիկը $[-10;10]$ հատվածի վրա, եթե՝

ա) $n=1$, բ) $n=2$, գ) $n=3$, դ) $n=10$:

Կրկնության համար

Գտնել արտահայտության արժեքը նշված բազմության վրա.

* **346.** ա) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$, $x\in[1;2]$,

բ) $\sqrt{x+5+4\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}}$, $x\in[-1;3]$,

գ) $\sqrt{x+4+6\sqrt{x-5}}-\sqrt{x+4-6\sqrt{x-5}}$, $x\in[14;+\infty)$,

դ) $\sqrt{x-1+2\sqrt{x-2}}-\sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}}$, $x\in[3;+\infty)$:

§5. Կոտորակագծային ֆունկցիա

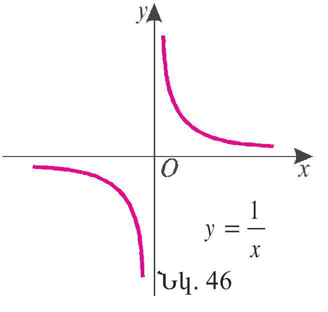
Կոտորակագծային է կոչվում

$$\boldsymbol{y=\frac{ax+b}{cx+d}}$$

ֆունկցիան, որտեղ a-ն, b-ն, c-ն և d-ն իրական թվեր են:

Համարենք, որ $c\neq 0$ և $ad\neq bc$, քանի որ $c=0$ դեպքում ունենում ենք գծային ֆունկցիա, իսկ $ad=bc$ դեպքում ֆունկցիան հաստատուն է իր որոշման տիրույթում՝ $x\neq -\frac{d}{c}$:

Պարզագույն կոտորակագծային ֆունկցիան մեզ ծանոթ $y=\frac{1}{x}$ ֆունկցիան է, որի գրաֆիկը, ինչպես գիտենք, հիպերբոլ է (նկ. 46): Նշենք այս ֆունկցիայի հատկությունները:



Նկ. 46

ա) Ֆունկցիայի որոշման տիրույթն է՝

$$D(y)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty):$$

բ) Ֆունկցիայի արժեքների բազմությունն է՝

$$E(y)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty):$$

գ) Ֆունկցիան դրական է, երբ $x>0$ և բացասական է, երբ $x<0$:

դ) Ֆունկցիան նվազող է $(-\infty,0)$ և $(0,+\infty)$ միջակայքերում:

ե) Երբ x-ն անվերջ մեծանում է կամ անվերջ փոքրանում (դեպի $-\infty$), ֆունկցիայի արժեքները ձգտում են զրոյի:

Այժմ դիտարկենք ընդհանուր դեպքը՝

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}:$$

Կատարելով բազմանդամների բաժանում՝ այս ֆունկցիան կարող ենք ներկայացնել

$$y=\alpha+\frac{\beta}{x+\gamma}$$

տեսքով, որտեղ α-ն, β-ն և γ-ն իրական թվեր են, ընդ որում, $\beta \neq 0$: Իսկ այս ֆունկցիայի գրաֆիկը կարող ենք ստանալ՝ ձևափոխելով $y=\frac{1}{x}$ հիպերբոլը՝ տեղաշարժելով այն γ-ով աբսցիսների առանցքի երկայնքով, սեղմելով (կամ ձգելով) β անգամ օրդինատների առանցքի երկայնքով, և ստացվածը տեղաշարժելով α-ով օրդինատների առանցքի երկայնքով:

Հետևաբար՝ կարող ենք ասել, որ, եթե $c \neq 0$ և $ad \neq bc$, ապա

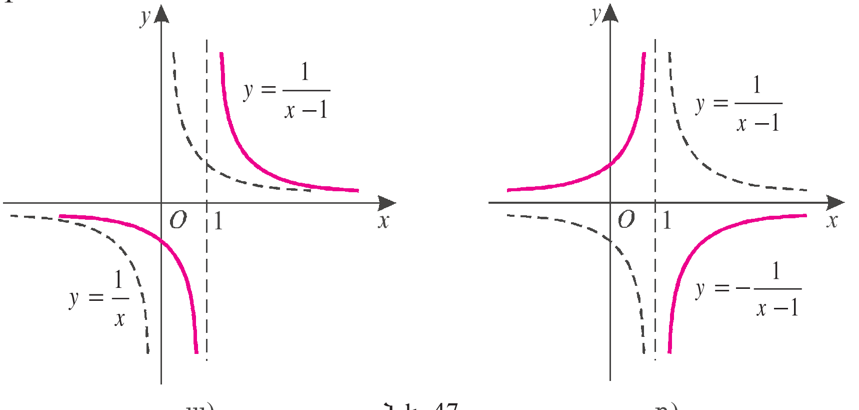
կոտորակագծային ֆունկցիայի գրաֆիկը հիպերբոլ է:

Օրինակ 1: Կառուցենք $y=\frac{2x-3}{x-1}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

Ձևափոխելով $\frac{2x-3}{x-1}$ արտահայտությունը՝ ստանում ենք՝ $y=2-\frac{1}{x-1}$:

Հետևաբար՝ տրված ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցելու համար անհրաժեշտ է՝

1) $y=\frac{1}{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը 1 միավորով տեղաշարժել աջ (կստացվի $y=\frac{1}{x-1}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը, նկ. 47, ա),



ա) Նկ. 47 բ)

2) ստացված պատկերը համաչափ արտապատկերել աբսցիսների առանցքի նկատմամբ (կստացվի $y=-\frac{1}{x-1}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը, նկ. 47, բ),

3) ստացված պատկերը 2 միավորով տեղաշարժել վեր (նկ. 48):

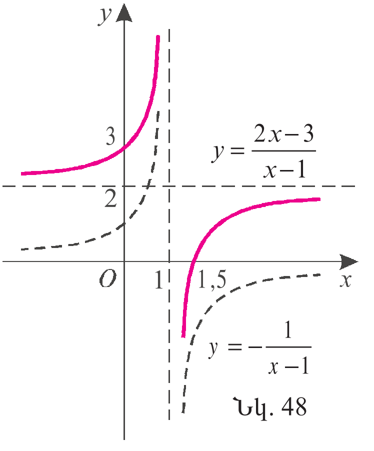
Այժմ դժվար չէ նշել $y=\frac{2x-3}{x-1}$ ֆունկցիայի որոշ հատկություններ:

ա) Ֆունկցիայի որոշման տիրույթն է՝

$$D(y)=(-\infty,1)\cup(1,+\infty):$$

բ) Ֆունկցիայի արժեքների բազմությունն է՝

$$E(y)=(-\infty,2)\cup(2,+\infty):$$



Նկ. 48

գ) Ֆունկցիայի գրաֆիկը հատում է կոորդինատային առանցքները $(0;3)$ և $(1{,}5;\ 0)$ կետերում:

դ) Ֆունկցիան դրական է, երբ $x\in(-\infty,1)\cup(1{,}5,+\infty)$ և բացասական է, երբ $x\in(1,1{,}5)$:

ե) Ֆունկցիան աճող է $(-\infty,1)$ և $(1,+\infty)$ միջակայքերում:

զ) Երբ x-ն անվերջ մեծանում է կամ անվերջ փոքրանում (դեպի $-\infty$), ֆունկցիայի արժեքները ձգտում են 2-ի: Ֆունկցիայի արժեքներն անվերջ մեծանում են, երբ x-ը մոտենում է 1-ին ձախից, և անվերջ փոքրանում են (դեպի $-\infty$), երբ x-ը մոտենում է 1-ին աջից:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ո՞ր ֆունկցիան են անվանում կոտորակագծային:
2. Ո՞րն է պարզագույն կոտորակագծային ֆունկցիան, և ի՞նչ տեսք ունի նրա գրաֆիկը:
3. Նշել $y=1/x$ ֆունկցիայի հատկությունները:
4. Ի՞նչ է կոտորակագծային ֆունկցիայի գրաֆիկը:

Առաջադրանքներ

347. Կոտորակագծային ֆունկցիան ներկայացնել $y=\alpha+\dfrac{\beta}{x+\gamma}$ տեսքով.

ա) $y=\dfrac{2x-3}{x+1}$, բ) $y=\dfrac{x}{5x-20}$, գ) $y=\dfrac{3x-4}{2x-6}$:

348. Ձևափոխելով $y=1/x$ հիպերբոլը՝ կառուցել կոտորակագծային ֆունկցիայի գրաֆիկը և նշել հատկությունները.

ա) $y=\dfrac{1}{x-3}$, բ) $y=\dfrac{1}{x}+2$, գ) $y=-\dfrac{1}{x+1}$:

դ) $y=\dfrac{3x+6}{x+5}$, ե) $y=\dfrac{-2x+4}{3x-12}$, զ) $y=\dfrac{-5x-1}{x+8}$:

349. Ձևափոխելով $y=1/x$ հիպերբոլը՝ կառուցել տրված ֆունկցիայի գրաֆիկը.

ա) $y=\left|\dfrac{x+3}{x-1}\right|$, բ) $y=\left|\dfrac{x+2}{x+1}\right|$, գ) $y=\left|\dfrac{x-3}{x-2}\right|-2$,

դ) $y=\dfrac{|x|-5}{|x|+2}$, ե) $y=\dfrac{7-|x|}{|x|-5}$, զ) $y=\dfrac{2|x|-3}{|x|+1}$:

* **350.** Կառուցել ֆունկցիայի գրաֆիկը.

ա) $y=\dfrac{x}{|x|+2}$, բ) $y=|2x-5|-|x|$, գ) $y=\dfrac{1}{|x|+|x-1|}$:

* **351.** Գտնել կոտորակագծային ֆունկցիան, եթե հայտնի է, որ նրա գրաֆիկն անցնում է A, B, C կետերով:

ա) $A(0;-1)$, $B(2;3)$, $C(-1;0)$, բ) $A(-1;-5)$ $B(1;-3)$, $C(-5;1)$:

Կրկնության համար

352. Խանութում կար 1,75 տ խնձոր և 1,1 տ տանձ: Օրական վաճառվում էր 125 կգ խնձոր՝ կիլոգրամը 250 դրամով, և 110 կգ տանձ՝ կիլոգրամը 300 դրամով:

ա) Վաճառքի առաջին օրը որքա՞ն էր խանութի հասույթը:

բ) Ընդամենը որքա՞ն հասույթ կլինի խնձորի վաճառքից:

գ) Քանի՞ օրում կսպառվեն և՛ խնձորը, և՛ տանձը:

դ) Քանի՞ օրում խնձորի վաճառքից ստացված հասույթը կգերազանցի տանձի վաճառքից ստացված հասույթը:

353. Ունենք 80 գ 25 %-անոց աղի լուծույթ:

ա) Գտնել աղի զանգվածն այդ լուծույթում:

բ) Քանի՞ տոկոս աղ կա այդ լուծույթի 40 գրամում:

գ) Որքա՞ն մաքուր աղ պետք է ավելացնել լուծույթին, որպեսզի ջրի և աղի քանակները հավասարվեն:

դ) Որքա՞ն ջուր պետք է գոլորշիացնել լուծույթից, որպեսզի աղի պարունակությունը դառնա 80 %:

§6. Սահմանափակություն, մեծագույն և փոքրագույն արժեքներ

Սահմանում: ***f ֆունկցիան անվանում են վերևից սահմանափակ, եթե գոյություն ունի այնպիսի M թիվ, որ $f(x)\le M$, երբ $x\in D(f)$:***

f ֆունկցիան անվանում են ներքևից սահմանափակ, եթե գոյություն ունի այնպիսի m թիվ, որ $f(x)\ge m$, երբ $x\in D(f)$:

Օրինակ՝ $f(x)=|x|+2$ ֆունկցիան սահմանափակ է ներքևից 2-ով, $f(x)=1-|x|$ ֆունկցիան սահմանափակ է վերևից 1-ով, իսկ $f(x)=\sin x$ ֆունկցիան սահմանափակ է վերևից 1-ով, ներքևից՝ (-1)-ով:

Սահմանում: ***f* ֆունկցիան անվանում են սահմանափակ, եթե այն սահմանափակ է և՛ վերևից, և՛ ներքևից:**

Պարզ է, որ f ֆունկցիան սահմանափակ է, եթե գոյություն ունի այնպիսի M թիվ, որ $|f(x)| \le M$, երբ $x \in D(f)$:

Սահմանում: ***Եթե ֆունկցիայի արժեքների բազմությունում կա մեծագույն (փոքրագույն) թիվ, ապա այդ թիվն անվանում են ֆունկցիայի մեծագույն (փոքրագույն) արժեք:***

Պարզ է, որ եթե ֆունկցիան ունի մեծագույն արժեք, ապա այն սահմանափակ է վերևից, իսկ փոքրագույն արժեք ունեցող ֆունկցիան սահմանափակ է ներքևից:

Օրինակ 1: $f(x) = \sin x$ ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը $[-1;1]$ հատվածն է: Այդ հատվածի մեծագույն թիվը 1-ն է, իսկ փոքրագույնը՝ -1-ը: Հետևաբար՝ ֆունկցիայի մեծագույն արժեքը 1 է, իսկ փոքրագույնը՝ -1:

Նշենք, որ ֆունկցիայի մեծագույն կամ փոքրագույն արժեքները գտնելու համար պարտադիր չէ գտնել նրա արժեքների բազմությունը:

Համոզվելու համար, որ f ֆունկցիայի մեծագույն արժեքը M թիվն է, բավական է ապացուցել, որ՝

ա) եթե $x \in D(f)$, ապա $f(x) \le M$, (f-ի արժեքները չեն գերազանցում M-ը),

բ) գոյություն ունի այնպիսի $x_0 \in D(f)$, որ $f(x_0) = M$ (M թիվն ինքը f-ի արժեք է):

Հանգունորեն f ֆունկցիայի փոքրագույն արժեքը կլինի m-ը, եթե՝

ա) $f(x) \ge m$, երբ $x \in D(f)$,

բ) գոյություն ունի այնպիսի $x_0 \in D(f)$, որ $f(x_0) = m$:

Ինչպես կտեսնենք օրինակներում, ֆունկցիան կարող է մեծագույն կամ փոքրագույն արժեք չունենալ, նույնիսկ եթե այն սահմանափակ է:

Օրինակ 2: Դիցուք, $f(x) = x^2$, $x \in \mathbf{R}$: Քանի որ $f(x) = x^2 \ge 0$ և $f(0) = 0$, ուրեմն ֆունկցիան ներքևից սահմանափակ է, և նրա փոքրագույն արժեքը զրոն է: Ֆունկցիան վերևից սահմանափակ չէ, հետևաբար, մեծագույն արժեք չունի:

Օրինակ 3: Դիցուք, $f(x) = x^2$, $x \in [1;3]$:

Պարզ է, որ $1 = f(1) \le f(x) \le f(3) = 9$: Հետևաբար՝ ֆունկցիան սահմանափակ է, ընդ որում, այն ունի փոքրագույն և մեծագույն արժեքներ, որոնք համապատասխանաբար հավասար են 1-ի (երբ $x=1$) և 9-ի (երբ $x=3$):

Օրինակ 4: Դիցուք, $f(x)=x^2$, $x\in(0;3)$:

Պարզ է, որ $E(f)=(0;9)$, և ֆունկցիան սահմանափակ է: Սակայն այն չունի մեծագույն և փոքրագույն արժեքներ, քանի որ $(0;9)$ միջակայքում չկան մեծագույն և փոքրագույն թվեր:

Օրինակ 5: Դիցուք, $f(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$:

Պարզ է, որ $D(f)=\mathbf{R}$ և $|f(x)|<1$, քանի որ կամայական x-ի դեպքում $|x|<1+|x|$: Համոզվենք, որ $E(f)=(-1;1)$: Դժվար չէ ստուգել, որ $y\in(0,1)$ արժեքը ֆունկցիան ընդունում է $\dfrac{y}{1-y}$ կետում: Իրոք, եթե $y\in(0,1)$ և $x=\dfrac{y}{(1-y)}$, ապա $x>0$, ուստի $|x|=x$, և $f(x)=\dfrac{x}{1+x}=\dfrac{y}{1-y}:\left(1+\dfrac{y}{1-y}\right)=y$: Հանգունորեն կարող ենք ստուգել, որ $b\in(-1;0)$ արժեքը ֆունկցիան ընդունում է $x=\dfrac{b}{1+b}$ կետում: Մնում է նկատել, որ 0 արժեքը ֆունկցիան ընդունում է 0 կետում՝ $f(0)=0$:

Քանի որ $(-1;1)$ միջակայքում չկան մեծագույն և փոքրագույն թվեր, ուրեմն՝ ֆունկցիան չունի մեծագույն և փոքրագույն արժեքներ:

Օրինակ 6: Դիցուք, $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+6}$:

Ձևափոխելով՝ ստանում ենք՝ $f(x)=\dfrac{1}{(x+2)^2+2}$, ուստի՝ $D(f)=\mathbf{R}$: Քանի որ $(x+2)^2+2\geq 2$, ուրեմն՝ $f(x)\leq 1/2$ կամայական x-ի համար: Մյուս կողմից՝ $f(-2)=1/2$: Հետևաբար՝ ֆունկցիայի մեծագույն արժեքը $1/2$ է: Այս ֆունկցիան սահմանափակ է նաև ներքևից՝ $f(x)>0$, սակայն չունի փոքրագույն արժեք: Իրոք, եթե $m>0$ թիվը լինի ֆունկցիայի փոքրագույն արժեքը, ապա կամայական x-ի համար $\dfrac{1}{(x+2)^2+2}\geq m$, որտեղից՝ $(x+2)^2+2\leq\dfrac{1}{m}$, որը հնարավոր չէ:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ո՞ր ֆունկցիան են անվանում վերևից սահմանափակ:
2. Ո՞ր ֆունկցիան են անվանում ներքևից սահմանափակ:
3. Ո՞ր ֆունկցիան են անվանում սահմանափակ:

4. Ի՞նչ է ֆունկցիայի մեծագույն արժեքը:
5. Ի՞նչ է ֆունկցիայի փոքրագույն արժեքը:
6. Վերևից սահմանափակ ֆունկցիան ունի՞ արդյոք մեծագույն արժեք:
7. Որո՞նք են $\sin x$ և $\cos x$ ֆունկցիաների մեծագույն և փոքրագույն արժեքները:
8. Սահմանափակ ֆունկցիան ունի՞ արդյոք մեծագույն և փոքրագույն արժեքներ:

Առաջադրանքներ

Հետևյալ ֆունկցիաներից որո՞նք են վերևից սահմանափակ, որո՞նք են ներքևից սահմանափակ և որո՞նք՝ սահմանափակ (354-355).

354. ա) $y=x^2+7x+8$, բ) $y=6x-x^2-5$,

գ) $y=x^2+4x-1,\ x\in[-6;10]$, դ) $y=(x+1)^3-5,\ x\in[3;9]$:

355. ա) $y=\dfrac{1}{x-1}$, բ) $y=\dfrac{1}{x+1},\ x\in(-1;\infty)$,

գ) $y=\dfrac{2x+1}{1-x},\ x\in[2;8]$, դ) $y=\dfrac{1}{2x^2-4x+4}$,

ե) $y=\dfrac{3}{6x-7-4x^2}$, զ) $y=\dfrac{1}{x^2+3}-2x$:

356. Գտնել ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները.

ա) $y=2x^2+6x-4$, բ) $y=2x-x^2-1$, գ) $y=15\cos 3x$,

դ) $y=2\sin x-7$, ե) $y=\sqrt{9-|x|}$, զ) $y=\sqrt{7x-10-x^2}$:

Գտնել ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները և նշել կետերը, որոնցում ֆունկցիան ընդունում է այդ արժեքները (357-358).

357. ա) $y=x^3+3x,\ x\in[0;3]$, բ) $y=\dfrac{1}{x^2-6x+10}$,

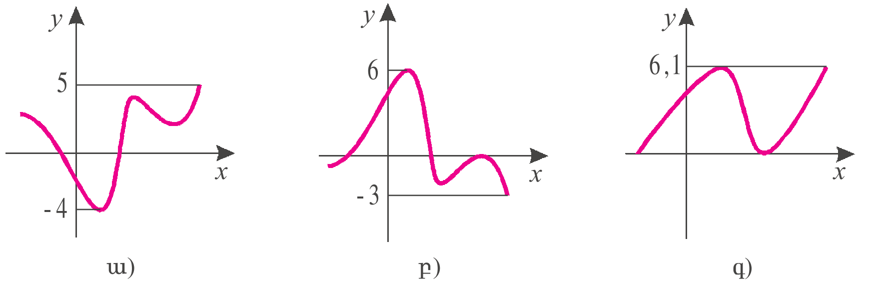
գ) $y=3\cos x,\ x\in(-\pi;\pi)$, դ) $y=\operatorname{tg} x,\ x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right)$,

ե) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^4+16x^2+4}}$, զ) $y=\dfrac{1}{\sqrt{|x|+4}}+\dfrac{1}{2}$:

***358.** ա) $y=\sin^2 x+5x^2$, բ) $y=\cos\pi x+\sqrt{1-2|x|}$,

գ) $y=\sqrt{x^2-6x+10}+2|x-3|$, դ) $y=\sqrt{4-x^2}+\sqrt{25-|x|}$:

359. Գտնել գրաֆիկորեն տրված ֆունկցիաների մեծագույն և փոքրագույն արժեքները (նկ. 49):



Նկ. 49

360. Ֆիզիկայի դասընթացից հայտնի է, որ թնդանոթից V_0 մ/վրկ արագությամբ և հորիզոնի նկատմամբ α անկյունով արձակված արկը գետին է ընկնում կրակելու վայրից $\frac{V_0^2}{g}\cdot\sin 2\alpha$ մետր հեռավորության վրա: Հորիզոնի նկատմամբ ի՞նչ անկյունով կրակելու դեպքում այդ հեռավորությունը կլինի առավելագույնը:

361. Ինչպիսի՞ն պետք է լինեն 20 սմ պարագիծ ունեցող ուղղանկյան չափերը, որպեսզի նրա մակերեսը լինի մեծագույնը:

362. Եռանկյան երկու կողմերի գումարը 10 սմ է, իսկ նրանցով կազմված անկյունը՝ 45°: Ինչպիսի՞ն պետք է լինեն այդ կողմերը, որպեսզի եռանկյան մակերեսը լինի մեծագույնը:

➤363. Դիցուք, $f(x)$ ֆունկցիայի մեծագույն արժեքը M է, իսկ փոքրագույնը՝ m: Ի՞նչ կարելի է ասել $F(x)$ ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքների մասին, եթե՝

ա) $F(x)=f(x)+10$, բ) $F(x)=f(x-5)$, գ) $F(x)=7f(x)-3$,

դ) $F(x)=-f(x)$, ե) $F(x)=f^3(x)$, զ) $F(x)=f^2(x)$:

Կրկնության համար

364. Եթե երկնիշ թիվը բաժանենք իր թվանշանների գումարին, ապա քանորդում կստանանք 6, իսկ մնացորդում՝ 5: Եթե նույն թվանշաններով կազմված, բայց հակառակ կարգով գրված թիվը բաժանենք իր թվանշանների գումարին, ապա քանորդում կստանանք 4, իսկ մնացորդում՝ 3: Գտնել սկզբնական երկնիշ թիվը:

365. Եթե երկնիշ թիվը բաժանենք իր թվանշանների գումարին, ապա քանորդում կստանանք 4, իսկ մնացորդում՝ 3: Եթե նույն թվանշաններով կազմված, բայց հակառակ կարգով գրված թիվը բաժանենք իր թվանշանների գումարին, ապա քանորդում կստանանք 6, իսկ մնացորդում՝ 8: Գտնել սկզբնական երկնիշ թիվը:

§7. Ֆունկցիայի պարբերականությունը

Սահմանում: ***Զրոյից տարբեր T թիվն անվանում են f ֆունկցիայի պարբերություն, եթե $x \in D(f)$ պայմանից հետևում է՝ $x \pm T \in D(f)$ և***

$$f(x+T)=f(x):$$

Այդ դեպքում f ֆունկցիան անվանում են պարբերական ֆունկցիա:

Եթե T-ն f ֆունկցիայի պարբերություն է և $x \in D(f)$, ապա $f(x-T)=f(x)$: Իրոք, եթե $x \in D(f)$, ապա $x-T \in D(f)$ և $f(x)=f((x-T)+T)=f(x-T)$:

Հեշտ է ստուգել, որ եթե T-ն f ֆունկցիայի պարբերություն է, ապա T-ին պատիկ յուրաքանչյուր թիվ նույնպես պարբերություն է: Մասնավորապես,

$$f(x+2T)=f(x+T+T)=f(x+T)=f(x):$$

Սահմանում: ***Եթե պարբերական ֆունկցիան ունի փոքրագույն դրական պարբերություն, այն անվանում են հիմնական պարբերություն:***
Եթե T-ն f ֆունկցիայի հիմնական պարբերությունն է, ապա ասում են, որ f ֆունկցիան T-պարբերական է:

Օրինակ 1: Դիցուք, $f(x)=\sin x$, $x \in \mathbf{R}$:

Գիտենք, որ $\sin(x+2\pi)=\sin x$: Ուրեմն՝ 2π-ն սինուսի համար պարբերություն է և, հետևաբար, պարբերություն է կամայական $2\pi k$ տեսքի թիվ, որտեղ k-ն զրոյից տարբեր ամբողջ թիվ է: Համոզվենք, որ սինուսն այլ պարբերություն չունի: Իրոք, եթե T-ն պարբերություն է, ապա

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+T\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1:$$

Բերման բանաձև կիրառելով՝ ստանում ենք՝ $\cos T=1$, որտեղից՝ $T=2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$: Քանի որ $2\pi k$ թվերի մեջ փոքրագույն դրական թիվը 2π-ն է, ուրեմն՝

$f(x)=\sin x$ ֆունկցիան 2π-պարբերական է:

Օրինակ 2: Դիցուք, $f(x)=\operatorname{tg} x$, $x \neq \frac{\pi}{2}+\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$: Ըստ բերման բանաձևի՝

$$\operatorname{tg}(x+\pi)=\operatorname{tg} x:$$

Այսինքն՝ π-ն տանգենսի պարբերություն է և, հետևաբար, պարբերություն է կամայական πk տեսքի թիվ, որտեղ k-ն զրոյից տարբեր ամբողջ թիվ է: Մյուս կողմից՝ ենթադրելով, որ T-ն տանգենսի պարբերություն է, կունենանք, որ $\operatorname{tg} T=\operatorname{tg}(0+T)=\operatorname{tg} 0=0$, որտեղից՝ $T=\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$: Հետևաբար՝ π-ն տանգենսի հիմնական պարբերությունն է: Այսպիսով՝

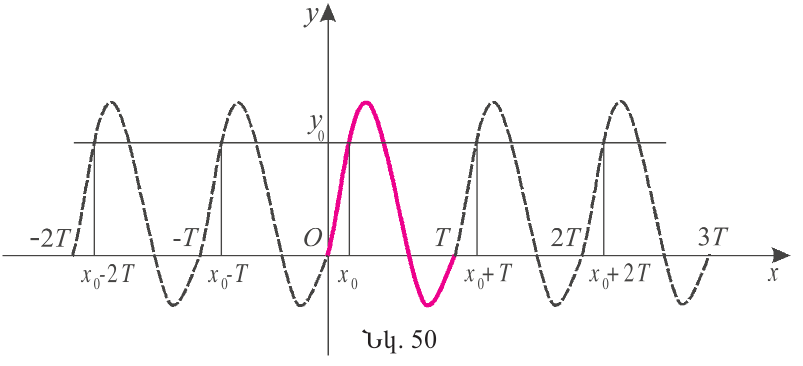
$f(x) = \operatorname{tg} x$ ֆունկցիան π-պարբերական է:

Նման ձևով կարող ենք համոզվել, որ՝

$f(x) = \cos x$ ֆունկցիան 2π-պարբերական է:

$f(x) = \operatorname{ctg} x$ ֆունկցիան π-պարբերական է:

Դիցուք, f ֆունկցիան T-պարբերական է և $(x_0; y_0)$ կետը պատկանում է նրա գրաֆիկին (նկ. 50), այսինքն՝ $y_0 = f(x_0)$: Քանի որ T-ն պարբերություն է, ուրեմն կամայական $k \in \mathbf{Z}$ ամբողջ թվի համար $y_0 = f(x_0 + Tk)$:



Նկ. 50

Այսինքն՝ $(x_0 + Tk; y_0)$, $k \in \mathbf{Z}$, կետերը նույնպես կպատկանեն f ֆունկցիայի գրաֆիկին:

> ***T-պարբերական ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցելու համար բավական է այն կառուցել T երկարությամբ որևէ հատվածի համար, այնուհետև ստացված պատկերն աբսցիսների առանցքի ուղղությամբ տեղաշարժել Tk-ով, $k \in \mathbf{Z}$ (նկ. 50):***

Օրինակ 3: $[x]$-ով նշանակում են x-ը չգերազանցող ամենամեծ ամբողջ թիվը (կարդացվում է՝ ***ամբողջ մաս իքս***): Օրինակ՝

$$[7{,}5] = 7, \quad [\sqrt{3}] = 1, \quad [-8] = -8, \quad [-6{,}8] = -7:$$

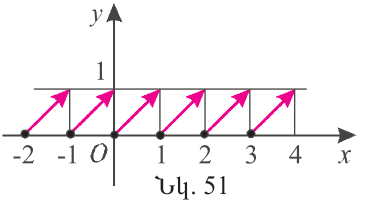
$\{x\}$-ով (կարդացվում է՝ ***կոտորակային մաս իքս***) նշանակում են $x - [x]$ արտահայտությունը: Օրինակ՝ $\{7{,}5\} = 0{,}5$, $\{\sqrt{3}\} = \sqrt{3} - 1$, $\{-8\} = 0$, $\{-6{,}8\} = 0{,}2$:

Պարզ է, որ կամայական x-ի համար՝ $x - 1 < [x] \le x$, և $0 \le \{x\} < 1$: Իսկ եթե x-ն ամբողջ թիվ է, ապա $[x] = x$, $\{x\} = 0$:

Համոզվենք, որ $f(x) = \{x\}$ ֆունկցիան 1-պարբերական է: Նկատենք, որ x թվին k ամբողջ թիվ գումարելիս նրա կոտորակային մասը չի փոխվում՝

$$\{x+k\}=\{x\},\ k\in \mathbf{Z}:$$

Այսինքն՝ զրոյից տարբեր կամայական ամբողջ թիվ $f(x)=\{x\}$ ֆունկցիայի պարբերություն է: Մյուս կողմից, եթե T թիվը պարբերություն է, ապա նրա կոտորակային մասը՝ $\{T\}=\{0+T\}=\{0\}=0$: Այսինքն՝ T-ն ամբողջ է: Քանի որ փոքրագույն դրական ամբողջ թիվը 1-ն է, ուրեմն այն $f(x)=\{x\}$ ֆունկցիայի հիմնական պարբերությունն է:



Նկ. 51

Այժմ, հաշվի առնելով, որ $[0;1)$ միջակայքում $\{x\}=x$, կարող ենք կառուցել $f(x)=\{x\}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը (նկ. 51):

Պարբերական ֆունկցիայի սահմանումից անմիջապես հետևում է, որ եթե T-ն f ֆունկցիայի պարբերություն է և $f(x_0)=y_0$, ապա կամայական ամբողջ k թվի համար $x_0+Tk\in D(f)$ և $f(x_0+Tk)=y_0$: Այստեղից հետևում է՝

1) $D(f)$-ը չի կարող լինել սահմանափակ վերևից կամ ներքևից,

2) f-ն իր յուրաքանչյուր արժեք ընդունում է անվերջ թվով կետում:

Մասնավորապես, մոնոտոն ֆունկցիան չի կարող լինել պարբերական, քանի որ այն իր յուրաքանչյուր արժեք ընդունում է մի կետում:

Օրինակ՝ $y=x^3$, $y=x^2+2x$, $y=\sin\sqrt{x}$ ֆունկցիաները պարբերական չեն (առաջին ֆունկցիան աճող է, երկրորդը 0 արժեքն ընդունում է 2 կետում՝ $x=0$ և $x=-2$, իսկ երրորդի որոշման տիրույթը $[0;\ \infty)$ միջակայքն է, որը սահմանափակ է ներքևից):

Օրինակ 4: Այժմ դիտարկենք մի ֆունկցիա, որը պարբերական է, սակայն չունի հիմնական պարբերություն:

Դիրիխլեի ֆունկցիա են անվանում հետևյալ ֆունկցիան.

$$D(x)=\begin{cases}1, & \text{եթե } x\text{-ը ռացիոնալ թիվ է}\\ 0, & \text{եթե } x\text{-ն իռացիոնալ թիվ է:}\end{cases}$$

Համոզվենք, որ կամայական T դրական ռացիոնալ թիվ Դիրիխլեի ֆունկցիայի համար պարբերություն է: Իրոք, եթե x-ը ռացիոնալ է, ապա $(x+T)$-ն նույնպես ռացիոնալ է և $D(x)=1=D(x+T)$: Հանգունորեն՝ $D(x)=0=D(x+T)$, եթե x-ն իռացիոնալ է: Քանի որ դրական ռացիոնալ թվերի մեջ չկա փոքրագույնը, ուրեմն Դիրիխլեի ֆունկցիան հիմնական պարբերություն չունի:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ո՞ր ֆունկցիան են անվանում պարբերական:
2. Ի՞նչ է հիմնական պարբերությունը:
3. Ի՞նչ է նշանակում, որ f -ը T -պարբերական ֆունկցիա է:
4. Որո՞նք են եռանկյունաչափական ֆունկցիաների հիմնական պարբերությունները:
5. Ինչպե՞ս կառուցել T -պարբերական ֆունկցիայի գրաֆիկը:
6. Պարբերակա՞ն է արդյոք $\{x\}$ ֆունկցիան:
7. Ամեն մի պարբերական ֆունկցիա ունի՞ արդյոք հիմնական պարբերություն:

Առաջադրանքներ

366. Դիցուք, T -ն f ֆունկցիայի պարբերություն է: Ապացուցել, որ յուրաքանչյուր $a \neq 0$ թվի դեպքում T -ն նաև F ֆունկցիայի պարբերություն է, եթե`

ա) $F(x)=f(x+a)$, բ) $F(x)=f(x)+a$, գ) $F(x)=af(x)$:

367. Ապացուցել, որ T -ն տրված ֆունկցիայի պարբերություն է.

ա) $f(x)=\sin 2x, \quad T=\pi$, բ) $f(x)=\cos\frac{x}{3}, \quad T=6\pi$,

գ) $f(x)=4-\operatorname{tg} x, \quad T=\pi$, դ) $f(x)=2\operatorname{ctg}\frac{x}{2}, \quad T=2\pi$,

ե) $f(x)=\sin x+\operatorname{ctg} x, \quad T=2\pi$, զ) $f(x)=\sin^2 x, \quad T=\pi$:

368. Դիցուք, $F(x)=f(3x)$: Ապացուցել, որ`

ա) եթե T թիվը f -ի պարբերություն է, ապա $T_1=T/3$ թիվը F -ի պարբերություն է,

բ) եթե T_1 թիվը F -ի պարբերություն է, ապա $T=3T_1$ թիվը f -ի պարբերություն է,

➤ գ) եթե f -ի հիմնական պարբերությունը T -ն է, ապա F -ի հիմնական պարբերությունը $T/3$ -ն է:

➤ **369.** Ապացուցել, որ եթե f ֆունկցիան T -պարբերական է, ապա $F(x)=f(0{,}5x)$ ֆունկցիան $2T$ -պարբերական է:

➤ **370.** Գրաֆիկորեն հիմնավորել, որ եթե f ֆունկցիան T -պարբերական է, ապա $F(x)=f(5x)$ ֆունկցիան $T/5$ -պարբերական է:

* **371.** Դիցուք, f -ը T -պարբերական ֆունկցիա է: Ապացուցել, որ կամայական $k \neq 0$ թվի համար $F(x)=f(kx)$ ֆունկցիայի հիմնական պարբերությունը $\frac{T}{|k|}$ -ն է:

372. Օգտվելով նախորդ առաջադրանքից` գտնել ֆունկցիայի հիմնական պարբերությունը.

ա) $y=\sin 2x$, բ) $y=3\sin\pi x$, գ) $y=tg\,\pi x$, դ) $y=\operatorname{tg}8x$,

ե) $y=2\cos\frac{x}{3}-4$, զ) $y=\cos\frac{\pi x}{6}$, է) $y=\{2x\}$, ը) $y=\left\{\frac{2x}{3}\right\}$:

* **373.** Գտնել ֆունկցիայի հիմնական պարբերությունը.

ա) $y=\sin\pi x+\sqrt{3}\cos\pi x$, բ) $y=\operatorname{tg}5\pi x+\operatorname{ctg}5\pi x$,

գ) $y=\sin 2x\cos x$, դ) $y=\sin 2x\cos 3x$:

374. Ապացուցել, որ ֆունկցիան պարբերական է.

ա) $y=\sin 2x+\cos^2 x$, բ) $y=\operatorname{tg}x+\sin 2x$, գ) $y=tg\,\pi x+\{x\}$,

դ) $y=\sin x+\cos x$, ե) $y=\operatorname{ctg}x+\sin^2 x$, զ) $y=\{x+0{,}5\}-\{x\}$,

է) $y=\sin 2x+\cos 3x$, ը) $y=\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}+\operatorname{tg}\dfrac{x}{3}$, թ) $y=\sin\dfrac{2x}{5}+\cos\dfrac{3x}{7}$:

375. Ապացուցել, որ ֆունկցիան պարբերական չէ.

ա) $y=x^3+x$, բ) $y=\cos\sqrt{x^2+5x}$, ➤գ) $y=\sin x+x$:

* **376.** Ապացուցել, որ կամայական a իռացիոնալ թվի համար $y=\cos x+\cos ax$ ֆունկցիան պարբերական չէ:

* **377.** Դիցուք, f -ը և g -ն T -պարբերական ֆունկցիաներ են: Ապացուցել, որ $F(x)=f(mx)+g(nx)$ ֆունկցիան պարբերական է, եթե հայտնի է, որ`

ա) m -ը և n -ը ամբողջ թվեր են, բ) m -ը և n -ը ռացիոնալ թվեր են,

գ) m/n -ը ռացիոնալ թիվ է:

* **378.** Ապացուցել, որ T -պարբերական ֆունկցիայի բոլոր պարբերությունները ունեն kT, $k\in\mathbb{Z}$, $k\neq 0$ տեսքը:

379. Կարո՞ղ է արդյոք D որոշման տիրույթով ֆունկցիան լինել պարբերական, եթե

ա) $D=(-3;3)$, բ) $D=(0;\infty)$, գ) $D=\mathbb{Q}$, դ) $D=\mathbb{Z}$:

380. Պարտադի՞ր է արդյոք, որ T -պարբերական ֆունկցիաների արտադրյալը լինի T -պարբերական: Բերեք օրինակներ:

Կրկնության համար

381. Գտնել հավասարման թույլատրելի արժեքների և լուծումների բազմությունները.

ա) $\sqrt{5x^2-4x}=1$, բ) $\sqrt{3x^2-12}=-8$, գ) $|x^2-5|=-4x$,

դ) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2-15x}}+\dfrac{1}{2}=0$, ե) $\dfrac{\sqrt{3x}}{\sqrt{3x^2-2}}=\dfrac{3}{5}$, զ) $\dfrac{2}{|x^2-9|}+7=0$:

382. Գտնել անհավասարման թույլատրելի արժեքների և լուծումների բազմությունները.

ա) $\sqrt{3x^2-48}\geq 0$, բ) $\sqrt{x^2+6x}<0$, գ) $\sqrt{x^2+8}\leq 0$,

դ) $|4x^5-6|+3\geq 0$, ե) $|x^3-27|\leq 0$, զ) $\dfrac{1}{|9x^2-18|}>0$:

§8. Զույգ և կենտ ֆունկցիաներ

Սահմանում: ***f ֆունկցիան անվանում են զույգ, եթե***

$$f(-x)=f(x),\ \text{երբ}\ x\in D(f):$$

f ֆունկցիան անվանում են կենտ, եթե

$$f(-x)=-f(x),\ \text{երբ}\ x\in D(f):$$

Բնականաբար, զույգ կամ կենտ ֆունկցիաների համար

$x\in D(f)$ պայմանից հետևում է, որ $-x\in D(f)$,

այսինքն՝ այդ ֆունկցիաների որոշման տիրույթները համաչափ են 0 կետի նկատմամբ:

Օրինակ 1: Մեզ հայտնի՝

$$\sin(-x)=-\sin x,\quad \operatorname{tg}(-x)=-\operatorname{tg} x,\quad \operatorname{ctg}(-x)=-\operatorname{ctg} x,\quad \cos(-x)=\cos x$$

նույնություններից հետևում է, որ

սինուսը, տանգենսը և կոտանգենսը կենտ ֆունկցիաներ են, իսկ կոսինուսը զույգ ֆունկցիա է:

Օրինակ 2: $f(x)=|x|$ ֆունկցիան զույգ է, քանի որ $|-x|=|x|$, $x\in \mathbf{R}$:

Օրինակ 3: $(-x)^n=(-1)^n x^n$ նույնությունից հետևում է, որ x^n-ը զույգ ֆունկցիա է, եթե n-ը զույգ թիվ է, և կենտ ֆունկցիա է, եթե n-ը կենտ է:

Օրինակ 4: Պարզենք $f(x)=\dfrac{x+2}{x-2}-\dfrac{x-2}{x+2}$ ֆունկցիայի զույգությունը:

Ֆունկցիան որոշված է, երբ $x\neq\pm2$, և եթե $x\in D(f)$, ապա

$$f(-x)=\frac{-x+2}{-x-2}-\frac{-x-2}{-x+2}=\frac{x-2}{x+2}-\frac{x+2}{x-2}=-f(x):$$

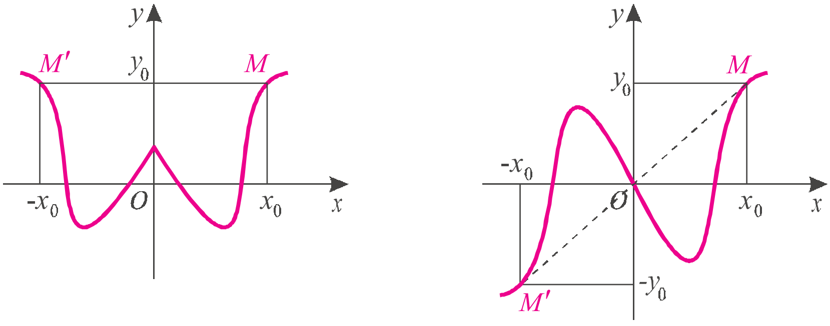
Պատասխան՝ f ֆունկցիան կենտ է:

Նշենք, որ ամեն մի ֆունկցիա չէ, որ զույգ է կամ կենտ: Օրինակ՝ $f(x)=x+1$ ֆունկցիան ո՛չ զույգ է, ո՛չ կենտ, քանի որ $f(-x)=1-x$ ֆունկցիան չի համընկնում $f(x)=x+1$ և $-f(x)=-x-1$ ֆունկցիաներից ոչ մեկին:

Ենթադրենք, $M(x_0;\,y_0)$ կետը պատկանում է f զույգ ֆունկցիայի գրաֆիկին, այսինքն՝ $y_0=f(x_0)$: Քանի որ

$$f(-x_0)=f(x_0)=y_0\,,$$

ուրեմն $M'(-x_0;\,y_0)$ կետը նույնպես պատկանում է այդ գրաֆիկին (նկ. 52, ա): Քանի որ նշված կետերը համաչափ են օրդինատների առանցքի նկատմամբ,



ա) Նկ. 52 բ)

հետևաբար՝

> ***զույգ ֆունկցիայի գրաֆիկը համաչափ է օրդինատների առանցքի նկատմամբ*** (նկ. 52, ա):

Եթե $M(x_0; y_0)$ կետը պատկանում է f կենտ ֆունկցիայի գրաֆիկին, ապա

$$f(-x_0) = -f(x_0) = -y_0,$$

այսինքն՝ $M'(-x_0; -y_0)$ կետը նույնպես պատկանում է այդ գրաֆիկին (նկ. 52, բ): Քանի որ նշված կետերը համաչափ են կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ, հետևաբար՝

> ***կենտ ֆունկցիայի գրաֆիկը համաչափ է կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ*** (նկ. 52, բ):

Դժվար չէ տեսնել, որ եթե դիտարկված ֆունկցիաների որոշման տիրույթները դատարկ չեն, ապա՝

ա) *զույգ ֆունկցիաների գումարը, արտադրյալը, քանորդը զույգ ֆունկցիաներ են,*

բ) *երկու կենտ ֆունկցիաների գումարը կենտ, իսկ արտադրյալն ու քանորդը զույգ ֆունկցիաներ են:*

Օրինակ՝ եթե f-ը և g-ն զույգ ֆունկցիաներ են և $F = f + g$, ապա $D(F) = D(f) \cap D(g)$, և եթե $x \in D(F)$, ապա

$$F(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = F(x):$$

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ո՞ր ֆունկցիան է կոչվում զույգ և ո՞րը կենտ ֆունկցիա:
2. Ո՞ր կետի նկատմամբ է համաչափ զույգ կամ կենտ ֆունկցիայի որոշման տիրույթը:
3. Եռանկյունաչափական ֆունկցիաներից որո՞նք են կենտ և որո՞նք՝ զույգ:

4. Բերեք ֆունկցիայի օրինակ, որը ո՛չ զույգ է, ո՛չ կենտ:
5. Զո՞ւյգ ֆունկցիա է, թե՞ կենտ՝ ա) զույգ ֆունկցիաների գումարը, արտադրյալը, քանորդը, բ) երկու կենտ ֆունկցիաների գումարը, արտադրյալը, քանորդը:
6. Ինչի՞ նկատմամբ է համաչափ՝ ա) զույգ ֆունկցիայի գրաֆիկը, բ) կենտ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

Առաջադրանքներ

383. Ապացուցել, որ ֆունկցիան զույգ է.

ա) $f(x)=x^2+1$, բ) $f(x)=\cos 2x$, գ) $f(x)=x\sin\frac{x}{2}$,
դ) $f(x)=|x|+x^4$, ե) $f(x)=\frac{x^2-2}{\sin^2 x}$, զ) $f(x)=x^3\operatorname{tg}2x$,
է) $f(x)=(x^3-x)\operatorname{ctg}x$, ը) $f(x)=\sin x\cdot\operatorname{tg}x$, թ) $f(x)=\frac{\sin x}{x}$:

384. Ապացուցել, որ ֆունկցիան կենտ է.

ա) $f(x)=x^5-x$, բ) $f(x)=x\cos x$, գ) $f(x)=x^2\sin 2x$,
դ) $f(x)=x^4\operatorname{ctg}x$, ե) $f(x)=\frac{\sin^3 x}{x^2+1}$, զ) $f(x)=\frac{\cos 4x}{x}$,
է) $f(x)=\operatorname{tg}^3 x+3x$, ը) $f(x)=x\sin x^2$, թ) $f(x)=x\operatorname{ctg}^2 x$:

385. *) Դիցուք, f -ը զույգ ֆունկցիա է, իսկ g -ն՝ կենտ: Պարզել, թե հետևյալ ֆունկցիաներից որո՞նք են զույգ, որոնք՝ կենտ.

ա) $f\cdot g$, բ) $g\cdot g$, գ) f/g, դ) $g\circ g$, ե) $f\circ g$, զ) $g\circ f$:

386. Ի՞նչ կարելի է ասել $f-g$ ֆունկցիայի զույգ կամ կենտ լինելու մասին, եթե

ա) f -ը զույգ ֆունկցիա է, իսկ g -ն՝ կենտ,
բ) g -ն զույգ ֆունկցիա է, իսկ f-ը ՝ կենտ,
գ) երկու ֆունկցիաներն էլ զույգ են,
դ) երկու ֆունկցիաներն էլ կենտ են:

* **387.** Դիցուք, f -ը զույգ ֆունկցիա է, g -ն՝ կենտ, իսկ h-ը՝ կամայական: Ի՞նչ կարելի է ասել հետևյալ ֆունկցիայի զույգ կամ կենտ լինելու մասին: Բերել համապատասխան օրինակներ.

ա) $h\circ g$, բ) $f\circ h$, գ) $h\circ f$, դ) $g\circ h$, ե) $h\cdot f$:

388. Ապացուցել, որ կամայական f ֆունկցիայի համար՝

ա) $F(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$ ֆունկցիան զույգ է,

բ) $F(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$ ֆունկցիան կենտ է:

*) *385-388 առաջադրանքներում ենթադրվում է, որ դիտարկվող ֆունկցիաների որոշման տիրույթները դատարկ չեն:*

➤389. Դիցուք, f ֆունկցիայի որոշման տիրույթը համաչափ է O կետի նկատմամբ: Օգտվելով նախորդ խնդրից՝ f ֆունկցիան ներկայացնել որպես զույգ և կենտ ֆունկցիաների գումար:

390. Օգտվելով նախորդ խնդրից՝ տրված ֆունկցիան ներկայացնել որպես զույգ և կենտ ֆունկցիաների գումար.

ա) $y=3x^2-x+7$, բ) $y=\dfrac{x^2+1}{x^2+x+1}$, գ) $y=\dfrac{1}{(x^2-1)(x+1)}$:

Պարզել, թե հետևյալ ֆունկցիաներից որո՞նք են զույգ, որո՞նք՝ կենտ, և որո՞նք են ո՛չ զույգ, ո՛չ կենտ (391-393).

391. ա) $y=\sin x+2x$, բ) $y=\cos x-x$, գ) $y=\operatorname{tg} x-x^3$,

դ) $y=\sin(x^2)+x^{12}$, ե) $y=\operatorname{tg}^2 x-x^4+1$, զ) $y=\sin(2x+1)$,

է) $y=\sin(x^2-1)$, ը) $y=\cos(\operatorname{ctg} x)+x$, թ) $y=x\sin x$:

392. ա) $y=(x+1)^2+(x-1)^2$, բ) $y=x^5-2x^2+1$, գ) $y=\dfrac{x+4}{x-4}+\dfrac{x-4}{x+4}$,

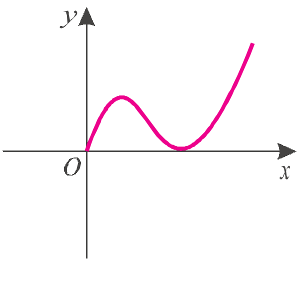
դ) $y=\dfrac{3}{2x}$, ե) $y=\dfrac{5x}{x-7}$, զ) $y=\dfrac{4x-13}{5x+27}$:

393. ա) $y=\dfrac{1}{1+x+x^2}-\dfrac{1}{1-x+x^2}$, բ) $y=\dfrac{x^3-x}{x^4+x^2+1}$,

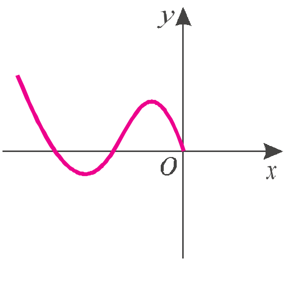
գ) $y=\sqrt{7+x}+\sqrt{7-x}$, դ) $y=\sqrt{10-x}+\sqrt{9+x}$:

394. Ապացուցել, որ եթե f կենտ ֆունկցիան որոշված է 0 կետում, ապա $f(0)=0$:

395. Նկ. 53, ա-ում պատկերված է $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը ոչ բացասական x-երի համար: Լրացնել այդ ֆունկցիայի գրաֆիկը, եթե հայտնի է, որ այն՝ ա) զույգ է, բ) կենտ է:



ա)



բ)

Նկ. 53

396. Նկ. 53, բ-ում պատկերված է $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը ոչ դրական x-երի համար: Պատկերել այդ ֆունկցիայի գրաֆիկը, եթե հայտնի է, որ այն՝ ա) զույգ է, բ) կենտ է:

397. Պատկերել որևէ ֆունկցիայի գրաֆիկ, որը՝ ա) զույգ է, բ) կենտ է, գ) ոչ զույգ է, ոչ՝ կենտ:

398. Կարո՞ղ է արդյոք D որոշման տիրույթով ֆունկցիան լինել զույգ կամ կենտ, եթե՝

ա) $D=(-1;5)$, բ) $D=[-4;4]$, գ) $D=(-7;7]$, դ) $D=\mathbf{Z}$:

Կրկնության համար

399. Ապացուցել, որ եթե $a>b>2$, ապա՝

ա) $\dfrac{1}{b^2-4b+5}>\dfrac{1}{a^2-4a+5}$, բ) $\dfrac{1}{a^2-3a+2}<\dfrac{1}{b^2-3b+2}$:

§9. Ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքերը և էքստրեմումները

f ֆունկցիան կոչվում է X բազմությունում աճող, եթե կամայական $x_1, x_2 \in X$ թվերի համար $x_1<x_2$ անհավասարությունից հետևում է, որ $f(x_1)<f(x_2)$:

f ֆունկցիան կոչվում է X բազմությունում նվազող, եթե կամայական $x_1, x_2 \in X$ թվերի համար $x_1<x_2$ անհավասարությունից հետևում է, որ $f(x_1)>f(x_2)$:

Ֆունկցիան կոչվում է աճող (նվազող), եթե այն աճող է (համապատասխանաբար՝ նվազող է) իր որոշման տիրույթում:

Աճող և նվազող ֆունկցիաները ունեն ընդհանուր անվանում՝ ***մոնոտոն ֆունկցիաներ***:

Մեզ առավելապես կհետաքրքրի այն դեպքը, երբ X բազմությունը, որտեղ ֆունկցիան մոնոտոն է, միջակայք է:

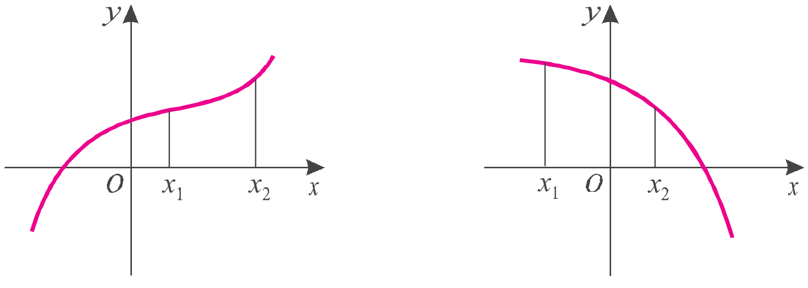
Δ միջակայքն անվանում են f ֆունկցիայի ***մոնոտոնության միջակայք***, եթե f ֆունկցիան այդ միջակայքի վրա մոնոտոն է, այսինքն՝ կա՛մ աճող է, կա՛մ նվազող:

Օրինակ 1: $f(x)=x^2$ ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքերն են՝ $(-\infty;0]$ և $[0;\infty)$: Դրանցից առաջինում ֆունկցիան նվազող է, իսկ երկրորդում՝ աճող: Իհարկե, կարող ենք ասել, որ $[1;3]$ միջակայքը նույնպես մոնոտոնության միջակայք է, սակայն ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքեր ընդունված է անվանել մեծագույն միջակայքերը, որոնց վրա ֆունկցիան մոնոտոն է:

Առաջին հայացքից կարող է տարօրինակ թվալ, որ 0 կետը մտնում է $f(x)=x^2$ ֆունկցիայի և՛ աճման միջակայքի, և՛ նվազման միջակայքի մեջ: Սակայն դա բնական է, քանի որ ֆունկցիայի արժեքը 0 կետում համեմատվում է առաջին դեպքում բացասական, իսկ երկրորդ դեպքում՝ դրական կետում ֆունկցիայի արժեքի հետ:

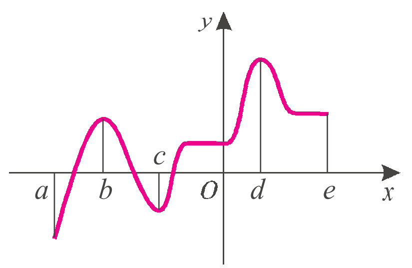
Աճող և նվազող ֆունկցիաներից բացի, դիտարկվում են նաև չաճող և չնվազող ֆունկցիաներ[*]:

Սահմանում: ***f* ֆունկցիան կոչվում է *A* բազմությունում չաճող (չնվազող), եթե կամայական $x_1, x_2 \in A$ թվերի համար $x_1 < x_2$ անհավասարությունից հետևում է, որ $f(x_1) \ge f(x_2)$ (համապատասխանաբար՝ $f(x_1) \le f(x_2)$):**



ա) Նկ. 54 բ)

Ֆունկցիայի աճող (նվազող) լինելը դրա գրաֆիկում արտահայտվում է նրանով, որ երբ կետը գրաֆիկի վրայով շարժվում է աջ, այն բարձրանում է վեր (իջնում է վար): 54-րդ նկարում պատկերված գրաֆիկներից ա)-ն աճող, իսկ բ)-ն նվազող ֆունկցիաների գրաֆիկներ են: Իսկ 55-րդ նկարում պատկերված է ոչ մոնոտոն ֆունկցիայի գրաֆիկ: Այդ ֆունկցիան աճող է $[a;b]$ միջակայքում, նվազող՝ $[b;c]$-ում, չնվազող՝ $[c;d]$-ում և չաճող՝ $[d;e]$-ում:



Նկ. 55

Ֆունկցիաների մոնոտոնության միջակայքերի համար ընդունված են հետևյալ նշանակումները.

ա) $f\uparrow[a,b]$ - f ֆունկցիան աճող է $[a;b]$ միջակայքում,

բ) $f\downarrow[a,b]$ - f ֆունկցիան նվազող է $[a;b]$ միջակայքում:

[*] *Այս ֆունկցիաները նույնպես ընդունված է անվանել մոնոտոն, սակայն մոնոտոն ֆունկցիա ասելով կհասկանանք աճող կամ նվազող ֆունկցիա, քանի որ դիտարկելու ենք միայն այդպիսի մոնոտոն ֆունկցիաներ:*

Օրինակ 2: Գտնենք ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքերը.

$$f(x)=\frac{1}{x^4+x^2+5}:$$

Ենթադրենք, $0\le x_1<x_2$: Այդ դեպքում՝ $x_1^4+x_1^2+5<x_2^4+x_2^2+5$, հետևաբար՝

$$\frac{1}{x_1^4+x_1^2+5}>\frac{1}{x_2^4+x_2^2+5},$$

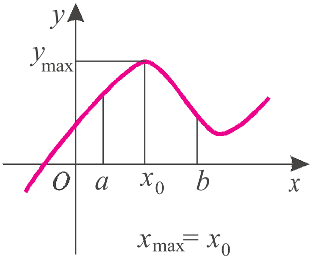
այսինքն՝ $f(x_1)>f(x_2)$: Ուրեմն՝ f-ը $[0;+\infty)$ միջակայքում նվազող է: Նման ձևով կստացվի, որ f-ը $(-\infty;0]$ միջակայքում աճող է:

Պատասխան՝ $f\uparrow(-\infty;0]$, $f\downarrow[0;+\infty)$:

Օրինակ 3: $y=\frac{1}{x}$ ֆունկցիան նվազող է $(-\infty;0)$ միջակայքում և $(0;\infty)$ միջակայքում: Նշենք, որ այս ֆունկցիան նվազող չէ իր որոշման տիրույթում: Իրոք՝ $-2<2$, սակայն $f(-2)=-1/2<1/2=f(2)$:

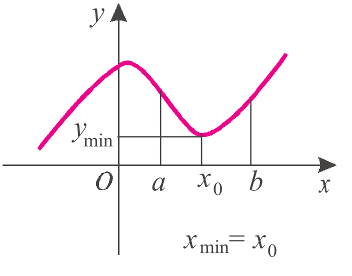
Սահմանում: ***x_0 կետը կոչվում է $y=f(x)$ ֆունկցիայի մաքսիմումի կետ, եթե գոյություն ունի x_0-ն պարունակող այնպիսի $(a;b)$ միջակայք, որին պատկանող կամայական x-ի համար $f(x_0)\ge f(x)$*** (նկ. 56, ա):

Այս դեպքում գրում են $x_{max}=x_0$: Ֆունկցիայի արժեքը մաքսիմումի կետում կոչվում է ***ֆունկցիայի մաքսիմում*** և նշանակվում y_{max}:



ա)

Նկ. 56



բ)

Սահմանում: ***x_0 կետը կոչվում է $y=f(x)$ ֆունկցիայի մինիմումի կետ, եթե գոյություն ունի x_0-ն պարունակող այնպիսի $(a;b)$ միջակայք, որին պատկանող կամայական x-ի համար $f(x_0)\le f(x)$*** (նկ. 56, բ):

Այս դեպքում գրում են $x_{min}=x_0$: Ֆունկցիայի արժեքը մինիմումի կետում կոչվում է ***ֆունկցիայի մինիմում*** և նշանակվում y_{min}:

Ֆունկցիայի մաքսիմումի և մինիմումի կետերն ունեն ընդհանուր անվանում՝ ***էքստրեմումի կետեր***: Իսկ ֆունկցիայի մաքսիմումները և մինիմումները կոչվում են ***ֆունկցիայի էքստրեմումներ***:

Դժվար չէ տեսնել, որ եթե f -ն աճող է որևէ $(a;x_0]$ միջակայքում և նվազող՝ որևէ $[x_0;b)$ միջակայքում, ապա x_0 -ն մաքսիմումի կետ է (նկ. 56, ա): Իսկ եթե f -ը նվազող է որևէ $(a;x_0]$ միջակայքում և աճող՝ որևէ $[x_0;b)$ միջակայքում, ապա x_0 -ն մինիմումի կետ է (նկ. 56, բ):

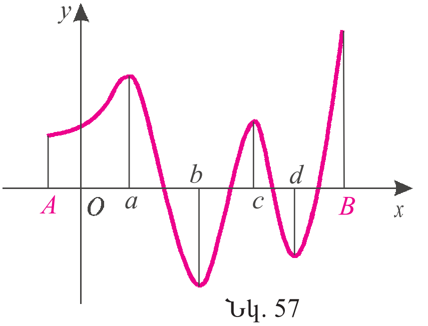
2-րդ օրինակում տեսանք, որ

$$f(x)=\frac{1}{x^4+x^2+5}$$

ֆունկցիան աճող է $(-\infty;0]$ -ում և նվազող՝ $[0;\infty)$-ում: Հետևաբար՝ $x_0=0$ կետը f ֆունկցիայի մաքսիմումի կետ է՝ $x_{\max}=0$: Դժվար չէ տեսնել նաև, որ ֆունկցիան այդ կետում ընդունում է իր մեծագույն արժեքը՝ $f(0)=0{,}2$:

Սակայն պետք չէ կարծել, որ մաքսիմումի կետում ֆունկցիան միշտ ընդունում է իր մեծագույն արժեքը:

57-րդ նկարում պատկերված $[A;B]$ որոշման տիրույթով ֆունկցիայի մաքսիմումի կետերն a -ն և c -ն են: Սակայն իր մեծագույն արժեքը ֆունկցիան ընդունում է ոչ թե այդ կետերում, այլ հատվածի B ծայրակետում: Ֆունկցիայի մինիմումի կետերն են՝ b -ն և d -ն, ընդ որում, b -ում ֆունկցիան ընդունում է իր փոքրագույն արժեքը, իսկ d -ում՝ ոչ:



Նկ. 57

Հատվածում որոշված ֆունկցիան իր մեծագույն (փոքրագույն) արժեքը կարող է ընդունել մաքսիմումի (մինիմումի) կետում կամ հատվածի ծայրակետում:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ե՞րբ են ասում, որ ֆունկցիան X բազմությունում աճող է (նվազող է):
2. Ճի՞շտ է արդյոք, որ եթե ֆունկցիան աճող է X և Y բազմություններում, ապա այն աճող է $X\cup Y$ բազմությունում:
3. Ո՞ր ֆունկցիաներն են կոչվում մոնոտոն:
4. Ո՞ր կետն են անվանում մաքսիմումի (մինիմումի) կետ:
5. Ի՞նչն են անվանում ֆունկցիայի մաքսիմում (մինիմում):

6. Որո՞նք են ֆունկցիայի էքստրեմումի կետերը և որոնք՝ էքստրեմումները:
7. Էքստրեմումի կետում ֆունկցիան ընդունո՞ւմ է արդյոք մեծագույն կամ փոքրագույն արժեք:

Առաջադրանքներ

400. Գտնել f ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքերը, էքստրեմումի կետերը և էքստրեմումները.

ա) $f(x)=2x-5$, բ) $f(x)=4-7x$, գ) $f(x)=2x^2-1$,

դ) $f(x)=3-5x^2$, ե) $f(x)=|x-2|$, զ) $f(x)=\dfrac{2}{1+|x|}$,

է) $f(x)=|5-x|$, ը) $f(x)=\dfrac{1}{|x-1|+1}$, թ) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$:

Գտնել f ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքերը, էքստրեմումի կետերը, մեծագույն և փոքրագույն արժեքները (401-402).

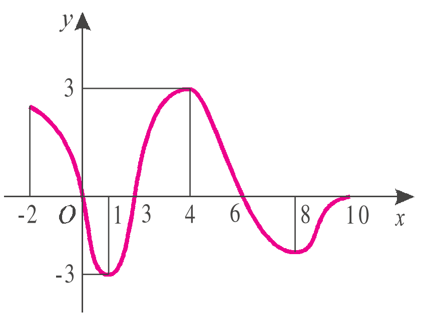
401. ա) $f(x)=-x^2+6x-8$, բ) $f(x)=\dfrac{3}{x-2}$, գ) $f(x)=(x+2)^4+1$,

դ) $f(x)=-(x+3)^5$, ե) $f(x)=\dfrac{3}{x-5}+17$, զ) $f(x)=x^2-4x+5$:

402. ա) $f(x)=-\dfrac{1}{x+3}$, բ) $f(x)=\dfrac{1}{(x-2)^2}+1$, գ) $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)^3}+3$,

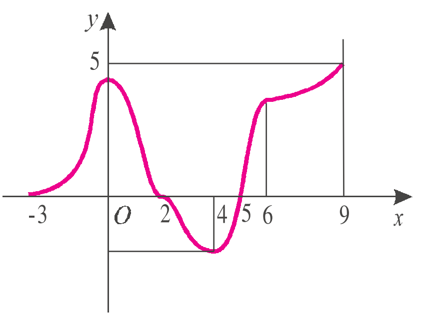
դ) $f(x)=(x-4)^3$, ե) $f(x)=4|x|-x^2$, զ) $f(x)=x^2-2|x|$:

403. Գտնել գրաֆիկորեն տրված ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքերը, էքստրեմումի կետերը, մեծագույն և փոքրագույն արժեքները (նկ. 58).



ա)

Նկ. 58



բ)

404. Դիցուք, f ֆունկցիան աճող է $[a;b]$ և $[b;c]$ միջակայքերում: Ապացուցել, որ՝

ա) կամայական $x_1 \in [a;b]$ և $x_2 \in [b;c]$ կետերի համար $f(x_1)<f(x_2)$,

բ) f ֆունկցիան աճող է $[a;c]$ միջակայքում:

➤**405.** Ապացուցել, որ եթե զույգ ֆունկցիան աճող (նվազող) է $[0;\infty)$ միջակայքում, ապա այն նվազող (աճող) է $(-\infty;0]$-ում:

➤**406.** Ապացուցել, որ եթե կենտ ֆունկցիան աճող (նվազող) է $[0;\infty)$ միջակայքում, ապա այն աճող (նվազող) է $(-\infty;0]$-ում:

➤**407.** Դիցուք, f ֆունկցիան աճող է և $x_1, x_2 \in D(f)$: Ապացուցել, որ եթե $f(x_1) < f(x_2)$, ապա $x_1 < x_2$:

408. Դիցուք, f և g ֆունկցիաներն աճող են: Ապացուցել, որ եթե դիտարկվող ֆունկցիաների որոշման տիրույթները դատարկ չեն, ապա՝

ա) $f(x)+a$ ֆունկցիան աճող է (a-ն որևէ հաստատուն է),

բ) $f+g$ ֆունկցիան աճող է,

գ) եթե $k>0$, ապա $k\cdot f$ ֆունկցիան աճող է,

դ) $-f$ ֆունկցիան նվազող է,

ե) եթե $k<0$, ապա kf ֆունկցիան նվազող է,

զ) եթե f-ի և g-ի արժեքները ոչ բացասական են, ապա $f\cdot g$ ֆունկցիան աճող է,

է) եթե f-ի բոլոր արժեքները դրական են, ապա $\frac{1}{f}$ ֆունկցիան նվազող է:

409. Ապացուցել, որ՝

ա) եթե f և g ֆունկցիաներն աճող են, ապա $f\circ g$ ֆունկցիան նույնպես աճող է,

բ) եթե f և g ֆունկցիաները նվազող են, ապա $f\circ g$ ֆունկցիան աճող է,

գ) եթե f և g ֆունկցիաներից մեկն աճող է, իսկ մյուսը՝ նվազող, ապա $f\circ g$ ֆունկցիան նվազող է:

Համեմատեք թվերի արտադրյալի նշանը որոշելու կանոնի հետ:

410. Ապացուցել, որ $y=kx+b$ գծային ֆունկցիան՝

ա) աճող է, երբ $k>0$, բ) նվազող է, երբ $k<0$:

411. Ապացուցել, որ՝

ա) $f(x)=x^4+3x$ ֆունկցիան $[0;\infty)$ միջակայքում աճող է,

բ) $f(x)=-x^3-2x$ ֆունկցիան նվազող է,

գ) $f(x)=x^6-0{,}5$ ֆունկցիան $(-\infty;0]$ միջակայքում նվազող է,

դ) $f(x)=x^5+1{,}5x$ ֆունկցիան աճող է:

412. Պատկերել այնպիսի ֆունկցիայի գրաֆիկ, որը՝

ա) աճող է $[-7;1]$ միջակայքում, նվազող՝ $[1;5]$-ում,

բ) նվազող է $[-3;0]$ և $[2;4]$ միջակայքերում, աճող՝ $[0;2]$-ում:

➤**413.** Պատկերել այնպիսի ֆունկցիայի գրաֆիկ, որը՝

ա) նվազող է $[0;2]$ և $[5;6]$ միջակայքերում, աճող՝ $[2;5]$-ում, ֆունկցիան զույգ է, բ) աճող է $[-7;-5]$ և $[-3;0]$, նվազող՝ $[-5;-3]$ միջակայքերում, ֆունկցիան կենտ է,

գ) աճող է $[0;1]$ և $[2;3]$ միջակայքերում, նվազող՝ $[1;2]$ և $[3;4]$ միջակայքերում, ֆունկցիան 4-պարբերական է:

414. Պատկերել այնպիսի f ֆունկցիայի գրաֆիկ, որի համար

ա) $x_{\min}=2,\quad x_{\max}=5,\quad f(2)=-1,\quad f(5)=3$,

բ) $x_{\min}=-2,\quad x_{\min}=2,\quad x_{\max}=0,\quad f(-2)=f(2)=-3,\quad f(0)=2$,
ֆունկցիայի փոքրագույն արժեքը -3 է, մեծագույնը՝ 2,

գ) $x_{\min}=1,\quad x_{\max}=-1,\quad x_{\max}=3,\quad f(-1)=4,\quad f(1)=0,\ f(3)=7$,
ֆունկցիայի փոքրագույն արժեքը -4 է, մեծագույնը՝ 7,

դ) $x_{\min}=0,\quad x_{\max}=2,\quad f(0)=0,\quad f(2)=2$,
ֆունկցիայի փոքրագույն արժեքը -1 է, մեծագույնը՝ 3:

Կրկնության համար

415. Մեկ դետալ մշակելու համար առաջին բանվորը ծախսում է երկրորդից 7 ր քիչ ժամանակ: Քանի՞ դետալ կարող է մշակել նրանցից յուրաքանչյուրը 6 ժամում, եթե հայտնի է, որ այդ ընթացքում առաջին բանվորը մշակում է 42 դետալ ավելի, քան երկրորդը:

416. Երկու բրիգադներից յուրաքանչյուրը վերանորոգեց 10 կմ ճանապարհ, թեև երկրորդ բրիգադն առաջինից մեկ օր պակաս աշխատեց: Քանի՞ կմ վերանորոգեց բրիգադներից յուրաքանչյուրը մեկ օրում, եթե նրանք միասին մեկ օրում վերանորոգում են $4{,}5$ կմ:

§10. Ֆունկցիայի հետազոտման ուրվագիծը և գրաֆիկի կառուցումը

Մենք ծանոթացել ենք «մի քանի կետով» ֆունկցիայի գրաֆիկի կառուցման մեթոդին: Այդ մեթոդով գրաֆիկ կառուցելիս հնարավոր է, որ ֆունկցիայի որոշ կարևոր հատկություններ չնկատենք, և կառուցված գրաֆիկը ճիշտ չարտահայտի ֆունկցիայի վարքը: Չէ՞ որ հաշվում էինք $y=f(x)$ ֆունկցիայի արժեքները $x_1<x_2<\cdots<x_n$ կետերում և հարթ կորով միացնում $(x_1;y_1)$, $(x_2;y_2),\cdots,(x_n;y_n)$ կետերը, նույնիսկ չիմանալով՝ մոնոտո՞ն է արդյոք ֆունկցիան $(x_1;x_2)$ միջակայքում:

Նախորդ պարագրաֆներում տեսանք, թե գրաֆիկում ինչպես են դրսևորվում ֆունկցիայի այնպիսի բնութագրիչները, ինչպիսիք են զույգությունը, պարբերականությունը, սահմանափակությունը, մեծագույն և փոքրագույն արժեքները, մոնոտոնության միջակայքերը և էքստրեմումները: Կարևոր է նաև պարզել ֆունկցիայի զրոները և նշանապահպանման միջակայքերը:

f ***ֆունկցիայի զրոներ*** կոչվում են $f(x)=0$ հավասարման լուծումները: Եթե $x_1; x_2; \cdots; x_n$ թվերն f ֆունկցիայի զրոներն են, ապա $(x_1; 0); \cdots; (x_n; 0)$ կետերը ֆունկցիայի գրաֆիկի և աբսցիսների առանցքի հատման կետերն են:

X միջակայքն անվանում են ֆունկցիայի նշանապահպանման միջակայք, եթե այդ միջակայքում ֆունկցիան ընդունում է նույն նշանի արժեքներ:

Դիցուք, $(a; b)$-ն f ֆունկցիայի նշանապահպանման միջակայք է: Այդ դեպքում $(a; b)$ տեղամասում ֆունկցիայի գրաֆիկը կգտնվի աբսցիսների առանցքից վերև, եթե այդ միջակայքում ֆունկցիան ընդունում է դրական արժեքներ և կգտնվի աբսցիսների առանցքից ներքև, եթե ֆունկցիան այդ միջակայքում ընդունում է բացասական արժեքներ:

Ֆունկցիայի հետազոտման ուրվագիծը, որպես կանոն, բաղկացած է հետևյալ քայլերից.

1) ***գտնել ֆունկցիայի որոշման տիրույթը և արժեքների բազմությունը,***
2) ***պարզել՝ ֆունկցիան պարբերակա՞ն է, թե՝ ոչ,***
3) ***պարզել ֆունկցիայի զույգությունը,***
4) ***որոշել ֆունկցիայի գրաֆիկի և կոորդինատային առանցքների հատման կետերը,***
5) ***գտնել ֆունկցիայի նշանապահպանման միջակայքերը,***
6) ***գտնել ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքերը,***
7) ***գտնել ֆունկցիայի էքստրեմումի կետերը և էքստրեմումները,***
8) ***եթե ֆունկցիայի որոշման տիրույթը բաղկացած է մեկ կամ մի քանի միջակայքերից, պարզել ֆունկցիայի վարքն այդ միջակայքերի ծայրակետերին մոտենալիս:***

Օրինակ 1: Հետազոտենք $f(x)=\dfrac{3x}{1+|x|}$ ֆունկցիան:

1) Պարզ է, որ $D(f)=\mathbf{R}$: Դժվար չէ համոզվել, որ $E(f)=(-3; 3)$ (տե՛ս §6, օրինակ 5):

2) Ֆունկցիան պարբերական չէ: Իրոք, եթե T-ն լիներ պարբերություն,

ապա կունենայինք՝ $f(T)=f(0+T)=f(0)=0$, որտեղից՝ $\frac{3T}{1+T}=0$: Հետևաբար՝ $T=0$, որը հակասում է $T\neq 0$ պայմանին:

3) f -ը կենտ ֆունկցիա է: Իրոք՝

$$f(-x)=\frac{-3x}{1+|-x|}=-\frac{3x}{1+|x|}=-f(x):$$

4) Քանի որ $f(0)=0$ և $f(x)\neq 0$, երբ $x\neq 0$, ուրեմն՝ $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը կոորդինատային առանցքների հետ հատվում է միայն $(0;0)$ կետում:

5) Ֆունկցիան ընդունում է դրական արժեքներ դրական x-երի դեպքում և բացասական է, երբ $x<0$:

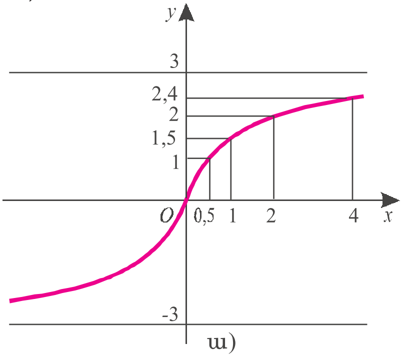
6) Դժվար չէ ստուգել, որ եթե $0<x_1<x_2$, ապա $\frac{3x_1}{1+x_1}<\frac{3x_2}{1+x_2}$: Հետևաբար՝ ֆունկցիան աճող է $[0;\infty)$ միջակայքում: Հաշվի առնելով, որ f -ը կենտ ֆունկցիա է, ստանում ենք, որ այն աճող է $(-\infty;\infty)$-ում:

7) Քանի որ f -ն աճող է ամբողջ թվային առանցքի վրա, ուրեմն՝ այն էքստրեմումի կետեր չունի:

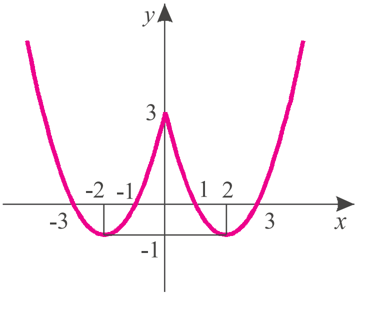
8) Երբ x-ն անվերջ մեծանում է, $f(x)$-ն անվերջ մոտենում է 3 -ին՝ նրանից փոքր մնալով:

Այժմ, հաշվի առնելով f ֆունկցիայի վերը նշված հատկությունները, կառուցենք ֆունկցիայի գրաֆիկը: Մի քանի կետում հաշվենք ֆունկցիայի արժեքները՝ $f(0,5)=1$; $f(1)=1,5$; $f(2)=2$; $f(4)=2,4$:

Հետևաբար՝ $(0,5;1)$, $(1;1,5)$, $(2;2)$ և $(4;2,4)$ կետերը պատկանում են ֆունկցիայի գրաֆիկին: Հաշվի առնելով, որ ֆունկցիան աճող է $[0;\infty)$-ում և ընդունում է 3 -ից փոքր արժեքներ, $[0;\infty)$ տեղամասում ստանում ենք նկ. 59, ա-ում պատկերված գիծը: Ֆունկցիայի գրաֆիկը $(-\infty;0]$ տեղամասում ստանալու համար անհրաժեշտ է $[0;\infty)$ տեղամասում ստացված գիծը համաչափ արտապատկերել $(0;0)$ կետի նկատմամբ:



ա)



բ)

Նկ. 59

Օրինակ 2: Հետազոտենք $f(x)=x^2-4|x|+3$ ֆունկցիան:

Ակնհայտ է, որ $D(f)=\mathbf{R}$: Ֆունկցիան զույգ է, քանի որ

$$f(-x)=(-x)^2-4|-x|+3=x^2-4|x|+3=f(x):$$

Նախ ուսումնասիրենք ֆունկցիան ոչ բացասական x-երի դեպքում: Այդ x-երի համար այն համընկնում է x^2-4x+3 քառակուսային եռանդամին, որի արմատներն են $x_1=1$ և $x_2=3$: Քանի որ $y=x^2-4x+3$ պարաբոլի ճյուղերն ուղղված են վեր և գագաթի աբսցիսն է՝ $x_0=2$, հետևաբար՝ $x_{\min}=2$ և $y_{\min}=f(2)=-1$: Ֆունկցիան նվազող է $[0;2]$ միջակայքում և աճող՝ $[2;\infty)$ միջակայքում: Հաշվի առնելով, որ ֆունկցիան զույգ է և $f(0)=3$, ստանում ենք նկ. 59, բ-ում պատկերված գրաֆիկը: Այսպիսով՝

1) $D(f)=\mathbf{R}$, $E(f)=[-1;+\infty)$,

2) ֆունկցիան պարբերական չէ,

3) ֆունկցիան զույգ է,

4) ֆունկցիայի գրաֆիկը կոորդինատային առանցքների հետ հատվում է $(-3;0)$, $(-1;0)$, $(0;3)$, $(1;0)$ և $(3;0)$ կետերում,

5) ֆունկցիան դրական է $(-\infty;-3)$, $(-1;1)$ և $(3;\infty)$ միջակայքերում, բացասական՝ $(-3;-1)$ և $(1;3)$ միջակայքերում,

6) ֆունկցիան աճող է $[-2;0]$ և $[2;\infty)$ միջակայքերում, նվազող՝ $(-\infty;-2]$ և $[0;2]$ միջակայքերում,

7) էքստրեմումի կետերն են՝ $x_{\min}=-2$, $x_{\min}=2$ և $y_{\min}=-1$; $x_{\max}=0$ և $y_{\max}=3$,

8) ֆունկցիան վերևից սահմանափակ չէ, իսկ փոքրագույն արժեքը -1 է:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ո՞ր կետերն են անվանում ֆունկցիայի զրոներ:
2. Ո՞ր միջակայքերն են անվանում ֆունկցիայի նշանապահպանման միջակայքեր:
3. Ի՞նչ քայլերից է բաղկացած ֆունկցիայի հետազոտման ուրվագիծը:
4. Գրաֆիկում ինչպե՞ս է դրսևորվում ֆունկցիայի պարբերականությունը:
5. Գրաֆիկում ինչպե՞ս է դրսևորվում ֆունկցիայի զույգությունը:
6. Գրաֆիկում ինչպե՞ս են դրսևորվում ֆունկցիայի նշանապահպանման միջակայքերը:

Առաջադրանքներ

Հետազոտել ֆունկցիան և կառուցել նրա գրաֆիկը (417-424).

417. ա) $f(x)=5-3x$, բ) $f(x)=2x-7$, գ) $f(x)=x+8$, դ) $f(x)=-4x-1$:

418. ա) $f(x)=3-x^2-2x$, բ) $f(x)=x^2-3x+2$,

գ) $f(x)=2x^2+x+2$, դ) $f(x)=x-x^2-1$:

419. ա) $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$, բ) $f(x)=\dfrac{1}{x}+2$,

գ) $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$, դ) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x}$:

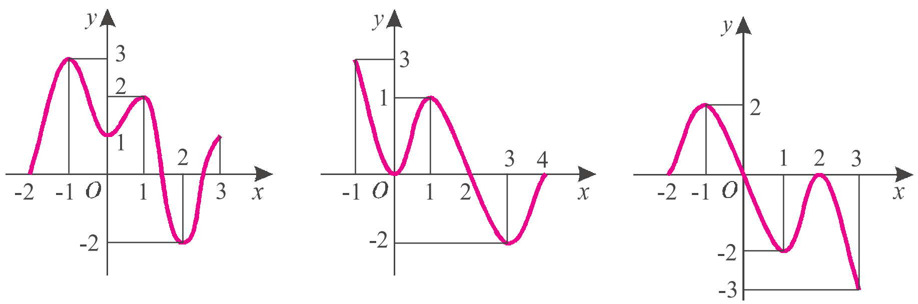
420. ա) $f(x)=|x|-x^2+1$, բ) $f(x)=x^2-2|x|+1$,

գ) $f(x)=x^3+x$, դ) $f(x)=2x^5+3x$:

421. ա) $f(x)=\sqrt{x-3}$, բ) $f(x)=\sqrt{x+1}$,

գ) $f(x)=3-\sqrt{3-x}$, դ) $f(x)=\sqrt{x-4}-2$:

422. Հետազոտել 60-րդ նկարում գրաֆիկորեն տրված ֆունկցիաները:



ա) բ) գ)

Նկ. 60

Կրկնության համար

423. Մանկապարտեզի 25 երեխաներին բաժանեցին 60 խաղալիք, ընդ որում, յուրաքանչյուր աղջկա տվեցին մեկ խաղալիք ավելի, քան յուրաքանչյուր տղայի, իսկ բոլոր աղջիկներն ստացան այնքան խաղալիք, որքան բոլոր տղաները: Քանի՞ աղջիկ և քանի՞ տղա կար մանկապարտեզում:

424. Պապիկն իր 33 թոռներին և ծոռներին բաժանեց 180 խաղալիք այնպես, որ յուռաքանչյուր ծոռ ստացավ մեկ խաղալիք ավելի, քան յուրաքանչյուր թոռ: Քանի՞ թոռ և քանի՞ ծոռ ունի պապիկը, եթե հայտնի է, որ բոլոր ծոռներն ստացան այնքան խաղալիք, որքան բոլոր թոռները:

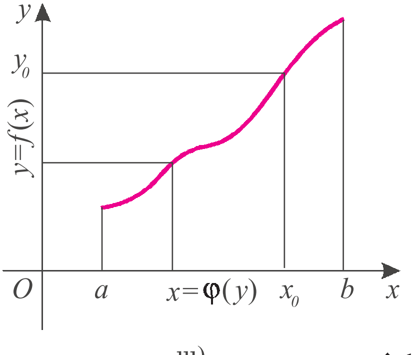
§11. Հակադարձ ֆունկցիան և դրա գրաֆիկը

Դիտարկենք D բազմությունում որոշված $y=f(x)$ ֆունկցիան, որի արժեքների տիրույթը E-ն է: Նշանակում է՝ E բազմությանը պատկանող կամայական y_0 կետի համար գոյություն ունի այնպիսի x_0 կետ D բազմությունից, որ

$$f(x_0)=y_0: \qquad (1)$$

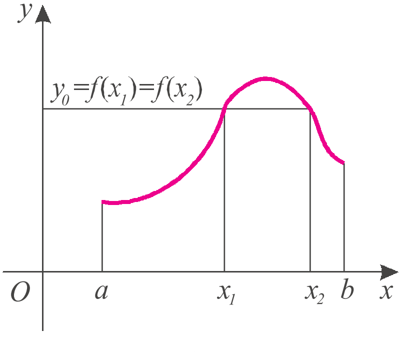
Եթե f ֆունկցիան D բազմության տարբեր կետերում ընդունում է տարբեր արժեքներ, ապա (1) հավասարմանը բավարարող x_0 կետը կլինի միակը: Այս դեպքում կասենք, որ f ***ֆունկցիան փոխմիարժեք է*** D ***բազմությունում***:

Նկ. 61-ում բերված են $[a,b]$ հատվածի վրա որոշված երկու ֆունկցիաների գրաֆիկներ, որոնցից առաջինը փոխմիարժեք է, իսկ երկրորդը՝ ոչ, քանի որ երկրորդ ֆունկցիան x_1 և x_2 տարբեր կետերում ընդունում է միևնույն արժեքը՝ $f(x_1)=f(x_2)=y_0$: Փոխմիարժեք ֆունկցիայի գրաֆիկն աբսցիսների առանցքին զուգահեռ կամայական ուղղի հետ կամ չի հատվում, կամ հատվում է մի կետում:



ա)

Նկ. 61



բ)

Փոխմիարժեք ֆունկցիայի օրինակ է $f(x)=x^3$ ֆունկցիան: Իրոք, կամայական y-ի համար $x^3=y$ հավասարումն ունի միակ լուծում՝ $x=\sqrt[3]{y}$:

Իսկ ահա $f(x)=x^2$ ֆունկցիան փոխմիարժեք չէ, քանի որ դրական y-ների դեպքում $x^2=y$ հավասարումն ունի երկու լուծում՝ $x=\sqrt{y}$ և $x=-\sqrt{y}$:

Եթե f-ը փոխմիարժեք է, ապա E բազմության յուրաքանչյուր y_0 կետի (1) բանաձևով կհամապատասխանի մի որոշակի x_0 թիվ D-ից, և կունենանք

E բազմության վրա որոշված φ ֆունկցիա, որը կանվանենք f-ի ***հակադարձ ֆունկցիա***:

Հակադարձ ֆունկցիայի արժեքը E բազմության y կետում հավասար է այն x թվին D-ից, որի համար $f(x)=y$, այսինքն՝ (տե՛ս նկ. 61, ա)՝

$$\varphi(y)=\varphi(f(x))=x:$$

Եթե ֆունկցիան ունի հակադարձ, այն անվանում են ***հակադարձելի***:

Հեշտ է տեսնել, որ այս դեպքում φ ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը D-ն է և f ֆունկցիան, իր հերթին, φ ֆունկցիայի հակադարձն է, այսինքն՝ $f(\varphi(y))=y$ կամայական y կետի համար E բազմությունից: Ուստի այս դեպքում ասում են նաև, որ f և φ ֆունկցիաները ***փոխհակադարձ*** են:

Փոխհակադարձ ֆունկցիաներից մեկի որոշման տիրույթը մյուսի արժեքների բազմությունն է:

Իհարկե, ոչ բոլոր ֆունկցիաներն են, որ ունեն հակադարձ:

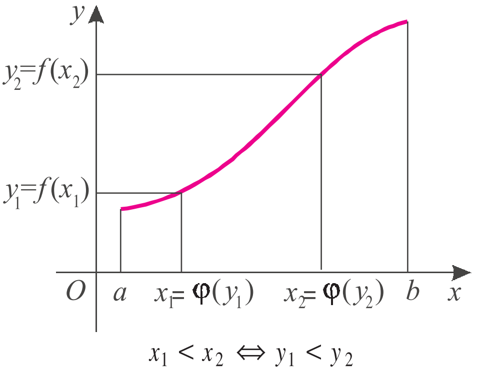
D բազմությունում տրված ֆունկցիան հակադարձելի է այն և միայն այն դեպքում, երբ այն փոխմիարժեք է այդ բազմությունում:

Ապացուցենք, որ

յուրաքանչյուր մոնոտոն ֆունկցիա փոխմիարժեք է և, հետևաբար, հակադարձելի:
Եթե ֆունկցիան աճող (նվազող) է, ապա նրա հակադարձ ֆունկցիան ևս աճող (նվազող) է:

Իրոք, եթե f ֆունկցիան աճող է, ապա այն x-ի մեծ արժեքին համապատասխանեցնում է y-ի մեծ արժեք, և չի կարող երկու տարբեր կետերում ընդունել միևնույն արժեքը: Այսինքն՝ f ֆունկցիան փոխմիարժեք է և, հետևաբար, ունի հակադարձ φ ֆունկցիա:

Համոզվելու համար, որ φ ֆունկցիան ևս աճող է, բավական է նկատել, որ եթե f ֆունկցիան x-ի մեծ արժեքին համապատասխանեցնում է y-ի մեծ արժեք, ապա φ ֆունկցիան էլ y-ի մեծ արժեքին կհամապատասխանեցնի x-ի մեծ արժեք (նկ. 62):



$x_1 < x_2 \Leftrightarrow y_1 < y_2$

Նկ. 62

Օրինակ 1: $y=x^2$, $x\in(0;2)$ ֆունկցիան աճող է: Նրա արժեքների բազմությունը $(0,4)$ միջակայքն է: Հետևաբար՝ այն ունի հակադարձ՝ որոշված $(0,4)$ միջակայքում: Հակադարձ ֆունկցիայի արժեքը $(0,4)$ միջակայքի որևէ y կետում հավասար է այն x թվին $(0,2)$ միջակայքից, որը բավարարում է $x^2=y$ հավասարմանը: Այդ թիվը $\sqrt{y}$-ն է, հետևաբար՝ $x=\sqrt{y}$: Այսպիսով՝ $(0,4)$ միջակայքում տրված $y=x^2$ ֆունկցիայի հակադարձը $x=\sqrt{y}$, $y\in(0;4)$ ֆունկցիան է:

Նկատենք, որ հակադարձ ֆունկցիայի $x=\sqrt{y}$ բանաձևում անկախ փոփոխականն y-ն է, իսկ կախյալը՝ x-ը: Քանի որ որևէ ֆունկցիայի անկախ փոփոխականը սովորաբար նշանակվում է x, իսկ կախյալ փոփոխականը՝ y, ընդունված է ասել, որ $y=x^2$ ֆունկցիայի հակադարձը $y=\sqrt{x}$ ֆունկցիան է:

Ամփոփելով, կարող ենք ասել՝

f փոխմիարժեք ֆունկցիայի հակադարձ ֆունկցիան գտնելու համար անհրաժեշտ է.

ա) $y=f(x)$ հավասարումից x-ն արտահայտել y-ով,

բ) ստացված բանաձևում փոխել x-ի և y-ի տեղերը:

Օրինակ 2: Դիտարկենք $y=x^2$, $x\in(-2,0)$ ֆունկցիան:

Ֆունկցիայի արժեքների բազմությունն է $(0,4)$ միջակայքը, որին պատկանող յուրաքանչյուր y-ի համար $y=x^2$ հավասարումն ունի $(-2,0)$ միջակայքին պատկանող միակ արմատ՝ $x=-\sqrt{y}$: Հետևաբար՝ տրված ֆունկցիայի հակադարձը $y=-\sqrt{x}$, $x\in(0;4)$ ֆունկցիան է՝ որոշված $(0,4)$ միջակայքում:

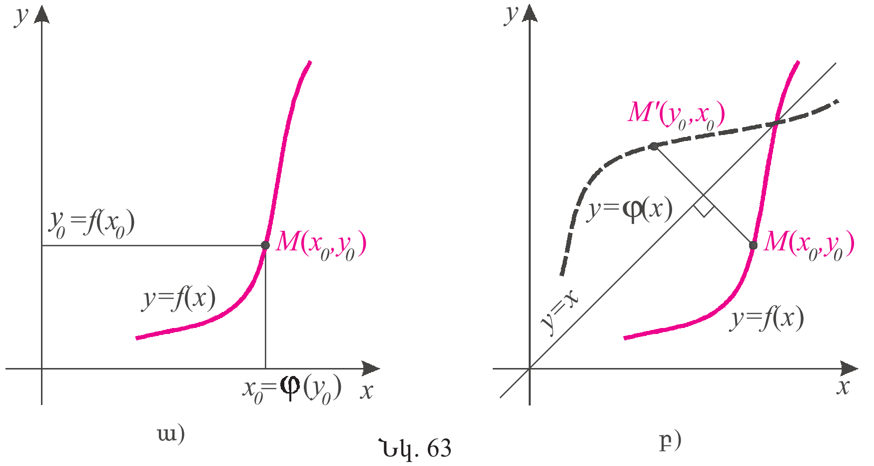
Օրինակ 3: Դիտարկենք $f(x)=x^2$, $x\in(-2,2)$ ֆունկցիան:

Ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը $[0,4)$ միջակայքն է, և $(0,4)$-ին պատկանող յուրաքանչյուր y-ի համար $y=x^2$ հավասարումն ունի $(-2,2)$ միջակայքին պատկանող երկու արմատ՝ $x_1=\sqrt{y}$ և $x_2=-\sqrt{y}$: Ֆունկցիան հակադարձելի չէ:

Օրինակ 4: $y=1/x$ ֆունկցիայի և՛ որոշման, և՛ արժեքների տիրույթը $(-\infty,0)\bigcup(0,\infty)$ բազմությունն է: Հակադարձ ֆունկցիան գտնելու համար $y=1/x$ հավասարումից գտնում ենք x-ը՝ $x=1/y$: Փոխելով x-ի և y-ի տեղերը՝ ստանում ենք $y=1/x$: Նշանակում է՝ $y=1/x$ ֆունկցիայի հակադարձը $y=1/x$ ֆունկցիան է:

Այս օրինակը ցույց է տալիս, որ կան ֆունկցիաներ, որոնք համընկնում են իրենց հակադարձին: Այդպիսի մեկ այլ օրինակ է $f(x) = x$ ֆունկցիան:

Այժմ դիտարկենք D բազմությունում որոշված և E արժեքների բազմություն ունեցող f փոխմիարժեք ֆունկցիան, որի գրաֆիկը պատկերված է



Նկ. 63

նկ. 63, ա-ում: Այդ գրաֆիկին պատկանող կամայական $M(x_0, y_0)$ կետի համար տեղի ունի

$$y_0 = f(x_0)$$

հավասարությունը: Այդ դեպքում f-ի հակադարձ φ ֆունկցիան կբավարարի

$$\varphi(y_0) = x_0$$

հավասարությանը, և կարող ենք համարել, որ f ֆունկցիայի գրաֆիկը նաև φ ֆունկցիայի գրաֆիկն է: Նկատենք, որ φ ֆունկցիայի որոշման տիրույթը՝ E-ն, տեղադրված է ոչ թե աբսցիսների, այլ օրդինատների առանցքի վրա, իսկ արժեքների տիրույթը՝ D-ն, աբսցիսների առանցքի վրա է: Այժմ «փոխենք x-ի և y-ի տեղերը», այսինքն՝ որոշման տիրույթը տեղափոխենք աբսցիսների առանցք և կառուցենք $y = \varphi(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը՝ օգտվելով $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկից:

Ենթադրենք, $M(x_0, y_0)$ կետը պատկանում է $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկին (նկ.63, բ), այսինքն՝ $y_0 = f(x_0)$: Այդ դեպքում, համաձայն հակադարձ ֆունկցիայի սահմանման, $\varphi(y_0) = x_0$, իսկ սա նշանակում է, որ $M'(y_0; x_0)$ կետը պատկանում է $y = \varphi(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկին: Հեշտ է տեսնել, որ $M(x_0, y_0)$ և $M'(y_0; x_0)$ կետերը համաչափ են $y = x$ ուղղի նկատմամբ: Նույն ձևով կարող ենք ցույց տալ, որ $y = \varphi(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի կամայական կետի համաչափը $y = x$ ուղղի նկատմամբ պատկանում է $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկին:

Այսպիսով, ստացանք՝

փոխմիարժեք ֆունկցիայի և նրա հակադարձ ֆունկցիայի գրաֆիկները համաչափ են $y = x$ ուղղի նկատմամբ:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ո՞ր ֆունկցիան է կոչվում փոխմիարժեք:
2. Ի՞նչ է հակադարձ ֆունկցիան, և ո՞ր ֆունկցիաներն ունեն հակադարձ:
3. Բերել հակադարձելի և ոչ հակադարձելի ֆունկցիաների օրինակներ:
4. Որո՞նք են f ֆունկցիայի հակադարձ ֆունկցիայի որոշման տիրույթը և արժեքների բազմությունը:
5. Ինչպե՞ս են գտնում f ֆունկցիայի հակադարձ ֆունկցիան:
6. Ի՞նչ կապ կա ֆունկցիայի և իր հակադարձի գրաֆիկների միջև:

Առաջադրանքներ

Գտնել ֆունկցիայի հակադարձը (425-426).

425. ա) $y = 2x + 5$, բ) $y = x^3$, գ) $y = \sqrt[3]{x}$, դ) $y = \sqrt{5x - 2}$:

426. ա) $y = \dfrac{x-10}{3}$, $x \in (0;1)$, բ) $y = \dfrac{1}{x^2}$, $x \in (0;\infty)$,

գ) $y = x^4$, $x \in (0;\infty)$, դ) $y = x^4$, $x \in (-\infty;0)$:

427. Դիցուք, φ ֆունկցիան (a,b) միջակայքում տրված f ֆունկցիայի հակադարձն է: Գտնել $\varphi(t_0)$-ն, եթե՝

ա) $f(x) = x^2 - 5x + 6$, $(a,b) = (3;\ 5)$, $t_0 = 2$,

բ) $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $(a,b) = (-\infty;\ 1)$, $t_0 = 3$,

գ) $f(x) = |2x + 3|$, $(a,b) = (0;\ 10)$, $t_0 = 7$:

* **428.** Դիցուք, φ-ն ամբողջ թվային առանցքի վրա որոշված f ֆունկցիայի հակադարձն է: Գտնել g ֆունկցիայի հակադարձը, եթե՝

ա) $g(x) = -f(x)$, բ) $g(x) = 2f(x)$, գ) $g(x) = f^3(x)$,

դ) $g(x) = f(-x)$, ե) $g(x) = f(3x)$, զ) $g(x) = f(x+1)$:

429. x-ի ո՞ր արժեքների համար է հավասարությունը ճիշտ.

ա) $\left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = x$, բ) $\sqrt[3]{x^3} = x$, գ) $\left(x^{1/2}\right)^2 = x$,

դ) $\left(\sqrt[4]{x}\right)^4 = x$, ե) $\sqrt[4]{x^4} = x$, զ) $\sqrt[4]{x^4} = -x$:

➢**430.** Ապացուցել, որ՝

ա) f զույգ ֆունկցիան հակադարձելի չէ, եթե $D(f)\neq\{0\}$,

բ) հակադարձելի կենտ ֆունկցիայի հակադարձը կենտ ֆունկցիա է:

431. Ապացուցել, որ $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ կոտորակագծային ֆունկցիան հակադարձելի է և նրա հակադարձը նույնպես կոտորակագծային ֆունկցիա է $(c\neq 0,\ ad\neq bc)$:

432. Պարտադի՞ր է արդյոք, որ հակադարձելի ֆունկցիան լինի մոնոտոն:

433. Կառուցել ֆունկցիայի և իր հակադարձի գրաֆիկները.

ա) $y=x^2,\ x\in(0;3)$,

բ) $y=x^2,\ x\in(-3;0)$,

գ) $y=-(x+1)^2,\ x\in(0;2)$,

դ) $y=x^3,\ x\in(-2;\ 2)$,

ե) $y=2x^3+1,\ x\in(-1;3)$,

զ) $y=\dfrac{1}{x-3},\ x\in(3;\ 7)$:

* **434.** Ինչպիսի՞ն է այն ֆունկցիայի գրաֆիկը, որը համընկնում է իր հակադարձին: Բերել օրինակներ:

Կրկնության համար

➢**435.** Երեք թվեր, որոնց գումարը 12 է, կազմում են թվաբանական պրոգրեսիա: Եթե երրորդ թիվը փոխարինենք 8-ով, ապա կստացվի երկրաչափական պրոգրեսիա: Գտնել այդ թվերը:

➢**436.** Գտնել x-ի այն արժեքը, որի դեպքում $x,\ 3x+1,\ 12x+0{,}5$ թվերը կազմում են երկրաչափական պրոգրեսիա:

➢**437.** Ապացուցել, որ $\sqrt[6]{18},\ \dfrac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[6]{8}},\ \left(\dfrac{3}{2}\right)^{5/6}$ թվերը որևէ երկրաչափական պրոգրեսիայի առաջին, երրորդ և չորրորդ անդամներ են:

4-րդ ԳԼՈՒԽ

Թվային արգումենտի եռանկյունաչափական ֆունկցիաներ և եռանկյունաչափական հավասարումներ

§1. Սինուս և կոսինուս ֆունկցիաների հատկություններն ու գրաֆիկները

$y = \sin x$ ֆունկցիան: Դիտարկենք $y = \sin x$ ֆունկցիան, որի արժեքն x կետում x ռադիան պտտման անկյան սինուսն է: Արդեն գիտենք, որ՝

1) ***սինուսի որոշման տիրույթն ամբողջ թվային առանցքն է, իսկ արժեքների բազմությունը՝*** $[-1;1]$ ***հատված՝*** $D(\sin) = \mathbf{R}$ ***և*** $E(\sin) = [-1;1]$,

2) ***սինուսը կենտ և*** 2π***-պարբերական ֆունկցիա է,***

3) $\sin x = 0$, ***երբ*** $x = \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$***:***

Քանի որ սինուսը դրական է I և II քառորդներում և բացասական՝ III և IV քառորդներում, հետևաբար՝

4) $\sin x > 0$, ***երբ*** $x \in (2\pi k;\ \pi + 2\pi k)$, $k \in \mathbf{Z}$,

$\sin x < 0$, ***երբ*** $x \in (\pi + 2\pi k;\ 2\pi + 2\pi k)$, $k \in \mathbf{Z}$,

5) ***սինուսի մեծագույն արժեքը*** 1 ***է,*** **ընդ որում,**

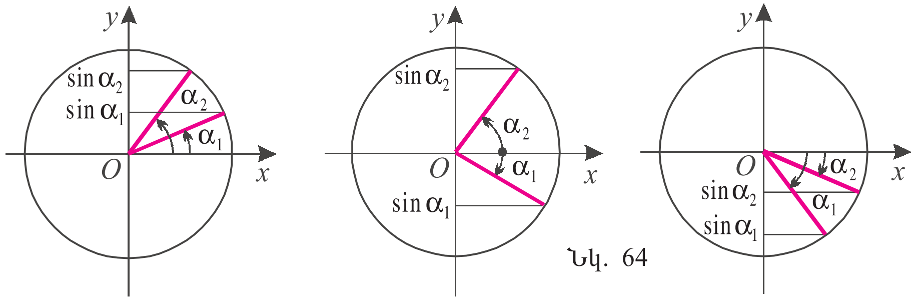
$$\sin x = 1,\ \text{երբ}\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z},$$

6) ***սինուսի փոքրագույն արժեքը*** -1 ***է,*** **ընդ որում,**

$$\sin x = -1,\ \text{երբ}\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}:$$

Այժմ պարզենք սինուսի մոնոտոնության միջակայքերն ու էքստրեմումները: Եթե α_1 և α_2 թվերը պատկանում են $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ միջակայքին և $\alpha_1 < \alpha_2$, ապա $\sin\alpha_1 < \sin\alpha_2$ (նկ. 64):

Հետևաբար՝ $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ միջակայքում սինուսն աճող է: Հաշվի առնելով, որ սինուսը



Նկ. 64

2π -պարբերական ֆունկցիա է, ստանում ենք՝

7) *սինուսն աճող է* $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{\pi}{2}+2\pi k\right]$, $k \in \mathbf{Z}$, *միջակայքերում:*

Նման ձևով կստանանք՝

8) *սինուսը նվազող է* $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right]$, $k \in \mathbf{Z}$, *միջակայքերում:*

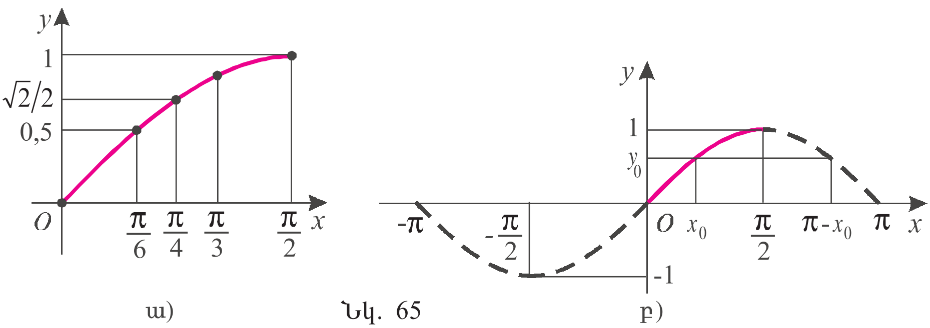
Սինուսի 5-րդ և 6-րդ հատկություններից հետևում է, որ $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$ կետերը էքստրեմումի կետեր են: Իսկ 7-րդ և 8-րդ հատկություններից հետևում է, որ սինուսն ուրիշ էքստրեմումի կետեր չունի:

Այժմ կառուցենք $y=\sin x$ ֆունկցիայի գրաֆիկը: Քանի որ $\sin 0=0$, $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$, $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ և $\sin\frac{\pi}{2}=1$, ուստի հետևյալ կետերը պատկանում են սինուսի գրաֆիկին.

$$(0;0),\quad \left(\frac{\pi}{6};\frac{1}{2}\right),\quad \left(\frac{\pi}{4};\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\quad \left(\frac{\pi}{3};\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\quad \left(\frac{\pi}{2};1\right):$$

Այս կետերը միացնելով՝ կստանանք սինուսի գրաֆիկը $[0;\pi/2]$ տեղամասում (նկ. 65, ա):

Ենթադրենք, $(x_0;y_0)$ կետը պատկանում է սինուսի գրաֆիկին: Այդ դեպքում, համաձայն բերման բանաձևի,

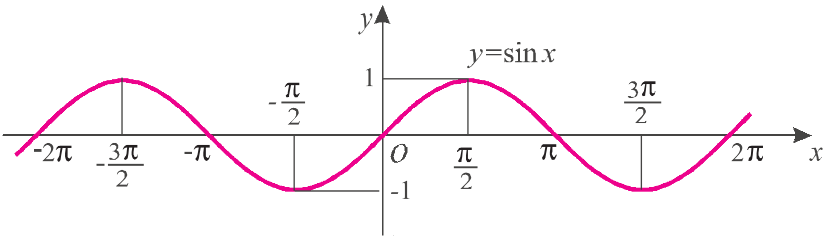


ա) Նկ. 65 բ)

$$y_0 = \sin x_0 = \sin(\pi - x_0),$$

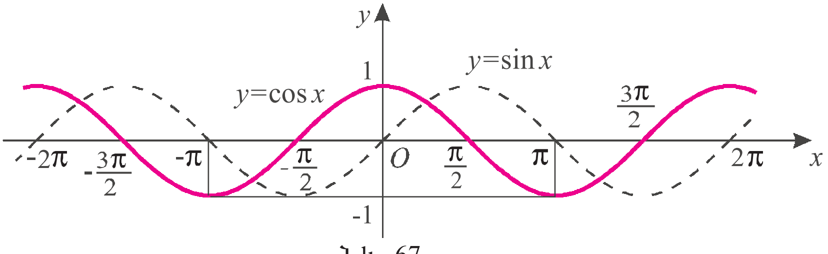
այսինքն՝ սինուսի գրաֆիկին պատկանում է նաև $(\pi - x_0; y_0)$ կետը: Քանի որ թվային առանցքի վրա x_0 և $\pi - x_0$ կետերը համաչափ են $\pi/2$ կետի նկատմամբ, ուրեմն կոորդինատային հարթության $(x_0; y_0)$ և $(\pi - x_0; y_0)$ կետերը համաչափ են $x = \pi/2$ ուղղի նկատմամբ (նկ. 65, բ): Նշանակում է՝ սինուսի գրաֆիկը համաչափ է այդ ուղղի նկատմամբ: Հետևաբար՝ նկ. 65, ա-ում պատկերված գրաֆիկը համաչափ արտապատկերելով $x = \pi/2$ ուղղի նկատմամբ, կստանանք սինուսի գրաֆիկը $[\pi/2; \pi]$ տեղամասում (նկ. 65, բ):

Քանի որ սինուսը կենտ ֆունկցիա է, ուրեմն նրա գրաֆիկը $[-\pi; 0]$ տեղամասում ստանալու համար անհրաժեշտ է $[0; \pi]$ տեղամասում ստացածը համաչափ արտապատկերել O կետի նկատմամբ (նկ. 65, բ): Հաշվի առնելով, որ սինուսը 2π-պարբերական ֆունկցիա է, $[-\pi + 2\pi k; \pi + 2\pi k]$, $k \in \mathbf{Z}$, տեղամասերում նրա գրաֆիկը ստանալու համար անհրաժեշտ է $[-\pi; \pi]$ տեղամասում ստացված պատկերը $2\pi k$-ով տեղաշարժել աբսցիսների առանցքի երկայնքով (նկ. 66):



Նկ. 66

$y = \cos x$ ֆունկցիան: Նման ձևով կարելի է կառուցել կոսինուսի գրաֆիկը: Սակայն այն կարելի է կառուցել նաև՝ ելնելով $y = \sin x$ ֆունկցիայի գրաֆիկից: Համաձայն բերման բանաձևի՝ $\cos x = \sin(\pi/2 + x)$: Հետևաբար՝ $y = \cos x$ ֆունկցիայի գրաֆիկը կստացվի $y = \sin x$ ֆունկցիայի գրաֆիկը $\frac{\pi}{2}$ միավորով ձախ տեղաշարժելով (նկ. 67):



Նկ. 67

Թվարկենք կոսինուսի հատկությունները.

1) ***կոսինուսի որոշման տիրույթն ամբողջ թվային առանցքն է, իսկ արժեքների բազմությունը՝*** $[-1;1]$ ***հատվածը՝***

$$D(\cos)=\mathrm{R}, \ E(\cos)=[-1;1],$$

2) ***կոսինուսը զույգ և*** 2π ***-պարբերական ֆունկցիա է,***

3) $\cos x=0$, ***երբ*** $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in \mathrm{Z}$,

4) $\cos x>0$, ***երբ*** $x\in(-\pi/2+2\pi k;\pi/2+2\pi k)$, $k\in \mathrm{Z}$,

$\cos x<0$, ***երբ*** $x\in(\pi/2+2\pi k;3\pi/2+2\pi k)$, $k\in \mathrm{Z}$,

5) ***կոսինուսի մեծագույն արժեքը*** 1 ***է, ընդ որում՝***

$$\cos x=1, \text{ երբ } x=2\pi k, \ k\in \mathrm{Z},$$

6) ***կոսինուսի փոքրագույն արժեքը*** -1 ***է, ընդ որում՝***

$$\cos x=-1, \text{ երբ } x=\pi+2\pi k, \ k\in \mathrm{Z},$$

7) ***կոսինուսն աճող է*** $[-\pi+2\pi k;2\pi k]$, $k\in \mathrm{Z}$, ***միջակայքերում,***

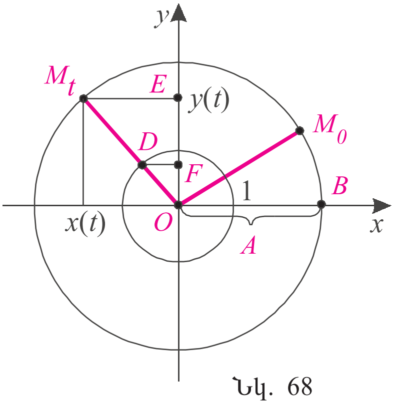
8) ***կոսինուսը նվազող է*** $[2\pi k;\pi+2\pi k]$, $k\in \mathrm{Z}$, ***միջակայքերում:***

Ներդաշնակ տատանումներ: Բնության մեջ և տեխնիկայում բազմաթիվ երևույթներ ունեն պարբերական բնույթ, այսինքն՝ որոշակի ժամանակահատվածից հետո կրկնվում է արդեն կատարվածը: Օրինակ՝ երկրագնդի՝ իր առանցքի շուրջը պտույտի հետևանքով իրար են հաջորդում գիշերն ու ցերեկը, իսկ արեգակի շուրջը պտույտի հետևանքով ամեն տարի փոխվում են տարվա եղանակները:Ներքին այրման շարժիչի մխոցները, պարբերաբար շարժվելով, շարժման մեջ են դնում մեքենայի անիվները, որոնք էլ, իրենց հերթին, կատարելով պարբերական շարժում իրենց առանցքների շուրջը, մեքենան առաջ են մղում: Պարբերական շարժում է կատարում նաև ճոճանակը:

Պարբերական երևույթների նկարագրման և ուսումնասիրման համար բացառիկ նշանակություն ունեն սինուս և կոսինուս ֆունկցիաները: Բերենք մեկ օրինակ:

Դիցուք, նյութական կետն ω հաստատուն անկյունային արագությամբ շարժվում է A շառավղով շրջանագծի վրայով, այսինքն՝ միավոր ժամանակում կետը գծում է ω ռադիան աղեղ: Ենթադրենք, այդ շրջանագծի կենտրոնը կոորդինատային հարթության սկզբնակետում է, և ժամանակի $t=0$ պահին կետը M_0 դիրքում է (նկ. 68): Ժամանակի t պահին շրջանագծի վրա նյութական կետի դիրքը նշանակենք M_t-ով, իսկ M_t-ի աբսցիսը և օրդինատը համապատասխանաբար $x(t)$ և $y(t)$:

Գտնենք $x(t)$-ի և $y(t)$-ի փոփոխման օրենքը: Քանի որ կետը շարժվում է ω անկյունային արագությամբ, ուրեմն t ժամանակահատվածում այն կպտտվի ωt ռադիանով: Ենթադրենք՝ $\angle M_0OB=\varphi$: Այդ դեպքում OB շառավիղը $\omega t+\varphi$ ռադիանով պտտելիս կհայտնվի OM_t դիրքում: Հետևաբար՝ OM_t շառավղի և միավոր շրջանագծի հատման D կետի աբսցիսն ու օրդինատը համապատասխանաբար կլինեն $\cos(\omega t+\varphi)$ և $\sin(\omega t+\varphi)$: Օգտվելով ODF և OM_tE եռանկյունների նմանությունից՝ ստանում ենք՝



Նկ. 68

$$\text{ա)}\ x(t)=A\cos(\omega t+\varphi),\qquad \text{բ)}\ y(t)=A\sin(\omega t+\varphi): \qquad (1)$$

Երբ կետը պտտվում է շրջանագծով, նրա պրոյեկցիան աբսցիսների առանցքի վրա տատանվում է այդ առանցքի $[-A;A]$ հատվածում: Ընդ որում, այդ պրոյեկցիայի շարժումը տրվում է (1, ա) բանաձևով:

Հանգունորեն շրջանագծով շարժվող կետի պրոյեկցիան օրդինատների առանցքի վրա կատարում է տատանումներ՝ շարժվելով ըստ (1, բ) բանաձևի: Նման տատանումները կոչվում են ներդաշնակ տատանումներ:

Ներդաշնակ փոփոխումներ են կոչվում (1, ա) կամ (1, բ) օրենքներով կատարվող շարժումները:

A թիվն անվանում են ներդաշնակ տատանման ***ամպլիտուդ*** (ցույց է տալիս աբսցիսների առանցքի վրա կետի պրոյեկցիայի առավելագույն շեղումը միջին դիրքից):

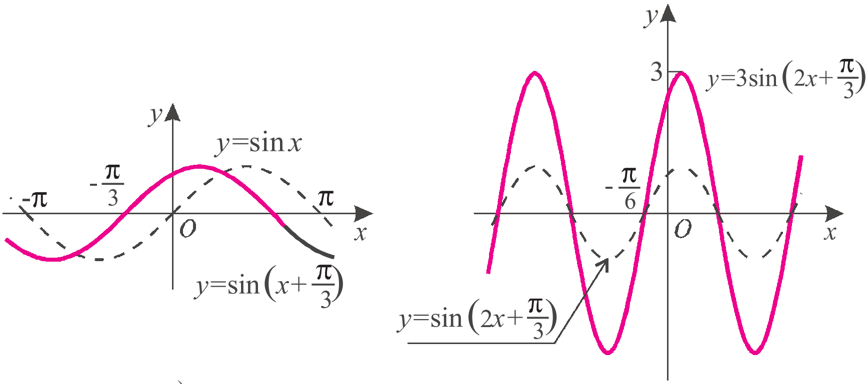
ω-ն կոչվում է ***անկյունային հաճախականություն***. ցույց է տալիս, թե քանի լրիվ տատանում է կատարում կետի պրոյեկցիան 2π միավոր ժամանակում: Իրոք, քանի որ միավոր ժամանակում կետը գծում է ω ռադիան աղեղ, ապա 2π միավոր ժամանակում այն կգծի $2\pi\cdot\omega$ ռադիան աղեղ, այսինքն՝ կետը կկատարի ω լրիվ պտույտ, իսկ կետի պրոյեկցիան կկատարի ω տատանում:

φ թիվը որոշում է կետի սկզբնական դիրքը ($t=0$ պահին) և կոչվում է ***սկզբնական փուլ***:

Այժմ համոզվենք, որ (1, ա)-ն ու (1, բ)-ն, ըստ էության, նույն կանոնն են: Իրոք՝

$$x(t)=A\cos(\omega t+\varphi)=A\sin\left(\omega t+\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)\right):$$

Այսինքն՝ (1, ա)-ն (1, բ)-ից տարբերվում է միայն սկզբնական փուլով:



ա)

Նկ. 69

բ)

Ներդաշնակ տատանման գրաֆիկն անվանում են ***սինուսոիդ***: Մասնավորապես, սինուսոիդ են սինուս և կոսինուս ֆունկցիաների գրաֆիկները:

Կառուցենք $y=-3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ սինուսոիդը:

Այն կարելի է ստանալ, կատարելով հետևյալ քայլերը՝

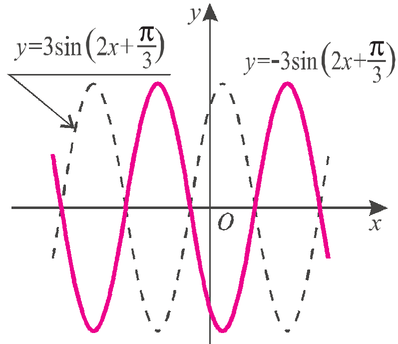
1) կառուցել $y=\sin x$ ֆունկցիայի գրաֆիկը (նկ. 69, ա),

2) այն $\frac{\pi}{3}$ միավորով տեղաշարժել ձախ (կստացվի $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը), (նկ. 69, ա),

3) ստացված պատկերը 2 անգամ սեղմել աբսցիսների առանցքի երկայնքով (կստացվի $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը), (նկ. 69, բ),

4) ստացված պատկերը 3 անգամ ձգել օրդինատների առանցքի երկայնքով (կստացվի $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը), (նկ. 69, բ),

5) ստացված պատկերը համաչափ արտապատկերել աբսցիսների առանցքի նկատմամբ (նկ. 70):



Նկ. 70

Հակացե՞լ եք դասը

1. Թվարկեք սինուսի հատկությունները և կառուցեք գրաֆիկը:
2. Ելնելով սինուսի գրաֆիկից՝ ստացեք կոսինուսի գրաֆիկը:
3. Թվարկեք կոսինուսի հատկությունները:
4. Ո՞րն է ներդաշնակ տատանման օրենքը:
5. Որո՞նք են ներդաշնակ տատանման ամպլիտուդը, անկյունային հաճախականությունը և սկզբնական փուլը:
6. Ի՞նչն են անվանում սինուսոիդ:

Առաջադրանքներ

Գտնել ֆունկցիայի որոշման տիրույթը (438-439).

438. ա) $f(x)=\dfrac{1}{\sin x}$, բ) $f(x)=\dfrac{1}{1-\sin x}$, գ) $f(x)=\dfrac{2}{\cos x}$,

դ) $f(x)=\dfrac{1}{\cos x-1}$, ե) $f(x)=\dfrac{7}{\sin x+1}$, զ) $f(x)=-\dfrac{5}{\cos x+1}$:

439. ա) $f(x)=5\sqrt{\sin x}$, բ) $f(x)=\sqrt{-\cos x}+3$, գ) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\cos x}}$,

դ) $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{-\sin x}}$, ➢ե) $f(x)=\sqrt{\sin x\cos x}$, ➢զ) $f(x)=\sqrt{\cos^2 x-\sin^2 x}$:

Դասավորել աճման կարգով (440-441).

440. ա) $\sin 15^\circ$, $\sin(-15^\circ)$, $\sin 75^\circ$, բ) $\cos 22^\circ$, $\cos 75^\circ$, $\cos 145^\circ$,

գ) $\cos\left(-\dfrac{\pi}{13}\right)$, $\cos\left(-\dfrac{\pi}{9}\right)$, $\cos\dfrac{7\pi}{5}$, դ) $\sin\dfrac{5\pi}{3}$, $\sin\dfrac{4\pi}{3}$, $\sin\dfrac{\pi}{5}$:

* **441.** ա) $\sin(-1)$, $\sin 1$, $\sin 2$, բ) $\cos 2$, $\cos 3$, $\cos 1$,

գ) $\cos 3{,}5$, $\cos 6$, $\cos 5$, դ) $\sin 2$, $\sin 4$, $\sin 2{,}5$:

442. Գտնել ֆունկցիայի էքստրեմումի կետերը և էքստրեմումները.

ա) $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$, բ) $f(x)=\cos 2x$,

գ) $f(x)=1-\sin x$, դ) $y=\sin^2 x$:

Գտնել ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները (443-444).

443. ա) $y=\sin x-1$, բ) $y=\cos x+1$,

գ) $y=2-3\cos x$, դ) $y=4+5\sin x$:

➢**444.** ա) $y=\sin^2 x+3\sin x-4$, բ) $y=2\sin^2 x-3\sin x-5$,

գ) $y=3\cos^2 x-6\cos x$, դ) $y=5\sin^2 x-2$:

Ձևափոխելով $y=\sin x$ կամ $y=\cos x$ ֆունկցիայի գրաֆիկը՝ կառուցել տրված ֆունկցիայի գրաֆիկը և նշել հատկությունները (445-446).

445. ա) $y=\sin 3x$, բ) $f(x)=-\cos x$, գ) $f(x)=3\sin x$,

դ) $f(x)=2\sin 2x-1$, ե) $f(x)=1-\sin 3x$, զ) $f(x)=2\cos\dfrac{x}{2}$:

➢446. ա) $f(x)=\sin^2 x$, բ) $f(x)=\cos^2 2x$,

գ) $f(x)=\left|\sin\dfrac{x}{2}\right|$, դ) $f(x)=1-|\cos x|$:

447. Արդյո՞ք ներդաշնակ տատանում է.

ա) $y=\sin^2 3x-\cos^2 3x$, բ) $y=5\sin x\cos x$,

գ) $y=\sin x+\cos x$, դ) $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$:

➢448. Գտնել ներդաշնակ տատանման ամպլիտուդը, անկյունային հաճախականությունը, սկզբնական փուլը և կառուցել գրաֆիկը.

ա) $y=2\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$, բ) $y=-\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)$,

գ) $y=-3\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$, դ) $y=5\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{x}{2}\right)$:

➢449. Օգտվելով 409 խնդրից, ապացուցել, որ՝

ա) $f(x)=\cos\left(x^2-2x-1\right)$ ֆունկցիան աճող է $[0;1]$ միջակայքում,

բ) $f(x)=\sin\left(4x-x^2+2\right)$ ֆունկցիան նվազող է $[2;3]$ միջակայքում:

* **450.** Ապացուցել համարժեքությունը ($k\in\mathbf{Z}$).

ա) $\sin\alpha=\sin\beta\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\alpha=\beta+2\pi k\\ \alpha=\pi-\beta+2\pi k\end{array}\right.$, բ) $\cos\alpha=\cos\beta\Leftrightarrow\alpha=\pm\beta+2\pi k$:

Կրկնության համար

451. Աճող թվաբանական պրոգրեսիա կազմող երեք թվերի գումարը 42 է: Եթե այդ թվերին համապատասխանաբար ավելացնենք 1; 1 և 21, ստացված թվերը կկազմեն երկրաչափական պրոգրեսիա: Գտնել այդ երկրաչափական պրոգրեսիայի երրորդ անդամը:

452. Երեք թվեր, որոնց գումարը 30 է, կազմում են դրական տարբերությամբ թվաբանական պրոգրեսիա: Եթե առաջին թվից հանենք 5, իսկ երկրորդից՝ 4, ապա ստացված թվերը կկազմեն երկրաչափական պրոգրեսիա: Գտնել տրված թվերը:

§2. Տանգենս և կոտանգենս ֆունկցիաների հատկություններն ու գրաֆիկները

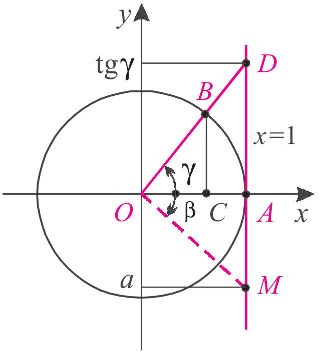
$y = \mathrm{tg}\, x$ ֆունկցիան: Հետազոտենք $y=\mathrm{tg}\, x$ ֆունկցիան և կառուցենք նրա գրաֆիկը: Գիտենք, որ տանգենսը π-պարբերական և կենտ ֆունկցիա է: Գիտենք նաև, որ $\mathrm{tg}\, x$-ը որոշված է, երբ $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$:

Կոորդինատային հարթության վրա վերցնենք միավոր շրջանագիծը և $x=1$ ուղիղը (նկ. 71): Դիցուք, $\gamma \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ և OA սկզբնական շառավիղը γ անկյունով պտտելիս գրավում է OB դիրքը: Քանի որ $\Delta CBO \sim \Delta ADO$ և $AO=1$, ուստի՝

$$AD = \frac{AD}{AO} = \frac{BC}{CO} = \mathrm{tg}\,\gamma:$$

Այսպիսով՝ եթե OB ճառագայթն OA-ի հետ կազմում է γ անկյուն, ապա OB-ն հատում է $x=1$ ուղիղը $(1; \mathrm{tg}\,\gamma)$ կետում: Այս պատճառով $x=1$ ուղիղն անվանում են ***տանգենսների ուղիղ***:

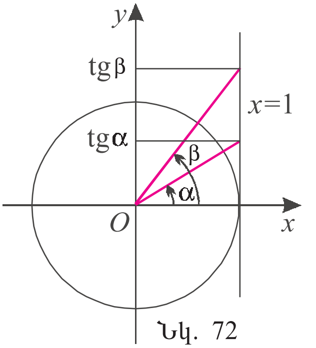
Այժմ, եթե վերցնենք ցանկացած a թիվ և $x=1$ ուղղի վրա գտնվող $M(1; a)$ կետը միացնենք O կետին (նկ. 71), ապա ստացված β պտտման անկյան տանգենսը կլինի a և $\beta \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$: Նշանակում է՝ կամայական a թվի համար գոյություն ունի այնպիսի $\beta \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, որ $\mathrm{tg}\,\beta = a$: Բացի այդ, ինչպես հեշտ է տեսնել գծագրից (տե՛ս նկ. 72), եթե $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$, ապա $\mathrm{tg}\,\alpha < \mathrm{tg}\,\beta$: Այսպիսով՝ տանգենսը $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ միջակայքում աճող է և այդ միջակայքում ընդունում է յուրաքանչյուր իրական արժեք՝ $E(\mathrm{tg}) = \mathbf{R}$:



Նկ. 71

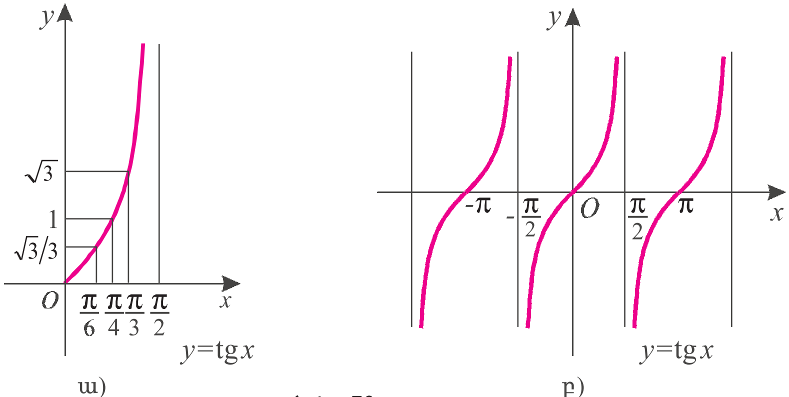
Քանի որ $\mathrm{tg}0=0$, $\mathrm{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\mathrm{tg}\frac{\pi}{4} = 1$, $\mathrm{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, ուրեմն հետևյալ կետերը պատկանում են տանգենսի գրաֆիկին.

$$(0; 0), \quad \left(\frac{\pi}{6}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \quad \left(\frac{\pi}{4}; 1\right), \quad \left(\frac{\pi}{3}; \sqrt{3}\right):$$



Նկ. 72

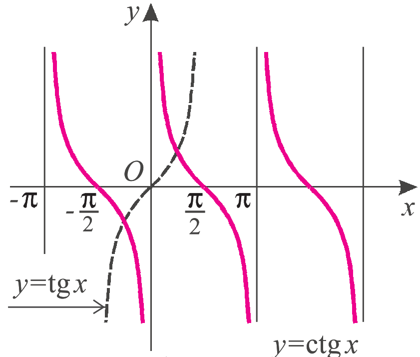
Նկատենք նաև, որ երբ x մոտենում է $\frac{\pi}{2}$-ին, նրանից փոքր մնալով, $\operatorname{tg} x$-ը դառնում է մեծ նախօրոք տրված կամայական թվից: Հաշվի առնելով նաև, որ տանգենսը $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$ միջակայքում աճող է, այդ տեղամասում տանգենսի գրաֆիկի համար ստանում ենք նկ. 73, ա-ում պատկերված գիծը: Քանի որ տանգենսը կենտ և π-պարբերական ֆունկցիա է, նրա գրաֆիկը կլինի նկ. 73, բ-ում պատկերվածը: Այսպիսով՝



Նկ. 73

1) ***տանգենսի որոշման տիրույթը*** $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k;\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k\in\mathbf{Z}$, ***միջակայքերի միավորումն է, իսկ արժեքների բազմությունը՝*** $E(\operatorname{tg})=\mathbf{R}$,
2) ***տանգենսը կենտ և*** π***-պարբերական ֆունկցիա է,***
3) ***տանգենսի գրաֆիկն աբսցիսների առանցքը հատում է*** $(\pi k;0)$, $k\in\mathbf{Z}$, ***կետերում,***
4) $\operatorname{tg}x>0$, ***երբ*** $x\in(\pi k;\pi/2+\pi k)$, $k\in\mathbf{Z}$,
   $\operatorname{tg}x<0$, ***երբ*** $x\in(-\pi/2+\pi k;\pi k)$, $k\in\mathbf{Z}$,
5) ***տանգենսն աճող է*** $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k;\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k\in\mathbf{Z}$, ***միջակայքերից յուրաքանչյուրում*** (նկատենք, որ չի կարելի ասել, թե տանգենսն աճող ֆունկցիա է),
6) ***տանգենսն էքստրեմումի կետեր չունի,***
7) ***երբ*** x***-ը մոտենում է*** $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$ ***կետին ձախից,*** $\operatorname{tg}x$***-ի արժեքներն անվերջ մեծանում են, իսկ աջից մոտենալիս*** $\operatorname{tg}x$***-ը, ընդունելով բացասական արժեքներ, անվերջ նվազում է՝ ձգտելով*** $-\infty$ ***-ի:***

$y=\operatorname{ctg}x$ ֆունկցիան: Քանի որ $\operatorname{ctg}x=-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$, ուստի $y=\operatorname{ctg}x$ ֆունկցիայի գրաֆիկը ստացվում է $y=\operatorname{tg}x$ ֆունկցիայի գրաֆիկը $\frac{\pi}{2}$ միավորով ձախ տեղաշարժելով և աբսցիսների առանցքի նկատմամբ համաչափ արտապատկերելով (նկ. 74):



Նկ. 74

Կոտանգենսն ունի հետևյալ հատկությունները.

1) ***կոտանգենսի որոշման տիրույթը*** $(\pi k;\pi+\pi k)$, $k\in\mathbf{Z}$, ***միջակայքերի միավորումն է, իսկ*** $E(\operatorname{ctg})=\mathbf{R}$,
2) ***կոտանգենսը կենտ և*** π ***-պարբերական ֆունկցիա է,***
3) ***կոտանգենսի գրաֆիկը աբսցիսների առանցքը հատում է*** $\left(\frac{\pi}{2}+\pi k;0\right)$, $k\in\mathbf{Z}$, ***կետերում,***
4) $\operatorname{ctg}x>0$, ***երբ*** $x\in(\pi k;\pi/2+\pi k)$, $k\in\mathbf{Z}$,
   $\operatorname{ctg}x<0$, ***երբ*** $x\in(\pi/2+\pi k;\ \pi+\pi k)$, $k\in\mathbf{Z}$,
5) ***կոտանգենսը նվազող է*** $(\pi k;\pi+\pi k)$, $k\in\mathbf{Z}$, ***միջակայքերից յուրաքանչյուրում*** (սակայն չի կարելի ասել, որ կոտանգենսը նվազող ֆունկցիա է),
6) ***կոտանգենսն էքստրեմումի կետեր չունի,***
7) ***երբ*** x ***-ը մոտենում է*** πk, $k\in\mathbf{Z}$, ***կետին աջից,*** $\operatorname{ctg}x$ ***-ի արժեքներն անվերջ մեծանում են, իսկ ձախից մոտենալիս*** $\operatorname{ctg}x$ ***-ը, ընդունելով բացասական արժեքներ, նվազում է՝ ձգտելով*** $-\infty$ ***-ի:***

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ապացուցեք, որ $E(\operatorname{tg})=\mathbf{R}$:
2. Պատկերեք տանգենսի գրաֆիկը և թվարկեք հատկությունները:
3. Ելնելով տանգենսի գրաֆիկից՝ պատկերեք կոտանգենսի գրաֆիկը:
4. Թվարկեք կոտանգենսի հատկությունները:

Առաջադրանքներ

453. Ձևափոխելով $y=\operatorname{tg}x$ կամ $y=\operatorname{ctg}x$ ֆունկցիայի գրաֆիկը՝ կառուցել տրված ֆունկցիայի գրաֆիկը և նշել հատկությունները.

ա) $f(x)=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, բ) $f(x)=-\operatorname{tg}3x$, գ) $f(x)=\operatorname{ctg}2x$,

դ) $f(x)=\left|\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right|$, ե) $f(x)=|\operatorname{tg}2x|$, զ) $f(x)=\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$:

Դասավորել նվազման կարգով (454-455).

454. ա) $\operatorname{tg}43^\circ$, $\operatorname{tg}73^\circ$, $\operatorname{tg}(-50^\circ)$, բ) $\operatorname{ctg}72^\circ$, $\operatorname{ctg}13^\circ$, $\operatorname{ctg}107^\circ$, գ) $\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{5}$, $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{7}$, $\operatorname{ctg}\frac{6\pi}{5}$, դ) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{9}$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{7}$, $\operatorname{tg}\left(-\frac{7\pi}{9}\right)$:

* **455.** ա) $\operatorname{tg}(-1)$, $\operatorname{tg}1$, $\operatorname{tg}2$, բ) $\operatorname{ctg}2$, $\operatorname{ctg}3$, $\operatorname{ctg}1$,

գ) $\operatorname{ctg}3{,}5$, $\operatorname{ctg}6$, $\operatorname{ctg}5$, դ) $\operatorname{tg}2$, $\operatorname{tg}4$, $\operatorname{tg}2{,}5$:

* **456.** Գտնել ֆունկցիայի որոշման տիրույթը.

ա) $f(x)=\frac{1}{\operatorname{tg}x}$, բ) $f(x)=\frac{2}{\operatorname{ctg}x}$, գ) $f(x)=\sqrt{-\operatorname{ctg}x}$,

դ) $f(x)=\sqrt{\operatorname{tg}x}$, ե) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{-\operatorname{tg}x}}$, զ) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ctg}x}}$:

➢**457.** Հետազոտել ֆունկցիան և կառուցել նրա գրաֆիկը.

ա) $f(x)=\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$, բ) $f(x)=\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$, գ) $f(x)=\operatorname{ctg}\frac{x}{4}$:

458. Օգտվելով 409 խնդրից, ապացուցել, որ՝

ա) $f(x)=\operatorname{ctg}(x^2-2x-1)$ ֆունկցիան նվազող է $[1;\,2]$ միջակայքում,

բ) $f(x)=\operatorname{tg}(4x-x^2+2)$ ֆունկցիան նվազող է $[2;\,3]$ միջակայքում:

459. Ապացուցել համարժեքությունը ($\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, $\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$).

ա) $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\beta\Leftrightarrow\alpha=\beta+\pi k$, բ) $\operatorname{ctg}\alpha=\operatorname{ctg}\beta\Leftrightarrow\alpha=\beta+\pi k$:

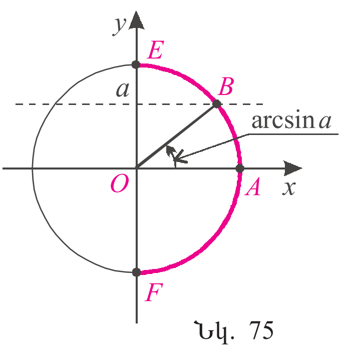
Կրկնության համար

➢**460.** Քանի՞ ժամում հեծանվորդը կանցնի 84 կմ, եթե նա առաջին ժամում անցնում է 15 կմ, իսկ յուրաքանչյուր հաջորդ ժամում՝ 1 կմ-ով պակաս, քան նախորդ ժամում:

➢**461.** Գնացքն առաջին ժամում անցնում է 50 կմ, իսկ յուրաքանչյուր հաջորդ ժամում՝ 2 կմ-ով ավելի, քան նախորդ ժամում: Քանի՞ ժամում գնացքը կանցնի 1470 կմ:

§3. Թվի արկսինուսը և արկկոսինուսը

Արկսինուս: Կոորդինատային հարթության վրա դիտարկենք միավոր շրջանագիծը և $y=a$ ուղիղը (նկ. 75): Պարզ է, որ եթե $|a|\leq 1$, ապա այդ ուղիղը հատում է EAF կիսաշրջանագիծը միայն՝ B կետում: Նշանակում է՝ $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ միջակայքում գոյություն ունի միակ β թիվ, այնպիսին, որ $\sin\beta=a$: Այդ թիվն անվանում են a թվի արկսինուս և նշանակում $\arcsin\alpha$:



Նկ. 75

Սահմանում: *a թվի արկսինուս կոչվում է $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ հատվածի այն թիվը, որի սինուսն a է:*

Պարզ է, որ $\arcsin a$-ն որոշված է միայն այն դեպքում, երբ $a\in[-1;1]$, հակառակ դեպքում ($|a|>1$) գոյություն չունի թիվ, որի սինուսն a է:

Օրինակ 1: Գտնենք $\arcsin\frac{1}{2}$-ը: Ըստ սահմանման՝ պետք է գտնենք $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ հատվածի այն թիվը, որի սինուսը $\frac{1}{2}$ է:

Քանի որ $\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ և $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$, ուրեմն՝ $\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$:

Օրինակ 2: $\arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2}$, քանի որ

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1 \quad \text{և} \quad -\frac{\pi}{2}\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]:$$

Հատկություն 1: $\arcsin(-a)=-\arcsin a$ **:**

Ապացուցում: Ըստ սահմանման՝

$$\arcsin a\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \quad \text{և} \quad \sin(\arcsin a)=a:$$

Այդ դեպքում՝ $-\arcsin a\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ և $\sin(-\arcsin a)=-\sin(\arcsin a)=-a$:

Հետևաբար՝ $\arcsin(-a)=-\arcsin a$:

Արկսինուսի սահմանումից անմիջապես հետևում է՝

ա) կամայական $a\in[-1;1]$ ***թվի համար*** $\sin(\arcsin a)=a$**,**

բ) եթե $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, ***ապա*** $\arcsin(\sin x)=x$ **:**

Այս հատկություններից կարող ենք եզրակացնել, որ՝

$$y=\sin x,\ x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \quad \text{և} \quad y=\arcsin x$$

ֆունկցիաները փոխհակադարձ ֆունկցիաներ են:

Նշենք, որ չի կարելի ասել, թե $y=\arcsin x$ ֆունկցիան $y=\sin x$ ֆունկցիայի հակադարձ է, քանի որ $y=\sin x$ ֆունկցիան իր որոշման տիրույթում՝ ամբողջ թվային առանցքում հակադարձելի չէ:

Օրինակ 3. Գտնենք $\sin(2\arcsin 0{,}8)$ արտահայտության արժեքը:

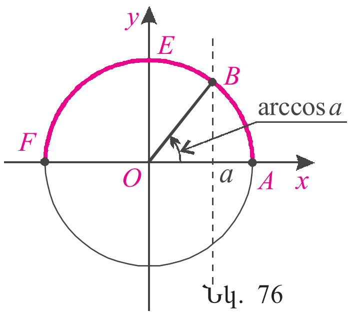
Նշանակենք $\alpha=\arcsin 0{,}8$: Ըստ արկսինուսի սահմանման՝

$$\sin\alpha=0{,}8 \ \text{և} \ \alpha\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]:$$

Անհրաժեշտ է գտնել $\sin 2\alpha$-ն: Քանի որ α-ն I կամ IV քառորդներում է, որտեղ կոսինուսը դրական է (իրականում α-ն I քառորդում է, քանի որ նրա սինուսը դրական է), ուրեմն՝

$$\cos\alpha=\sqrt{1-0{,}8^2}=0{,}6 \ \text{և} \ \sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=0{,}96:$$

Արկկոսինուս: Կոորդինատային հարթության վրա դիտարկենք միավոր շրջանագիծը և $x=a$ ուղիղը: Պարզ է, որ եթե $|a|\le 1$, ապա $x=a$ ուղիղը հատում է FEA կիսաշրջանագիծը միակ՝ B կետում (նկ. 76): Նշանակում է՝ $[0;\pi]$ միջակայքում գոյություն ունի միակ β թիվ, այնպիսին, որ $\cos\beta=a$: Այդ թիվն անվանում են a թվի արկկոսինուս և նշանակում $\arccos a$:



Նկ. 76

Սահմանում: ***$a\in[-1;1]$ թվի արկկոսինուս կոչվում է $[0;\pi]$ հատվածի այն թիվը, որի կոսինուսն a է:***

Օրինակ 4: $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$, քանի որ $\frac{\pi}{4}\in[0;\pi]$ և $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$:

Հատկություն 2: $\mathbf{\arccos(-a)=\pi-\arccos a}$ **:**

Ապացույց: $\arccos a\in[0;\pi]$ պայմանից հետևում է, որ $\pi-\arccos a\in[0;\pi]$: Բացի այդ, համաձայն բերման բանաձևի՝

$$\cos(\pi-\arccos a)=-\cos(\arccos a)=-a:$$

Հետևաբար՝ $\arccos(-a)=\pi-\arccos a$:

Օրինակ 5: Գտնենք $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$-ը: Օգտվելով 2-րդ հատկությունից և նախորդ օրինակից, ստանում ենք՝

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\pi-\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}:$$

Արկկոսինուսի սահմանումից անմիջապես հետևում է.

ա) կամայական $a\in[-1;1]$ ***թվի համար*** $\cos(\arccos a)=a$,
բ) եթե $x\in[0;\pi]$, ***ապա*** $\arccos(\cos x)=x$:
Այստեղից կարող ենք եզրակացնել, որ

> $y=\cos x$, $x\in[0;\pi]$ ***և*** $y=\arccos x$
> ***ֆունկցիաները փոխհակադարձ ֆունկցիաներ են:***

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Սահմանեք $\arcsin a$ -ն: Ո՞ր a -երի համար է այն որոշված:
2. Ինչի՞ է հավասար $\sin(\arcsin a)$-ն:
3. Ինչի՞ է հավասար $\arcsin(-a)$-ն:
4. Ինչի՞ է հավասար $\arcsin(\sin x)$-ը, երբ $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$:
5. Սահմանեք $\arccos a$ -ն: Ո՞ր a -երի համար է այն որոշված:
6. Ինչի՞ է հավասար $\arccos(-a)$-ն:
7. Ինչի՞ է հավասար $\cos(\arccos a)$-ն:
8. Ինչի՞ է հավասար $\arccos(\cos x)$-ը, երբ $x\in[0;\pi]$:

Առաջադրանքներ

462. Լրացնել աղյուսակը:

a	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\arcsin a$									
$\arccos a$									

Գտնել արտահայտության արժեքը (463-464).

463. ա) $\arcsin 0+\arccos 1$, բ) $\arcsin 1+\arccos 0$,

գ) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}+\arccos\frac{1}{2}$, դ) $\arccos\frac{1}{2}-\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$:

464. ա) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, բ) $\arcsin(-1)+\arccos(-1)$, գ) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\arcsin\frac{1}{2}$, դ) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$:

465. Իմաստ ունի՞ արդյոք արտահայտությունը.

ա) $\arcsin\frac{1}{3}$, բ) $\arcsin\frac{\sqrt{3}-1}{2}$, գ) $\arcsin\frac{\sqrt{3}+1}{2}$,

դ) $\arcsin\sqrt{2}$, ե) $\arcsin\frac{1-\sqrt{11}}{2}$, զ) $\arcsin\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)$:

466. Ապացուցել հավասարությունը.

ա) $\arcsin\frac{1}{3}+\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)=0$, բ) $\arcsin\left(\sqrt{3}-1\right)+\arcsin\left(1-\sqrt{3}\right)=0$,

➢գ) $\arcsin\left(1-\sqrt{2}\right)+\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}+1}=0$:

* **467.** Գտնել արտահայտության արժեքը.

ա) $\arcsin(\sin 5)$, բ) $\arcsin(\sin 12)$, գ) $\arcsin(\sin(-8))$:

468. Իմաստ ունի՞ արդյոք արտահայտությունը.

ա) $\arccos\sqrt{5}$, բ) $\arccos\left(\sqrt{5}-5\right)$, գ) $\arccos\frac{2}{3}$:

469. Ապացուցել հավասարությունը.

ա) $\arccos\frac{2}{3}+\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)=\pi$, բ) $\arccos\left(2-\sqrt{5}\right)+\arccos\frac{1}{\sqrt{5}+2}=\pi$:

470. Գտնել արտահայտության արժեքը.

ա) $\arcsin\frac{1}{2}+\arccos\frac{1}{2}$, բ) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$,

գ) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}+\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$, դ) $\arcsin 1+\arccos 1$:

471. Դիցուք, $a\in[-1;1]$ և $x=\arccos a$:

ա) Գտեք $\cos x$-ը: բ) Ո՞ր միջակայքին է պատկանում x-ը:

գ) Ո՞ր միջակայքին է պատկանում $(-x)$-ը:

դ) Ո՞ր միջակայքին է պատկանում $\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$-ը:

ե) Գտեք $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$-ը:

զ) Հիմնավորեք, որ $\arcsin a=\frac{\pi}{2}-x$:

է) Հիմնավորեք հավասարությունը՝ $\arcsin a+\arccos a=\frac{\pi}{2}$:

* **472.** Գտնել արտահայտության արժեքը.

ա) $\arccos(\cos(-1))$, բ) $\arccos(\cos 9)$, գ) $\arccos(\cos 4)$:

*** 473.** Գտնել արտահայտության արժեքը.

ա) $\arcsin\left(\cos\dfrac{\pi}{5}\right)$, բ) $\arccos\left(\sin\dfrac{\pi}{7}\right)$, գ) $\arcsin\left(\cos\dfrac{2\pi}{5}\right)$,

դ) $\cos\left(2\arcsin\dfrac{1}{4}\right)$, ե) $\cos\left(\arcsin\dfrac{2}{5}\right)$, զ) $\sin\left(\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{5}{13}\right)$:

***474.** Ապացուցել, որ կամայական $a_1, a_2 \in [-1;1]$ թվերի դեպքում $a_1 < a_2$ պայմանից հետևում է, որ՝

ա) $\arcsin a_1 < \arcsin a_2$, բ) $\arccos a_1 > \arccos a_2$:

*** 475.** Օգտվելով ա) և բ) բանաձևերից՝ կառուցել ֆունկցիայի գրաֆիկը.

ա) $y = \sin(\arcsin x)$, բ) $y = \cos(\arccos x)$,

գ) $y = \arcsin(\sin x)$, դ) $y = \arccos(\cos x)$:

Կրկնության համար

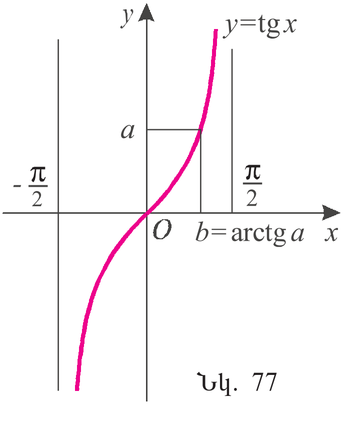
➢476. Լուծել

ա) $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}} + 2\sqrt{\dfrac{x-2}{x+1}} = 3$, բ) $\sqrt{\dfrac{3x}{x-1}} + \sqrt{\dfrac{x-1}{3x}} = \dfrac{5}{2}$,

գ) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 11 \\ xy = 30, \end{cases}$ դ) $\begin{cases} xy + x = 56 \\ xy + y = 54: \end{cases}$

§4. Թվի արկտանգենսը և արկկոտանգենսը

Արկտանգենս: Տեսանք, որ տանգենսը $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ միջակայքում աճող է և ընդունում է կամայական արժեք $(-\infty; +\infty)$ միջակայքից: Հետևաբար՝ կամայական $a \in \mathbf{R}$ թվի համար գոյություն ունի միակ b թիվը $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ միջակայքում, որի տանգենսն a է՝ $\operatorname{tg} b = a$ (նկ. 77): Այդ թիվն անվանում են a թվի արկտանգենս և նշանակում $\operatorname{arctg} a$:



Նկ. 77

***Սահմանում:** a թվի արկտանգենս կոչվում է $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ միջակայքի այն թիվը, որի տանգենսն a է:*

Օրինակ 1: $\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}$, քանի որ $\frac{\pi}{4}\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ և $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$:

Օրինակ 2: $\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)=-\frac{\pi}{3}$, քանի որ $-\frac{\pi}{3}\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ և $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$:

Հատկություն 1: $\operatorname{arctg}(-a)=-\operatorname{arctg}a$:

Ապացուցում: Ըստ սահմանման՝ $\operatorname{arctg}a\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ և $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}a)=a$:
Հետևաբար՝ $-\operatorname{arctg}a\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ և $\operatorname{tg}(-\operatorname{arctg}a)=-\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}a)=-a$:
Ուստի՝ $\operatorname{arctg}(-a)=-\operatorname{arctg}a$:

Արկտանգենսի սահմանումից անմիջապես հետևում է՝

***ա) կամայական a թվի համար* $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}a)=a$,**

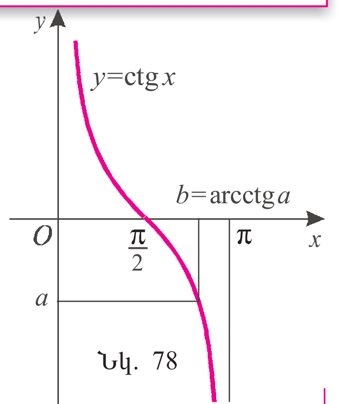
***բ) եթե $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, ապա* $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}x)=x$:**

Սա նշանակում է, որ

$$y=\operatorname{tg}x,\ x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\quad \textit{և}\quad y=\operatorname{arctg}x$$

ֆունկցիաները փոխհակադարձ ֆունկցիաներ են:

Արկկոտանգենս: Քանի որ կոտանգենսը $(0;\pi)$ միջակայքում նվազող է և ընդունում է ցանկացած արժեք, ուրեմն կամայական a-ի համար գոյություն ունի միակ b թիվը $(0;\pi)$ միջակայքից, որի կոտանգենսն a է՝ $\operatorname{ctg}b=a$ (նկ. 78): Այդ թիվն անվանում են a թվի արկկոտանգենս և նշանակում $\operatorname{arcctg}a$: Այսպիսով՝



Նկ. 78

Սահմանում:* *a թվի արկկոտանգենս կոչվում է $(0;\pi)$ միջակայքի այն թիվը, որի կոտանգենսն a է:

Օրինակ 3: $\operatorname{arcctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{6}$, քանի որ $\frac{\pi}{6}\in(0;\pi)$ և $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$:

Օրինակ 4: $\operatorname{arcctg}(-1)=\frac{3\pi}{4}$, քանի որ $\frac{3\pi}{4}\in(0;\pi)$ և $\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4}=-1$:

Հատկություն 2: $\operatorname{arcctg}(-a)=\pi-\operatorname{arcctg} a$ **:**

Ապացուցում: Ըստ սահմանման՝ $\operatorname{arcctg} a\in(0;\pi)$ և $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a)=a$:
Հետևաբար՝ $\pi-\operatorname{arcctg} a\in(0;\pi)$ և $\operatorname{ctg}(\pi-\operatorname{arcctg} a)=-\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a)=a$:

Ուստի՝ $\operatorname{arcctg}(-a)=\pi-\operatorname{arcctg} a$:

Արկկոտանգենսի սահմանումից անմիջապես հետևում է՝

ա) կամայական a թվի համար $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a)=a$,

բ) եթե $x\in(0;\pi)$, ***ապա*** $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x)=x$ **:**

Հետևաբար՝

$y=\operatorname{ctg} x$, $x\in(0;\pi)$ ***և*** $y=\operatorname{arcctg} x$
ֆունկցիաները փոխհակադարձ ֆունկցիաներ են:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ի՞նչ է a թվի արկտանգենսը:
2. Ինչի՞ է հավասար $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a)$-ն:
3. Ինչի՞ է հավասար $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$-ը, երբ $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$:
4. Ի՞նչ է a թվի արկկոտանգենսը:
5. Ինչի՞ է հավասար $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a)$-ն:
6. Ինչի՞ է հավասար $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x)$-ը, երբ $x\in(0;\pi)$:

Առաջադրանքներ

477. Լրացնել աղյուսակը.

a	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$
$\operatorname{arctg} a$							
$\operatorname{arcctg} a$							

478. Գտնել արտահայտության արժեքը.

ա) $\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}\sqrt{3}$,

բ) $\operatorname{arcctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)$,

գ) $\operatorname{arcctg}0+\operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right)$,

դ) $\operatorname{arcctg}(-1)-\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$,

ե) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}-\operatorname{arctg}0$,

զ) $\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)-\operatorname{arctg}1$:

479. Ապացուցել հավասարությունը.

ա) $\operatorname{arctg} 7 + \operatorname{arctg}(-7) = 0$, բ) $\operatorname{arcctg}(\sqrt{5} - 5) + \operatorname{arcctg}(5 - \sqrt{5}) = \pi$,

գ) $\operatorname{arcctg}(1 - \sqrt{3}) + \operatorname{arcctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3} + 1}\right) = \pi$, դ) $\operatorname{arctg}(1 - \sqrt{7}) + \operatorname{arctg}\left(\frac{6}{\sqrt{7} + 1}\right) = 0$։

* **480.** Ապացուցել, որ կամայական a իրական թվի համար $\operatorname{arctg} a + \operatorname{arcctg} a = \frac{\pi}{2}$։

➢**481.** Ապացուցել, որ կամայական $a_1 < a_2$ թվերի համար՝

ա) $\operatorname{arctg} a_1 < \operatorname{arctg} a_2$, բ) $\operatorname{arcctg} a_1 > \operatorname{arcctg} a_2$։

Գտնել արտահայտության արժեքը (482-483).

➢**482.** ա) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}\right)$, *բ) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{8\pi}{11}\right)$, *գ) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 4)$։

➢**483.** ա) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 13)$, *բ) $\operatorname{tg}(2\operatorname{arctg} 3,)$, *գ) $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 4\right)$։

➢**484.** Կառուցել ֆունկցիայի գրաֆիկը.

ա) $y = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$, բ) $y = \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x)$։

* **485.** Կառուցել ֆունկցիայի գրաֆիկը.

ա) $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$, բ) $y = \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x)$։

Կրկնության համար

➢**486.** Լուծել հավասարումը.

ա) $\frac{x-2}{4} + 9\sqrt{\frac{x-2}{4}} = 10$, բ) $\sqrt{4x+5} - \frac{2}{\sqrt{4x+5}} = \frac{7}{3}$։

➢**487.** Լուծել համակարգը.

ա) $\begin{cases} x^2 + xy = -2 \\ y^2 + xy = 3, \end{cases}$ բ) $\begin{cases} (x-y)xy = 30 \\ (x+y)xy = 120 \end{cases}$։

§5. Պարզագույն եռանկյունաչափական հավասարումների լուծման բանաձևերը

Այս պարագրաֆում կլուծենք

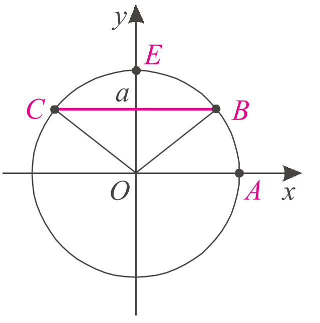
$$\sin x = a,\ \cos x = a,\ \operatorname{tg} x = a \text{ և } \operatorname{ctg} x = a$$

պարզագույն եռանկյունաչափական հավասարումները:

1. $\sin x = a$ հավասարման լուծումը:

Քանի որ սինուսն արժեքներ է ընդունում միայն $[-1;1]$ միջակայքում, ուրեմն՝ $|a|>1$ դեպքում $\sin x = a$ հավասարումն արմատ չունի:

Դիտարկենք $a=1$ դեպքը: Միավոր շրջանագծի վրա միակ կետը, որի օրդինատը 1 է, $E(0;1)$ կետն է (նկ. 79): Նշանակում է՝ $\sin x = 1$ հավասարությունը ճիշտ է, եթե OA սկզբնական շառավիղն x ռադիան պտույտից հետո գրավում է OE դիրքը: Հետևաբար՝



Նկ. 79

$\sin x = 1$ ***հավասարման լուծումն է***

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}: \qquad (1)$$

Հանգունորեն կարող ենք համոզվել, որ

$\sin x = -1$ ***հավասարման լուծումն է***

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}: \qquad (2)$$

Այժմ ենթադրենք $|a|<1$: Դիցուք, միավոր շրջանագիծը և $y=a$ ուղիղը հատվում են B և C կետերում (նկ. 79): $\sin x$-ը կլինի a այն և միայն այն դեպքում, երբ OA սկզբնական շառավիղն x ռադիան անկյունով պտտելիս հայտնվի OB կամ OC դիրքում: Համաձայն արկսինուսի սահմանման՝ այն կհայտնվի OB դիրքում, եթե $x = \arcsin a$: Իսկ եթե $x = \pi - \arcsin a$, ապա կստացվի OC դիրքը:

Հետևաբար՝ OA սկզբնական շառավիղը կհայտնվի OB կամ OC դիրքում, երբ այն պտտենք

$$\arcsin a + 2\pi k, \ k \in \mathbf{Z}, \text{ կամ } \pi - \arcsin a + 2\pi k, \ k \in \mathbf{Z}$$

անկյուններով: Այսինքն՝ $\sin x = a$ հավասարման արմատներն են՝

$$x = \arcsin a + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}, \qquad (3)$$

$$x = \pi - \arcsin a + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}: \qquad (4)$$

Լուծումների այս երկու բազմությունները կարելի է ներկայացնել մեկ բանաձևով.

$\sin x = a$ ***հավասարման լուծումն է***

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}: \qquad (5)$$

Իրոք, եթե (5) բանաձևում n-ը զույգ է՝ $n = 2k$, ստանում ենք (3) բանաձևը, իսկ եթե n-ը կենտ է՝ $n=2k+1$, ստանում ենք (4) բանաձևը:

Քանի որ $\arcsin 0 = 0$, (5) բանաձևից կստանանք, որ

> **$\sin x = 0$ *հավասարման լուծումն է***
>
> $$x = \pi n,\ n \in \mathbf{Z}:$$

Դժվար չէ ստուգել, որ լուծումների (5) բազմությունը $a=1$ դեպքում համընկնում է (1)-ի, իսկ $a=-1$ դեպքում՝ (2)-ի հետ:

Օրինակ 1: Լուծենք $\sin x = \frac{1}{2}$ հավասարումը:

Համաձայն (5) բանաձևի, $x=(-1)^n \arcsin\frac{1}{2}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$:

Քանի որ $\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$, ուրեմն՝ $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$:

Պատասխան՝ $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$:

Օրինակ 2: Լուծենք $\sin x = -\frac{1}{3}$ հավասարումը:

Համաձայն (5) բանաձևի, $x=(-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$:

Քանի որ $\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)=-\arcsin\frac{1}{3}$, ուրեմն $x=(-1)^{n+1}\arcsin\frac{1}{3}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$:

Պատասխան՝ $(-1)^{n+1}\arcsin\frac{1}{3}+\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$:

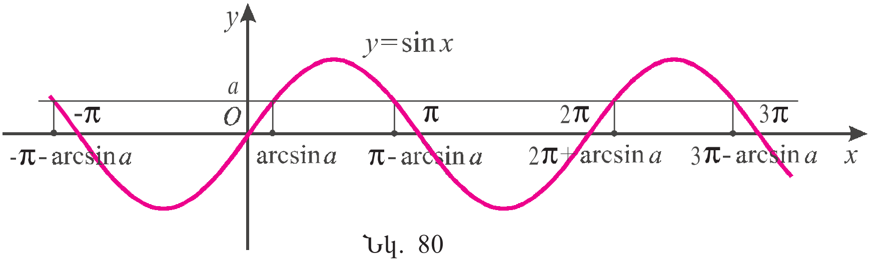
Օրինակ 3: Լուծենք $\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=-1$ հավասարումը:

Համաձայն (2) բանաձևի,

$$2x-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n \in \mathbf{Z},\ \text{որտեղից՝}\ x=-\frac{\pi}{12}+\pi n,\ n \in \mathbf{Z}:$$

Պատասխան՝ $-\frac{\pi}{12}+\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$:

Մեկնաբանենք (3) և (4) բանաձևերը գրաֆիկորեն: $\sin x = a$ հավասարման արմատները $y=\sin x$ ֆունկցիայի գրաֆիկի և $y=a$ ուղղի հատման կետերի աբսցիսներն են (նկ. 80): Քանի որ $y=\sin x$ ֆունկցիան 2π-պարբերական է,



Նկ. 80

բավական է գտնել $[-\pi, \pi]$ միջակայքի արմատները և գումարել պարբերությունները:

Ինչպես տեսնում ենք նկարում, $[-\pi, \pi]$ միջակայքում կա երկու արմատ, ընդ որում, այն արմատը, որը $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ միջակայքում է, $\arcsin a$-ն է, իսկ մյուսը՝ $(\pi - \arcsin a)$-ն: Գումարելով պարբերությունները՝ ստանում ենք (3) և (4) բանաձևերը:

2. $\cos x = a$ հավասարման լուծումը:

Քանի որ կոսինուսն արժեքներ է ընդունում միայն $[-1;1]$ միջակայքում, ուրեմն $|a|>1$ դեպքում $\cos x = a$ հավասարումն արմատ չունի:

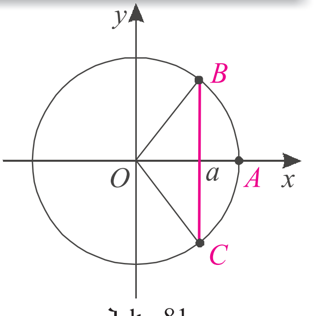
Դիտարկենք $a=1$ դեպքը: Միավոր շրջանագծի վրա միակ կետը, որի աբսցիսը 1 է, $A(1;0)$ կետն է (նկ. 81): Նշանակում է՝

> **$\cos x = 1$ *հավասարման լուծումն է***
>
> $$\boldsymbol{x = 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}:} \qquad (6)$$

Հանգունորեն համոզվում ենք, որ

> **$\cos x = -1$ *հավասարման լուծումն է***
>
> $$\boldsymbol{x = \pi + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}:} \qquad (7)$$

Դիտարկենք $|a|<1$ դեպքը: Դիցուք, միավոր շրջանագիծը և $x=a$ ուղիղը հատվում են B և C կետերում (նկ. 81): $\cos x$-ը կլինի a միայն այն դեպքում, երբ OA սկզբնական շառավիղն x ռադիան անկյունով պտտելիս հայտնվի OB կամ OC դիրքում: Համաձայն արկկոսինուսի սահմանման՝ այն կհայտնվի OB դիրքում, եթե $x = \arccos a$: Իսկ OC դիրքը կստացվի, եթե $x = -\arccos a$:



Նկ. 81

Հետևաբար՝ OA սկզբնական շառավիղը կհայտնվի OB կամ OC դիրքում, երբ այն պտտենք $\pm\arccos a + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, անկյուններով: Ուստի՝

> **$\cos x = a$ *հավասարման լուծումն է***
>
> $$\boldsymbol{x = \pm\arccos a + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}:} \qquad (8)$$

Մասնավորապես, երբ $a=0$, հաշվի առնելով, որ $\arccos 0=\frac{\pi}{2}$, ստանում ենք, որ $\cos x=0$ հավասարման լուծումն է՝ $x=\pm\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$: Ինքնուրույն համոզվեք, որ լուծումների այս բազմությունը կարելի է տալ ավելի պարզ բանաձևով.

$$\mathbf{\cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\quad k\in Z}:$$

Կարող եք ստուգել նաև, որ լուծումների (8) բազմությունը $a=1$ դեպքում համընկնում է (6)-ին, իսկ $a=-1$ դեպքում՝ (7)-ին:

Օրինակ 4: Լուծենք $\cos x=-\frac{1}{2}$ հավասարումը:

Համաձայն (8) բանաձևի՝ $x=\pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$:

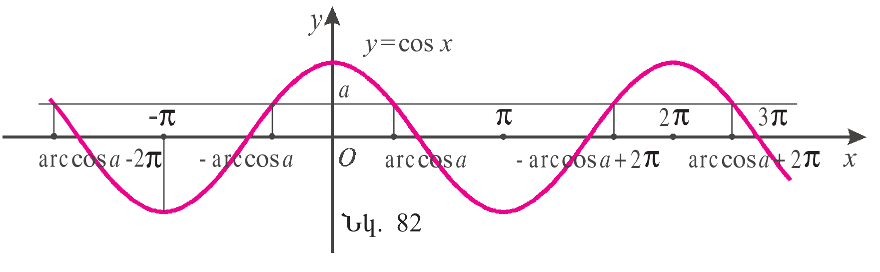
Քանի որ $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2\pi}{3}$, ուրեմն՝ $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$:

Պատասխան՝ $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbf{Z}$:

Օրինակ 5: Լուծենք $2\cos x=\sqrt{5}$ հավասարումը:

Քանի որ $\frac{\sqrt{5}}{2}>1$, ուրեմն $\cos x=\frac{\sqrt{5}}{2}$ հավասարումն արմատ չունի:

Մեկնաբանենք (6) և (7) բանաձևերը գրաֆիկորեն: $\cos x=a$ հավասարման արմատները $y=\cos x$ ֆունկցիայի գրաֆիկի և $y=a$ ուղղի հատման կետերի աբսցիսներն են (նկ. 82): Քանի որ $y=\cos x$ ֆունկցիան 2π-պարբերական է,



Նկ. 82

բավական է գտնել $[-\pi,\pi]$ միջակայքի արմատները և գումարել պարբերությունները:

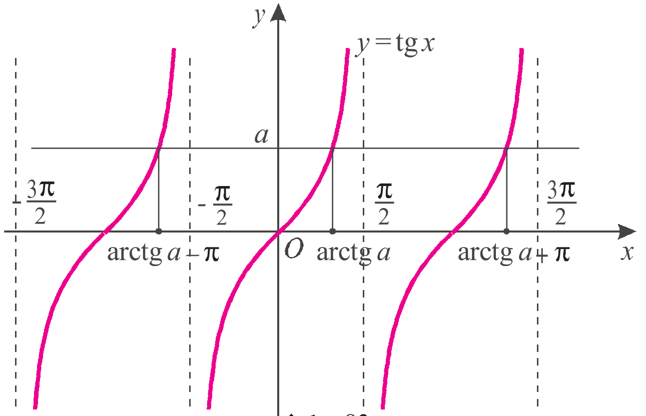
Ինչպես տեսնում ենք նկարում, $[-\pi,\pi]$ միջակայքում կա երկու արմատ, որոնցից մեկը, որ $[0,\pi]$ միջակայքում է, $(\arccos a)$-ն է, իսկ մյուսը՝ $(-\arccos a)$-ն:

Գումարելով պարբերությունները՝ ստանում ենք (6) և (7) բանաձևերը:

3. $\mathrm{tg}\, x=a$ հավասարման լուծումը:

Գիտենք, որ յուրաքանչյուր a-ի դեպքում գոյություն ունի միակ թիվ

$\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ միջակայքում, որի տանգենսն a է, և այդ թիվն $\operatorname{arctg} a$-ն է (տե՛ս նկ. 83): Քանի որ տանգենսը π-պարբերական է, ուրեմն



Նկ. 83

> $\operatorname{tg} x = a$ ***հավասարման լուծումն է՝***
>
> $$x = \operatorname{arctg} a + \pi k,\quad k \in \mathbf{Z}: \qquad (9)$$

Օրինակ 6: Լուծենք $\operatorname{tg} 2x = \sqrt{3}$ հավասարումը:

Համաձայն (9) բանաձևի՝ $2x = \operatorname{arctg}\sqrt{3} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$: Քանի որ $\operatorname{arctg}\sqrt{3} = \dfrac{\pi}{3}$, ուստի՝ $x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{2}k$, $k \in \mathbf{Z}$:

Պատասխան՝ $\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{2}k$, $k \in \mathbf{Z}$:

4. $\operatorname{ctg} x = a$ հավասարման լուծումը:

Գիտենք, որ յուրաքանչյուր a-ի դեպքում գոյություն ունի միակ թիվ $(0; \pi)$ միջակայքում, որի կոտանգենսն a է, և այդ թիվն $\operatorname{arcctg} a$-ն է (տե՛ս նկ. 84): Քանի որ կոտանգենսը π-պարբերական է, ուրեմն՝

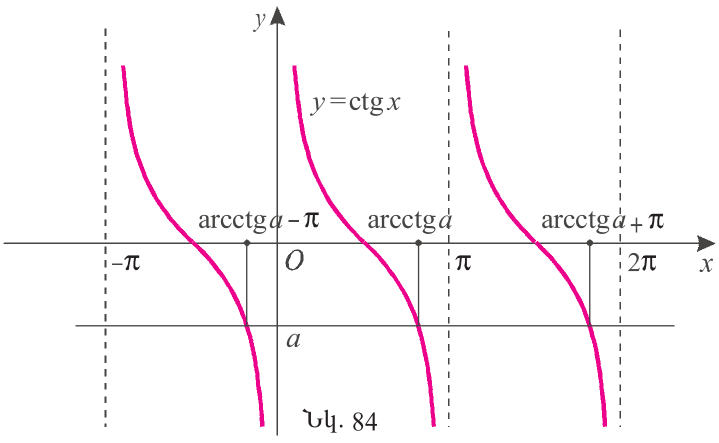
> $\operatorname{ctg} x = a$ ***հավասարման լուծումն է՝***
>
> $$x = \operatorname{arcctg} a + \pi k,\quad k \in \mathbf{Z}: \qquad (10)$$

Նշենք նաև, որ երբ $a \neq 0$, $\operatorname{ctg} x = a$ հավասարումը համարժեք է $\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{a}$ հավասարմանը:

Օրինակ 7: Լուծենք $\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2} = 0$ հավասարումը:

Քանի որ $\operatorname{arcctg} 0 = \dfrac{\pi}{2}$, ուստի՝ $\dfrac{x}{2} = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, որտեղից՝ $x = \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$:

Պատասխան՝ $\pi + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$:



Նկ. 84

Օրինակ 8: Լուծենք $\operatorname{ctg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ հավասարումը: Այն համարժեք է $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$ հավասարմանը, որի լուծումն է՝ $x = -\frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$:

Պատասխան՝ $-\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Գրեք $\sin x = 1$ և $\sin x = -1$ հավասարումների լուծումները:
2. Ո՞րն է $\sin x = a$ հավասարման լուծումը:
3. Ո՞րն է $\sin x = 0$ հավասարման լուծումը:
4. Գրեք $\cos x = 1$ և $\cos x = -1$ հավասարումների լուծումները:
5. Ո՞րն է $\cos x = a$ հավասարման լուծումը:
6. Ո՞րն է $\cos x = 0$ հավասարման լուծումը:
7. Որո՞նք են $\operatorname{tg} x = a$ և $\operatorname{ctg} x = a$ հավասարումների լուծումները:

Առաջադրանքներ

Լուծել հավասարումը (480-485).

488. ա) $\sin x = \frac{1}{2}$, բ) $\sin 3x = 1$, գ) $2\sin 4x = \sqrt{3}$,
դ) $2\sin x + 1 = 0$, ե) $\sin 3x = 0$, զ) $3\sin 2x = 2$,
է) $\sin \frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, ը) $\sin \frac{x}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, թ) $2\sin \frac{x}{5} = -\sqrt{2}$:

489. ա) $\cos x = -1$, բ) $\sqrt{2}\cos 2x - 1 = 0$, գ) $2\cos x - \sqrt{3} = 0$,
դ) $\cos \frac{x}{2} = -\frac{1}{2}$, ե) $2\cos 2x + \sqrt{2} = 0$, զ) $\cos 3x = 0$,
է) $2\cos 4x + \sqrt{3} = 0$, ը) $3\cos x = \sqrt{5}$, թ) $\cos \frac{x}{3} = 1$:

490. ա) $\operatorname{tg} x = 1$, բ) $\operatorname{tg} 2x = 3$, գ) $\sqrt{3}\operatorname{tg} 2x = 3$,

դ) $3\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$, ե) $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 0$, զ) $\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{x}{3} + 1 = 0$,

է) $\sqrt{2}\operatorname{tg} x = -2$, ը) $\operatorname{tg} 3x = -1$, թ) $\operatorname{tg} 5x = 7$:

491. ա) $\operatorname{ctg} 2x = 0$, բ) $\operatorname{ctg} 3x = -\sqrt{3}$, գ) $\operatorname{ctg}\frac{x}{2} = 1$,

դ) $\sqrt{3}\operatorname{ctg} 2x + 1 = 0$, ե) $\operatorname{ctg} x = -1$, զ) $\operatorname{ctg} 2x = 2$:

➤**492.** ա) $2\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}$, բ) $2\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{3}$,

գ) $\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 3$, դ) $\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = -1$:

➤**493.** ա) $\cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = -\frac{1}{2}$, բ) $2\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2}\right) = \sqrt{3}$,

գ) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = 1$, դ) $2\cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = \sqrt{2}$:

Կրկնության համար

➤**494.** Ապացուցել, որ երեք հաջորդական թվանշաններով գրված կամայական եռանիշ թիվ բաժանվում է 3-ի:

➤**495.** Ապացուցել, որ $\underbrace{22\cdots2}_{222 \text{ հատ}}$ թիվը բաժանվում է 6-ի:

§6. Եռանկյունաչափական հավասարումներ

Հնարավոր չէ դասակարգել բոլոր եռանկյունաչափական հավասարումները և տալ դրանց լուծման եղանակները: Այս պարագրաֆում կքննարկենք եռանկյունաչափական հավասարումների լուծման որոշ եղանակներ:

1) Արտադրիչների վերլուծման եղանակ:

Օրինակ 1: Լուծենք $\sin x - \sin 2x = 0$ հավասարումը:

Կիրառելով $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ նույնությունը՝ ստանում ենք՝

$$\sin x(1 - 2\cos x) = 0$$

հավասարումը: Ուստի՝

$$\left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \cos x = \frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \pi k,\ k \in \mathbf{Z}\\ x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}\end{array}\right.:$$

Պատասխան՝ $\pi k,\ \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$:

Օրինակ 2: Լուծենք $\cos 3x + \cos 11x = 0$ հավասարումը:

Կոսինուսների գումարը վերածելով արտադրյալի, կստանանք.

$$2\cos 7x \cdot \cos 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 7x = 0 \\ \cos 4x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = \dfrac{\pi}{14} + \dfrac{\pi k}{7}, & k \in \mathbf{Z} \\ x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi k}{4}, & k \in \mathbf{Z} \end{array}\right. :$$

Պատասխան՝ $\dfrac{\pi}{14} + \dfrac{\pi k}{7},\ \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi k}{4},\ k \in \mathbf{Z}$:

2) $a \sin x + b \cos x = 0$ տեսքի համասեռ հավասարումներ ($ab \neq 0$):

Այս հավասարմանը բավարարող x-երի համար $\cos x \neq 0$: Իրոք, եթե $\cos x$-ը զրո է, ապա տեղադրելով հավասարման մեջ, ստանում ենք, որ $\sin x$-ը ևս զրո է, որը հակասում է $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ նույնությանը: Հետևաբար, հավասարման երկու մասերը կարելի է բաժանել $a \cos x$-ի և ստանալ

$$\operatorname{tg} x = -\frac{b}{a}$$

պարզագույն հավասարումը:

Օրինակ 3: Լուծենք $2\sin 2x - 3\cos 2x = 0$ հավասարումը:

Քանի որ $\cos 2x \neq 0$ տրված հավասարման երկու մասերը բաժանելով $2\cos 2x$-ի, ստանում ենք $\operatorname{tg} 2x = 1{,}5$, որտեղից՝

$$2x = \operatorname{arctg} 1{,}5 + \pi k \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{3}{2} + \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbf{Z}:$$

Պատասխան՝ $\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{3}{2} + \dfrac{\pi k}{2},\ k \in \mathbf{Z}$:

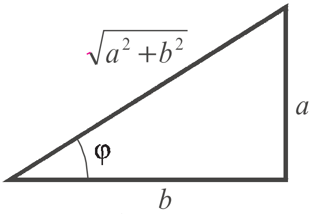
3) $a \sin x + b \cos x = c$ տեսքի հավասարումներ ($abc \neq 0$):

Դիտարկենք այն դեպքը, երբ $a > 0,\ b > 0$ (մնացած դեպքերում հավասարումը լուծվում է հանգունորեն): Հավասարման երկու մասերը բաժանենք $\sqrt{a^2 + b^2}$-ի.

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}:$$

Դիտարկելով a, b էջերով և φ սուր անկյունով ուղղանկյուն եռանկյունը (նկ. 85), տեսնում ենք, որ

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varphi, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{a}{b}:$$



Նկ. 85

Տեղադրելով ստացված հավասարման մեջ՝ ստանում ենք

$$\sin\varphi\sin x+\cos\varphi\cos x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

հավասարումը, որը հանգում է

$$\cos(x-\varphi)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

պարզագույն հավասարմանը: Այն կունենա լուծում, եթե աջ մասի բացարձակ արժեքը մեծ չլինի 1-ից, այսինքն՝ $|c|\le\sqrt{a^2+b^2}$, և այդ դեպքում.

$$x-\varphi=\pm\arccos\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}+2\pi k\,,\ \ k\in\mathbf{Z}:$$

Հետևաբար՝ $x=\operatorname{arctg}\dfrac{a}{b}\pm\arccos\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}+2\pi k,\ \ k\in\mathbf{Z}:$

Օրինակ 4: Լուծենք $\sin x+\sqrt{3}\cos x=1$ հավասարումը:

Հավասարման երկու մասերը բաժանելով 2-ի՝ ստանում ենք՝

$$\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\frac{1}{2}:$$

Հաշվի առնելով, որ $\dfrac{1}{2}=\sin\dfrac{\pi}{6}$ և $\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\cos\dfrac{\pi}{6}$, ստանում ենք

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$$

հավասարումը, որտեղից՝ $x-\dfrac{\pi}{6}=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\quad k\in\mathbf{Z}:$

Պատասխան՝ $-\dfrac{\pi}{6}+2\pi k;\ \dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ \ k\in\mathbf{Z}:$

4) Նույնական ձևափոխություններով քառակուսային հավասարման բերվող հավասարումներ:

Օրինակ 5: Լուծենք $2\cos^2 x-5\cos x+2=0$ հավասարումը:

Նշանակելով $\cos x=t$, ստանում ենք՝

$$2t^2-5t+2=0$$

քառակուսային հավասարումը, որի լուծումն է՝ $t=2$ կամ $t=0{,}5$:

Հաշվի առնելով, որ $\cos x=2$ հավասարումն արմատ չունի և լուծելով $\cos x=\dfrac{1}{2}$ հավասարումը, կստանանք՝ $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi k, k\in\mathbf{Z}:$

Պատասխան՝ $\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\ \ k\in\mathbf{Z}:$

Օրինակ 6: Լուծենք $\cos 4x+2\cos^2 x=1$ հավասարումը:

Տեղադրելով $\cos 4x$-ի փոխարեն $2\cos^2 2x-1$, իսկ $2\cos^2 x$-ի փոխարեն՝

$1+\cos 2x$, ստանում ենք՝

$$2\cos^2 2x+\cos 2x-1=0:$$

Նշանակելով $\cos 2x=t$ և գտնելով ստացված

$$2t^2+t-1=0$$

քառակուսային հավասարման $t_1=-1,\ t_2=\dfrac{1}{2}$ արմատները, հանգում ենք հետևյալ համախմբին՝

$$\left[\begin{array}{l}\cos 2x=-1\\ \cos 2x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x=\pi+2\pi k,\ k\in\mathbf{Z}\\ 2x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbf{Z}\end{array}\right.:$$

Պատասխան՝ $\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ \pm\dfrac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbf{Z}$:

Օրինակ 7: Լուծենք $3\cos^4 x-2\sin^4 x+2=0$ հավասարումը: Նշանակենք $\sin^2 x=t$: Այդ դեպքում $\cos^2 x=1-t$, ուստի տեղադրելով $\sin^4 x=t^2$, $\cos^4 x=(1-t)^2$ և կատարելով նման անդամների միացում, ստանում ենք՝

$$t^2-6t+5=0$$

հավասարումը, որի լուծումն է՝ $t=5$ կամ $t=1$: Հետևաբար՝

$$\left[\begin{array}{l}\sin^2 x=5\\ \sin^2 x=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\varnothing\\ \sin x=\pm 1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=1\\ \sin x=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbf{Z}\\ x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbf{Z}\end{array}\right.:$$

Պատասխան՝ $\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbf{Z}$:

5) $A\sin^2 x+B\sin x\cos x+C\cos^2 x=0$ տեսքի համասեռ հավասարումներ ($AC\neq 0$):

Հավասարմանը բավարարող x-երի դեպքում $\cos x\neq 0$ (ինչո՞ւ), ուստի հավասարման երկու մասերը կարող ենք բաժանել $\cos^2 x$-ի և ստանալ նրան համարժեք քառակուսային հավասարում $\operatorname{tg} x$-ի նկատմամբ.

$$A\operatorname{tg}^2 x+B\operatorname{tg} x+C=0:$$

Օրինակ 8: Լուծենք $3\sin x\cos x-3\cos^2 x=\cos 2x$ հավասարումը:

$$3\sin x\cos x-3\cos^2 x=\cos 2x\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\sin x\cos x-3\cos^2 x=\cos^2 x-\sin^2 x\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x+3\sin x\cos x-4\cos^2 x=0\ \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 x+3\operatorname{tg} x-4=0\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg} x=1\\ \operatorname{tg} x=-4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbf{Z}\\ x=-\operatorname{arctg} 4+\pi k,\ k\in\mathbf{Z}\end{array}\right.:$$

Պատասխան՝ $\dfrac{\pi}{4}+\pi k;-\operatorname{arctg} 4+\pi k,\ k\in\mathbf{Z}$:

Օրինակ 9: Լուծենք $\cos 7x\cos 13x = \cos x\cos 19x$ հավասարումը: Նախ արտադրյալները դարձնենք գումար՝

$$\frac{1}{2}(\cos 6x + \cos 20x) = \frac{1}{2}(\cos 18x + \cos 20x),$$

որտեղից՝ $\cos 6x - \cos 18x = 0$:

Կոսինուսների տարբերությունը վերածելով արտադրյալի՝ ստանում ենք՝

$$2\sin 6x\sin 12x = 0$$

հավասարումը, որտեղից՝ $\sin 6x = 0$ կամ $\sin 12x = 0$:

Քանի որ $\sin 6x = 0$ հավասարությունից հետևում է $\sin 12x = 2\sin 6x\cos 6x = 0$ հավասարությունը, բավական է լուծել $\sin 12x = 0$ հավասարումը՝ $x = \frac{\pi k}{12}$, $k \in \mathbf{Z}$:

Պատասխան՝ $\frac{\pi}{12}k$, $k \in \mathbf{Z}$:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ինչպե՞ս լուծել $a\sin x + b\cos x = 0$ տեսքի հավասարումը:
2. Ինչպե՞ս լուծել $a\sin x + b\cos x = c$ տեսքի հավասարումը:
3. Ինչպե՞ս լուծել $A\sin^2 x + B\sin x\cos x + C\cos^2 x = 0$ տեսքի հավասարումը:

Առաջադրանքներ

Լուծել հավասարումը (496-499).

496. ա) $2\sin^2 x - \sin x = 0$, բ) $\sqrt{3}\sin x - \sin 2x = 0$,
գ) $\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x = 0$, դ) $5\cos x = \sin 2x$:

497. ա) $2\sin x + \operatorname{tg}(\pi - x) = 0$, բ) $\operatorname{ctg}\frac{x}{2} + \cos(\pi - x) = 1$,
գ) $\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{ctg}(x + \pi)$, դ) $2\sin x\cos x + 4\cos x = \sin x + 2$:

498. ա) $\sin x + \cos x = 0$, բ) $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 0$,
գ) $\cos x - 2\sin x = 0$, դ) $4\cos x + \sin x = 0$:

499. ա) $\sin 8x + \sin 2x = 0$, բ) $\cos 5x + \cos 9x = 0$,
գ) $\sin 7x = \sin(\pi - 3x)$, դ) $\cos 6x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 4x\right)$,
ե) $\sin 9x - \cos x = 0$, զ) $\sin 2x + \cos 6x = 0$:

➤**500.** Օգտվելով 450 և 459 առաջադրանքներից, լուծել հավասարումը.
ա) $\sin 5x = \sin 2x$, բ) $\cos 3x = \cos 2x$,
գ) $\operatorname{tg}7x - \operatorname{tg}3x = 0$, դ) $\operatorname{ctg}4x - \operatorname{ctg}6x = 0$:

➤**501.** ա) $\cos x - \sqrt{3}\sin x = \sqrt{2}$, բ) $\cos 2x + \sin 2x = 1$, գ) $\cos x+\sin(-x)=-\sqrt{2}$,   դ) $\mathrm{ctg}4x-\mathrm{ctg}6x=0$:

➢**502.** ա) $\sin(\pi+3x)+\cos(\pi-3x)=\sqrt{1{,}5}$,

բ) $\sin\dfrac{x-3\pi}{2}+\sqrt{3}\cos\dfrac{x+3\pi}{2}=\sqrt{3}$,   գ) $\cos 2x+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-2x\right)=\sqrt{2}$:

* **503.** ա) $\sqrt{3}\cos x+\sin x=2\cos 3x$,   բ) $\cos x+\sin x=\sqrt{2}\sin 3x$,

գ) $\cos 7x-\sin 5x=\sqrt{3}(\cos 5x-\sin 7x)$:

* **504.** ա) $3\cos 5x+4\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+5x\right)=5$,   բ) $12\sin x+5\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right)=6{,}5$:

505. ա) $2\sin^2 x+\sin x-1=0$,   բ) $3\sin^2 x-5\sin x-2=0$,

գ) $6\cos^2 x+\cos x-1=0$,   դ) $4\cos^2 x-8\cos x+3=0$:

506. ա) $3\,\mathrm{tg}^2 x+2\,\mathrm{tg}\,x-1=0$,   բ) $2\,\mathrm{tg}^2 x+3\,\mathrm{tg}\,x-2=0$,

գ) $\mathrm{tg}\,x-2\,\mathrm{ctg}\,x+1=0$,   դ) $2\,\mathrm{ctg}\,x-3\,\mathrm{tg}\,x+5=0$:

507. ա) $2\cos^2 x+5\sin x-4=0$,   բ) $\cos 2x+3\sin x=2$,

գ) $\cos 2x-5\sin x-3=0$,   դ) $-2+3\cos x=\cos 2x$:

508. ա) $\cos^4 x+\sin^4 x=1$,   բ) $7\cos^4 2x+\sin^4 2x=1$,

գ) $4\sin^4 x-1=5\cos^2 x$,   դ) $\sin^4\dfrac{x}{4}-\cos^4\dfrac{x}{4}=\dfrac{1}{2}$:

* **509.** ա) $\sin^4 x+\cos^3 x=1$,   բ) $\cos^4 x-\sin^3 x=1$,

գ) $\sin^3 x\cos 3x+\cos^3 x\sin 3x=\dfrac{3}{8}$:

510. ա) $3\sin^2 x-\sin x\cos x=2\cos^2 x$,   բ) $2\cos^2 x-3\sin x\cos x+\sin^2 x=0$,

գ) $9\sin x\cos x-7\cos^2 x=2\sin^2 x$,   դ) $2\sin^2 x-\sin x\cos x=\cos^2 x$:

➢**511.** ա) $2\sin 2x=6\cos^2 x-1$,   բ) $2\sin^2 x-\cos 2x+\sin 2x=0$,

գ) $5\sin x\cos x+1=7\cos^2 x$,   դ) $1+3\cos^2 x=5\sin x\cos x$:

512. ա) $\cos 7x\cos 13x=\cos x\cos 19x$,   բ) $\sin x\sin 6x=\sin 8x\sin 3x$,

գ) $\sin 5x\cos 3x=\sin 9x\cos 7x$,   դ) $\sin x\cos 5x=\sin 2x\cos 4x$:

513. ա) $\cos 4x+\cos 2x=\cos 9x+\cos 3x$,

բ) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x=0$,   գ) $\sin 8x-\sin 6x+\sin 4x=\sin 2x$:

➢**514.** ա) $\sin^2 x+\sin^2 2x+\sin^2 3x=1{,}5$,   բ) $\cos^2 x+\cos^2 2x-\sin^2 3x=0{,}5$,

գ) $\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2}\right)-\sin^2\left(\dfrac{3\pi}{4}+\dfrac{x}{2}\right)=\sin\dfrac{7\pi}{6}\sin 3x$:

➢**515.** ա) $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+3x\right)-\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-x\right)=\sin(\pi+x)$, բ) $\cos\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)$:

➢**516.** ա) $\operatorname{tg}4x\cdot\operatorname{tg}2x=1$, բ) $\operatorname{tg}2x-\operatorname{tg}x=0$,

գ) $\operatorname{tg}2x\cdot\operatorname{tg}x=-3$, դ) $1+\operatorname{tg}^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}$:

➢**517.** ա) $\operatorname{tg}x-\sin 2x=0$, բ) $\operatorname{tg}3x+\cos 6x=1$,

գ) $6\operatorname{ctg}^2 x-4\cos^2 x=15$, դ) $2\operatorname{tg}^4 x-3\operatorname{tg}^2 x+1=0$:

➢**518.** ա) $\sin^6 x-\cos^6 x=1$, բ) $\sin^6 x+\cos^6 x=1$,

գ) $\sin^6 x+\cos^6 x=\cos 2x$, դ) $\sin^6 x-\cos^6 x=\cos 2x$:

➢**519.** ա) $\sin 3x-\sin 7x=\sqrt{3}\sin 2x$, բ) $(1+\cos 4x)\sin x=\cos^2 2x$,

գ) $\sin x\cos x\cos 2x\cos 4x=\frac{\sqrt{2}}{16}$, դ) $\cos^3 x\sin x-\sin^3 x\cos x=\frac{\sqrt{2}}{8}$:

Կրկնության համար

520. Մի քանի միատեսակ տրակտորներով բրիգադը 5 օր վարեց դաշտը: Վեցերորդ օրը ավելացվեց նույնպիսի մի տրակտոր, որի շնորհիվ արտադրողականությունը մեծացավ 25 %-ով: Եվս վեց օր աշխատելով՝ բրիգադն ավարտեց աշխատանքը՝ ընդհանուր առմամբ վարելով 100 հա:

ա) Աշխատանքի սկզբում քանի՞ տրակտոր էր աշխատում:

բ) Մի տրակտորն օրական քանի՞ հեկտար էր վարում:

գ) Առաջին չորս օրվա ընթացքում դաշտի ո՞ր տոկոսը վարեց բրիգադը:

դ) Առաջին վեց օրվա ընթացքում քանի՞ հեկտար վարեց բրիգադը:

521. Յոթ միատեսակ կոմբայններով կազմված բրիգադը կարող է դաշտը հնձել 10 օրում:

ա) Քանի՞ օրում կհնձեն դաշտը, եթե աշխատի միայն հինգ կոմբայն:

բ) Քանի՞ օր է անհրաժեշտ դաշտը հնձելու համար, եթե կոմբայններն աշխատեն 60 %-ով պակաս արտադրողականությամբ:

գ) Քանի՞ օրում կավարտվի հունձը, եթե աշխատեն 25 %-ով ավել արտադրողականությամբ:

դ) Եթե կոմբայններն աշխատանքային օրվա կեսն աշխատեն երկու անգամ ավելի արագ, իսկ կեսօրից հետո երկու անգամ ավելի դանդաղ, քանի՞ օրում կավարտվի հունձը:

5-րդ ԳԼՈՒԽ

Կոմպլեքս թվեր

§1. Կոմպլեքս թվեր, թվաբանական գործողություններ դրանց հետ

Այս գլխում ընդլայնելու ենք թվերի մասին մեր պատկերացումները: Իրական թվերի բազմությունն ընդարձակելու ենք այնպես, որ նոր թվերի համար պահպանվեն այն օրենքները, որոնց բավարարում են իրական թվերի համար գումարման, հանման, բազմապատկման և բաժանման գործողությունները:

Ուսումնասիրելով քառակուսային հավասարումները՝ հանդիպում ենք դեպքերի, երբ հավասարումներն արմատ չունեն: Օրինակ՝

$$x^2+1=0 \qquad (1)$$

հավասարումն արմատ չունի: Պատճառն այն է, որ յուրաքանչյուր իրական թվի քառակուսին ոչ բացասական թիվ է, որին 1 գումարելով 0 չի ստացվի: Հետևաբար՝ որպեսզի (1) հավասարումն ունենա արմատ, պետք է ներմուծել այնպիսի «թիվ», որի քառակուսին -1 է: Այդ երևակայական (ոչ իրական) թիվը նշանակում են i-ով և անվանում ***կեղծ միավոր***: Այսպիսով՝

$$\boldsymbol{i^2=-1}:$$

Իրական b թվի և i կեղծ միավորի արտադրյալը՝ bi-ն, կոչվում է ***կեղծ թիվ***: Համարում ենք, որ $bi=ib$:

Իրական և կեղծ թվերի արտադրյալը սահմանվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$(b_1)\cdot(b_2i)=(b_2i)\cdot(b_1)=(b_1\cdot b_2)i\,,\ b_1,b_2\in R\,,$$

իսկ կեղծ թվերի արտադրյալը՝

$$(b_1i)\cdot(b_2i)=b_1b_2i^2=-b_1b_2$$

բանաձևով: Օրինակ՝

$$5\cdot 3i=15i\,,\ (-0{,}5)\cdot 4i=-2i\,,\ 5i\cdot 2i=-10\,,\ -\sqrt{2}\,i\cdot\sqrt{18}\,i=6:$$

Իրական և կեղծ թվերի գումարն անվանում են կոմպլեքս թիվ, այսինքն՝

Կոմպլեքս թիվ է կոչվում $a+bi$ արտահայտությունը, որտեղ a-ն և b-ն իրական թվեր են:

Պարզ է, որ իրական և կեղծ թվերը նույնպես կոմպլեքս թվեր են:

Եթե $z=a+bi$, որտեղ a-ն և b-ն իրական թվեր են, ապա a-ն անվանում են z կոմպլեքս թվի ***իրական մաս***, bi-ն՝ ***կեղծ մաս***, իսկ b-ն՝ ***կեղծ մասի գործակից***: Պայմանավորվենք, որ եթե ասում ենք (գրում ենք) z կոմպլեքս թիվը հավասար է $a+bi$, ապա $a,b\in R$:

z կոմպլեքս թվի իրական և կեղծ մասերի համար ընդունված են $\operatorname{Re} z$ և $\operatorname{Im} z$ նշանակումները.

Եթե $z=a+bi$, ապա $\operatorname{Re} z=a$ և $\operatorname{Im} z=bi$:

Եթե z-ն իրական թիվ է, ապա $\operatorname{Im} z=0$, և եթե z-ը կեղծ թիվ է, ապա $\operatorname{Re} z=0$:

Երկու կոմպլեքս թվեր հավասար են, եթե նրանց իրական մասերն իրար են հավասար, կեղծ մասերը՝ իրար:

Կոմպլեքս թվերի գումարը (տարբերությունը) կոմպլեքս թիվ է, որի իրական մասը գումարելիների իրական մասերի գումարն է (տարբերությունը), իսկ կեղծ մասը՝ կեղծ մասերի գումարը (տարբերությունը).

Եթե $z_1=a_1+b_1i$ և $z_2=a_2+b_2i$, ապա՝

$$z_1\pm z_2=(a_1+a_2)\pm(b_1+b_2)i:$$

Կոմպլեքս թվերի արտադրյալը սահմանելիս օգտվում են փակագծերը բացելու կանոններից.

$$z_1z_2=(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)=$$
$$=a_1a_2+a_1b_2i+b_1a_2i+b_1b_2i^2=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i:$$

Այսպիսով՝

Եթե $z_1=a_1+b_1i$ և $z_2=a_2+b_2i$, ապա

$$z_1z_2=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i: \qquad (2)$$

$z=a+bi$ կոմպլեքս թվի համալուծ թիվ կամ պարզապես ***համալուծ*** անվանում են $a-bi$ կոմպլեքս թիվը և նշանակում $\bar{z}$-ով.

եթե $z=a+bi$, ապա $\bar{z}=a-bi$:

Օրինակ՝ $\overline{3+2i}=3-2i$, $\overline{1-2i}=1+2i$: Ակնհայտ է, որ $\operatorname{Re}\bar{z}=\operatorname{Re}z$ և $\operatorname{Im}\bar{z}=-\operatorname{Im}z$: Պարզ է նաև, որ z-ի համալուծի համալուծը z-ն է: Այսինքն՝ $\bar{\bar{z}}=z$:

Կոմպլեքս թվի ***մոդուլը*** (բացարձակ արժեքը) սահմանվում է այսպես.

եթե $z=a+bi$, ապա $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$:

Կոմպլեքս թվի համալուծի և մոդուլի երկրաչափական իմաստը պարզ կդառնա հաջորդ պարագրաֆում: Այժմ նկատենք, որ (ստուգեք ինքնուրույն)

$$z\cdot\bar{z}=|z|^2: \qquad (3)$$

Գտնենք $z_1=a_1+b_1i$ և $z_2=a_2+b_2i$ կոմպլեքս թվերի ($z_2\neq 0$) քանորդը, այն $z=a+bi$ կոմպլեքս թիվը, որը բազմապատկելով z_2-ով, կստանանք z_1-ը.

$$z_1=z\cdot z_2:$$

Այս հավասարության երկու մասերը բազմապատկելով z_2-ի համալուծով և հաշվի առնելով (3) հավասարությունը, կստանանք $z_1\bar{z}_2=z\cdot|z_2|^2$: Քանի որ $|z_2|^2\neq 0$, ստանում ենք՝

$$z=\frac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2}=\frac{(a_1+ib_1)(a_2-ib_2)}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{\sqrt{a^2+b^2}}i:$$

Այսպիսով՝

եթե $z_1=a_1+b_1i$ և $z_2=a_2+b_2i$, ապա

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\frac{b_1a_2-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i: \qquad (4)$$

Սակայն կոմպլեքս թվերը բազմապատկելու կամ բաժանելու համար հարկ չկա հիշել (2) և (4) բանաձևերը: Բավական է կիրառել փակագծեր բացելու կանոններն ու կոտորակի հատկությունները:

Օրինակ: Հաշվենք $\left(3-i\sqrt{2}\right)$ և $\left(\sqrt{2}-3i\right)$ կոմպլեքս թվերի արտադրյալն ու քանորդը:

Արտադրյալը հաշվելու համար բացենք փակագծերը և կատարենք անհրաժեշտ գործողությունները.

$$\left(3-i\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}-3i\right)=3\sqrt{2}-9i-2i+3\sqrt{2}\,i^2=-11i:$$

Քանորդը հաշվելու համար կոտորակի համարիչն ու հայտարարը բազմապատկենք հայտարարի համալուծով (հայտարարը դարձնենք իրական թիվ).

$$\frac{3-i\sqrt{2}}{\sqrt{2}-3i}=\frac{\left(3-i\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}+3i\right)}{\left(\sqrt{2}-3i\right)\left(\sqrt{2}+3i\right)}=\frac{6\sqrt{2}+7i}{11}=\frac{6\sqrt{2}}{11}+\frac{7}{11}i:$$

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ո՞ր «թիվն» են նշանակում i -ով, և ինչպե՞ս են այն անվանում:
2. Ո՞ր թվերն են անվանում կեղծ թվեր:
3. Ո՞ր թվերն են անվանում կոմպլեքս թվեր:
4. Ինչպե՞ս են նշանակում կոմպլեքս թվի իրական և կեղծ մասերը:
5. Ինչպե՞ս են գտնում կոմպլեքս թվերի գումարը, տարբերությունը և արտադրյալը:
6. Ո՞րն է $a+bi$ կոմպլեքս թվի համալուծը:
7. Ինչի՞ է հավասար $z\cdot\bar{z}$ -ը:
8. Ինչպե՞ս են գտնում կոմպլեքս թվերի քանորդը:

Առաջադրանքներ

522. Գտնել արտահայտության արժեքը.

ա) i^2, բ) i^3, գ) i^4, դ) i^{25}, ե) i^{42}, զ) i^{67}, է) i^{80}:

Արտահայտությունը գրել $a+bi$ տեսքով (523-527)

523. ա) $(5+2i)+(8+9i)$, բ) $(4+10i)+(1-8i)$,
գ) $(7+6i)+(-3-5i)$, դ) $(3-7i)+(-6+7i)$,
ե) $(3+4i)+(4+5i)+(5+6i)$, զ) $(-2-7i)+(1+3i)-(12+i)$:

524. ա) $3(8-4i)$, բ) $2(7+2i)$, գ) $3(8+4i)$, դ) $7(1-3i)$:

525. ա) $2(3+i)+3(2+i)$, բ) $5(4+3i)-4(-1+2i)$,
գ) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}i\right)+\left(\frac{5}{2}+\frac{5}{3}i\right)$, դ) $\left(\frac{2}{5}+\frac{5}{4}i\right)+\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{4}i\right)$,
ե) $\left(3\sqrt{2}+i\right)-\left(\sqrt{2}-i\right)$, զ) $\left(1+i2\sqrt{3}\right)+\left(2-i\sqrt{3}\right)$:

526. ա) $(5+i)(3+4i)$, բ) $(6+3i)(7+2i)$, գ) $(5-2i)(1+5i)$,
դ) $(13-3i)(2-8i)$, ե) $(-3-i)(4+7i)$, զ) $(3-2i)(5+i)(4-2i)$,
է) $(1+i)(2+i)(3+i)$, ը) $i(4-2i)(3+2i)$:

527. ա) $(8+5i)^2$, բ) $(2-9i)^2$, գ) $(2+3i)^3$, դ) $(1-2i)^3$:

528. Գտնել տրված կոմպլեքս թվի համալուծը.

ա) $2+3i$, բ) $5-2i$, գ) $\sqrt{3}+i$, դ) $1-i\sqrt{5}$:

529. Գտնել $z+\bar{z}$ և $z\cdot\bar{z}$ թվերը, եթե՝

ա) $z=3+5i$, բ) $z=2-7i$, գ) $z=2\sqrt{2}+i\sqrt{2}$, դ) $z=\sqrt{3}-2i$:

530. Ապացուցել, որ՝

ա) $z+\bar{z}=2\operatorname{Re} z$, բ) $z-\bar{z}=2\operatorname{Im} z$, գ) $\operatorname{Re}(iz)=i\operatorname{Im} z$,

դ) $\operatorname{Im}(iz)=i\operatorname{Re} z$, ե) $\operatorname{Re} z_1+\operatorname{Re} z_2=\operatorname{Re}(z_1+z_2)$:

➢**531.** Ապացուցել, որ կամայական z_1 և z_2 կոմպլեքս թվերի դեպքում

ա) $\bar{z}_1+\bar{z}_2=\overline{z_1+z_2}$, բ) $\bar{z}_1-\bar{z}_2=\overline{z_1-z_2}$,

գ) $\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2=\overline{z_1\cdot z_2}$, դ) $\frac{1}{\bar{z}}=\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}$:

532. Ապացուցել, որ եթե $|z_1|=|z_2|=1$, ապա՝

ա) $|\bar{z}_1|=1$, բ) $|z_1\cdot z_2|=1$, գ) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=1$:

➢**533.** Ապացուցել, որ կամայական z_1 և z_2 կոմպլեքս թվերի դեպքում

ա) $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$, բ) $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$, գ) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$:

534. Ապացուցել, որ կամայական z_1 և z_2 կոմպլեքս թվերի դեպքում

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right):$$

535. Ապացուցել, որ $x^2+1=0$ հավասարման լուծումը $x=\pm i$-ն է:

➢**536.** Արտահայտությունը գրել $a+bi$ տեսքով.

ա) $\frac{1}{i}$, բ) $\frac{2i-3}{3-i}$, գ) $\frac{i+1}{i-1}$, դ) $\frac{5-i}{2i-1}$,

ե) $\frac{11+4i}{3+i}$, զ) $\frac{3+5i}{6-8i}$, է) $\frac{28-3i}{1-i}$, ը) $\frac{(3-4i)^2}{1+i}$:

➢**537.** Հաշվել $z_1=2\left(\cos 75^\circ+i\sin 75^\circ\right)$ և $z_2=5\left(\cos 15^\circ+i\sin 15^\circ\right)$ կոմպլեքս թվերի արտադրյալն ու քանորդը:

➢**538.** Տրված են $z_1=1+i$, $z_2=2+i$ և $z_3=3+i$: Գտնել.

ա) $\frac{z_1 z_2}{z_3}$, բ) $\frac{(z_2)^2}{z_1}$, գ) $\frac{2z_1+5z_2}{z_3}$, դ) $\frac{2z_1+2\bar{z}_2}{\operatorname{Im} z_3}$,

ե) $\left|\frac{2z_1-z_3}{z_2}\right|$, զ) $\operatorname{Re}\frac{z_1+2z_2}{z_1-z_2}$, է) $\left|\frac{z_1+z_2}{z_2+z_3}\right|$, ը) $\frac{\operatorname{Re} z_2-2\operatorname{Im} z_3}{z_1+\bar{z}_2}$:

539. Վերլուծել գծային արտադրիչների.

ա) z^2+1, բ) z^2+9, գ) z^4-1, դ) z^4-16:

Կրկնության համար

540. Արտահայտությունը բերել $a\sqrt{c}+b\sqrt{d}$ տեսքի ($a,b\in Z$, $c,d\in N$).

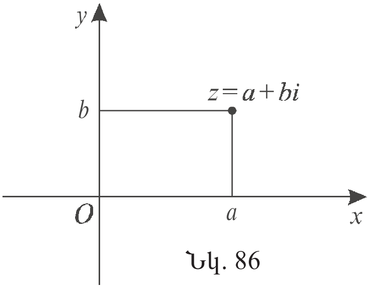
ա) $\dfrac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}+\dfrac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$, բ) $\dfrac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}+\dfrac{5}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$:

541. Ստուգել հավասարությունը.

ա) $(4+\sqrt{15})(\sqrt{10}-\sqrt{6})\sqrt{4-\sqrt{15}}=2$, բ) $\sqrt{3-\sqrt{5}}\cdot(3+\sqrt{5})\cdot(\sqrt{10}-\sqrt{2})=8$:

§2. Կոմպլեքս հարթություն, կոմպլեքս թվի եռանկյունաչափական տեսքը

Յուրաքանչյուր $z=a+bi$ կոմպլեքս թվի համապատասխանեցնենք կոորդինատային հարթության $(a;b)$ կետը, որի աբսցիսը z-ի իրական մասն է, իսկ օրդինատը՝ կեղծ մասի գործակիցը: Պարզ է, որ տարբեր կոմպլեքս թվերի կհամապատասխանեն հարթության տարբեր կետեր և հարթության ամեն մի կետի կհամապատասխանի որևէ կոմպլեքս թիվ: Այսպիսով՝ փոխմիարժեք համապատասխանություն է ստեղծվում կոմպլեքս թվերի և կոորդինատային հարթության կետերի միջև: Ուստի կոորդինատային հարթությունն անվանում են նաև ***կոմպլեքս հարթություն*** (նկ. 86): Պարզ է, որ աբսցիսների առանցքի վրա կպատկերվեն իրական թվերը, իսկ օրդինատների առանցքի վրա՝ կեղծ թվերը: Այս պատճառով կոմպլեքս հարթության աբսցիսների առանցքն անվանում են ***իրական առանցք***, իսկ օրդինատների առանցքը՝ ***կեղծ առանցք***:

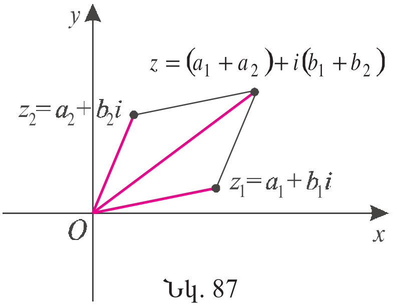


Նկ. 86

Դիտարկենք $z_1=a_1+b_1i$ և $z_2=a_2+b_2i$ կոմպլեքս թվերը և դրանց գումարը՝

$$z=z_1+z_2=(a_1+a_2)+i(b_1+b_2):$$

Կոմպլեքս հարթության վրա նրանց համապատասխանում են $(a_1;b_1)$, $(a_2;b_2)$ և $(a_1+a_2;b_1+b_2)$ կետերը:

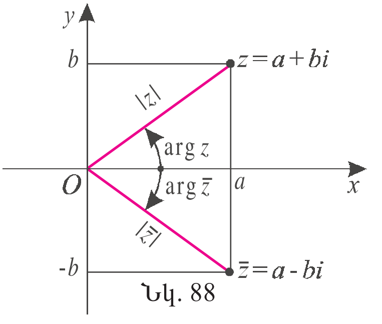


Նկ. 87

Փաստորեն, z_1, z_2 կոմպլեքս թվերի գումարումը հարթության վրա համապատասխանում է $O(0;0)$ սկզբնակետով և z_1, z_2 վերջնակետերով վեկտորների գումարման զուգահեռագծի կանոնին (նկ. 87):

Հանգունորեն, կոմպլեքս թիվը իրական թվով բազմապատկվում է այնպես, ինչպես հարթության վրա վեկտորը՝ իրական թվով:

Պարզ է, որ կոմպլեքս հարթության վրա համալուծ կոմպլեքս թվերը համաչափ են իրական առանցքի նկատմամբ (նկ. 88):



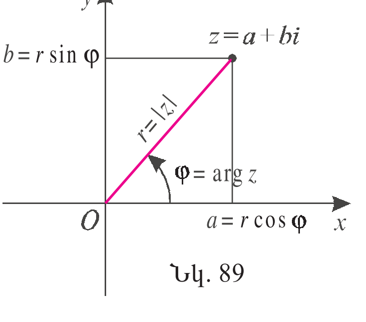
Նկ. 88

Կոմպլեքս թվի մոդուլը կոմպլեքս հարթության վրա նրան համապատասխանող կետի հեռավորությունն է կոորդինատների սկզբնակետից:

Իրոք, $z=a+bi$ կոմպլեքս թվին համապատասխանող $(a;\ b)$ կետի հեռավորությունը կոորդինատների $O(0;0)$ սկզբնակետից $\sqrt{a^2+b^2}$ է, այսինքն՝ $|z|$ է (նկ. 88):

z թվի արգումենտ է կոչվում այն պտտման անկյունը, որով աբսցիսների դրական կիսաառանցքը պտտելով՝ կստանանք Oz ճառագայթը (նկ. 88): z թվի արգումենտը նշանակում են $\arg z$:

Պարզ է, որ կոմպլեքս թվի արգումենտը միարժեքորեն չի որոշվում: Օրինակ՝ $\arg 1=0$, $\arg 1=2\pi$ և այլն: Երբեմն արգումենտը միարժեքորեն որոշելու համար դնում են լրացուցիչ պայման՝ $-\pi<\arg z\le\pi$: Սակայն այդ որոշակիությունը բերում է որոշ անհարմարությունների կոմպլեքս թվերի բազմապատկման և բաժանման արդյունքների երկրաչափական մեկնաբանության ժամանակ, որը կտրվի ստորև: Ուստի կիրաժարվենք արգումեն-



Նկ. 89

տի որոշակիությունից: Այս դեպքում z թվի արգումենտներն իրարից կտարբերվեն $2\pi k$ -ով, $k \in Z$:

Պարզ է, որ եթե $z = a + bi$, $r = |z|$ և $\varphi = \arg z$ (նկ. 89), ապա $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$: Հետևաբար՝

$$\boldsymbol{z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)},$$

որը կոչվում է z կոմպլեքս թվի եռանկյունաչափական տեսք:

Դժվար չէ նկատել, որ

$$1 = 1\cdot(\cos 0 + i\sin 0),\ -1 = 1\cdot(\cos\pi + i\sin\pi),$$

$$i = 1\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right),\ -i = 1\cdot\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right):$$

Օրինակ: Գտնենք $12 - 5i$ կոմպլեքս թվի եռանկյունաչափական տեսքը: Նախ՝ $|12 - 5i| = \sqrt{12^2 + (-5)^2} = 13$, և $12 - 5i = 13\left(\frac{12}{13} - i\frac{5}{13}\right)$: Նկատենք, որ եթե

$\varphi = -\arccos\frac{12}{13}$, ապա $\cos\varphi = \frac{12}{13}$, $\sin\varphi = -\frac{5}{13}$: Հետևաբար՝

$$12 - 5i = 13(\cos\varphi + i\sin\varphi),\ \text{որտեղ}\ \varphi = -\arccos\frac{12}{13}:$$

Եռանկյունաչափական տեսքով տրված կոմպլեքս թվերի բազմապատկումն ու բաժանումը, ի տարբերություն նախորդ պարագրաֆի (2) և (3) բանաձևերի, ստանում են շատ պարզ տեսք:

Դժվար չի տեսնել (ստուգեք ինքնուրույն), որ $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ և $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ կոմպլեքս թվերի արտադրյալն է.

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i(\sin\varphi_1 + \varphi_2)):$$

Կոմպլեքս թվերի արտադրյալի մոդուլը արտադրիչների մոդուլների արտադրյալն է, իսկ արգումենտը՝ արտադրիչների արգումենտների գումարը:

Հաջորդաբար կիրառելով այս կանոնը $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ թվի համար, կստանանք.

$$z^2 = z\cdot z = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi),\ z^3 = z^2\cdot z = r^3(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi),\ \ldots :$$

Այսպիսով՝ կամայական բնական n-ի դեպքում ճիշտ է հետևյալ հավասարությունը, որը կոչվում է

Մուավրի բանաձև.

$$\boldsymbol{z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)}$$

Ինքնուրույն հիմնավորեք, որ $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ և $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ կոմպլեքս թվերի քանորդն է

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)):$$

Կոմպլեքս թվերի քանորդի մոդուլը բաժանելիի և բաժանարարի մոդուլների հարաբերությունն է, իսկ արգումենտը՝ նրանց արգումենտների տարբերությունը:

Քանի որ $1 = \cos 0 + i\sin 0$, ուստի $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$-ի համար ստանում ենք՝

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)): \qquad (1)$$

Այս բանաձևը համադրելով Մուավրի բանաձևի հետ՝ կստանանք՝

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \quad n \in Z,$$

որն ընդհանրացնում է Մուավրի բանաձևը:

Ակնհայտ է նաև (տե՛ս նկ. 88), որ

$$|\bar{z}| = |z| \text{ և } \arg\bar{z} = -\arg z: \qquad (2)$$

Համեմատելով (1) և (2) բանաձևերը՝ ստանում ենք, որ եթե $|z| = 1$, ապա $z^{-1} = \bar{z}$:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. $z = a + bi$ կոմպլեքս թվին կոորդինատային հարթության ո՞ր կետն է համապատասխանում:
2. Ինչպե՞ս են կոչվում կոմպլեքս հարթության առանցքները:
3. Ինչպե՞ս են գումարվում թվերը կոմպլեքս հարթության վրա:
4. Ինչպե՞ս են դասավորված համալուծ թվերը կոմպլեքս հարթության վրա:
5. Որո՞նք են կոմպլեքս թվի մոդուլի և արգումենտի երկրաչափական իմաստները:
6. Ո՞րն է կոչվում է կոմպլեքս թվի եռանկյունաչափական տեսք:
7. Ինչպե՞ս են որոշվում կոմպլեքս թվերի արտադրյալի մոդուլն ու արգումենտը:
8. Գրեք Մուավրի բանաձևը:
9. Ինչպե՞ս են որոշվում կոմպլեքս թվերի քանորդի մոդուլն ու արգումենտը:
10. Ինչպե՞ս են որոշվում կոմպլեքս թվի համալուծի մոդուլն ու արգումենտը:

Առաջադրանքներ

542. Կոմպլեքս հարթության վրա նշեք z_1 և z_2 կետերը, դրանց գումարը, $-z_1$-ը և z_2-ի համալուծը, եթե՝

ա) $z_1 = 2+i$, $z_2 = 3-2i$, բ) $z_1 = \sqrt{2}+i\sqrt{2}$, $z_2 = -1+i$,

գ) $z_1 = 2-5i$, $z_2 = 2+5i$, դ) $z_1 = -2-5i$, $z_2 = -2+5i$:

543. Գտեք z-ի մոդուլը և արգումենտը, եթե՝

ա) $z = 1+i$, բ) $z = -1-i$, գ) $\sqrt{3}-i$, դ) $-1+i\sqrt{3}$:

ե) $-3+6i$, զ) $-8-7i$, է) $-4+11i$, ը) $2\sqrt{3}-i\sqrt{3}$:

544. Կոմպլեքս թիվը գրեք եռանկյունաչափական տեսքով.

ա) $3i$, բ) -5, գ) $2-2i$, դ) $1-i\sqrt{3}$,

ե) $24-7i$, զ) $8+6i$, է) $8-6i$, ը) $-24+7i$:

545. Կոմպլեքս թիվը գրեք $a+bi$ տեսքով.

ա) $3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, բ) $\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$, գ) $7\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$:

546. Ապացուցեք, որ կոմպլեքս հարթության վրա z_1 և z_2 կետերի միջև հեռավորությունը $|z_1-z_2|$ է:

547. Օգտվելով նախորդ առաջադրանքից՝ կոմպլեքս հարթության վրա պատկերեք տրված պայմանին բավարարող z-երի բազմությունը.

ա) $|z-z_0|=5$, բ) $|z-z_0|<1$, գ) $|z-z_0|>2$, դ) $|z-z_0|\le 5$,

ե) $|z-z_1|=|z-z_2|$, զ) $|z-1|=|z+1|$, ը) $|z-i|=|z+i|$:

548. Դիցուք, $z=a+bi$:

ա) Գտեք iz կետի կոորդինատները կոմպլեքս հարթության վրա:

բ) Գտեք այն եռանկյան անկյունները, որի գագաթներից մեկը կոորդինատների սկզբնակետն է, իսկ մյուս երկուսը՝ z-ը և iz-ը:

գ) Գտեք նախորդ կետում տրված եռանկյան մակերեսը:

դ) Գտեք z, iz, i^2z, i^3z կետերը հաջորդաբար միացնելուց ստացված քառանկյան մակերեսը:

ե) Ապացուցեք, որ $\arg(-z)=\arg(z+\pi)$:

549. Գտեք z_1 և z_2 կոմպլեքս թվերի արտադրյալը և քանորդը.

ա) $z_1 = 4(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)$, $z_2 = 2(\cos 15^\circ + i\sin 15^\circ)$,

բ) $z_1 = 4(\cos 45^\circ - i\sin 45^\circ)$, $z_2 = \cos 15^\circ - i\sin 15^\circ$,

գ) $z_1 = 2(\cos 37{,}5^\circ - i\sin 37{,}5^\circ)$, $z_2 = \cos 7{,}5^\circ + i\sin 7{,}5^\circ$:

550. Գտեք արտահայտության արժեքը.

ա) $(1+i)^6$, բ) $\left(\sqrt{3}-i\right)^4$, գ) $(\cos\varphi+i\sin\varphi)^{18}$, որտեղ $\varphi=5^\circ$:

Կրկնության համար

551. Ապացուցել տրված թվի իռացիոնալությունը.

ա) $\sin 15^\circ$, բ) $\operatorname{tg} 75^\circ$, գ) $\cos 15^\circ$:

552. Ապացուցել, որ եթե $\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha$-ն իռացիոնալ է, ապա իռացիոնալ է նաև $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha$-ն:

§3. n-րդ աստիճանի արմատ կոմպլեքս թվից

Վերադառնանք այս գլխի սկզբում դիտարկված $x^2+1=0$ հավասարմանը: Պարզ է, որ i-ն և $-i$-ն այդ հավասարման լուծումներ են: Սակայն պետք է պարզել՝ կա՞ն արդյոք ուրիշ լուծումներ ևս:

Դիտարկենք ավելի ընդհանուր խնդիր. տրված $c=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ կոմպլեքս թվի և բնական n-ի համար գտնենք

$$z^n=c \qquad (1)$$

հավասարման բոլոր արմատները:

$z^n=c$ հավասարման յուրաքանչյուր արմատ կոչվում է n-րդ աստիճանի արմատ c կոմպլեքս թվից:

Երբ $c=0$, կունենանք. $\left|z^n\right|=0$, ուստի $|z|^n=\left|z^n\right|=0$, որտեղից՝ $|z|=0$: Հետևաբար՝ $z=0$, այսինքն՝ (1) հավասարման միակ արմատն է $z=0$:

Երբ $c\neq 0$, (1) հավասարման աջ մասի մոդուլը դրական է, ուստի՝ $|z|>0$: Անհայտ z կոմպլեքս թիվը փնտրենք եռանկյունաչափական տեսքով: Դիցուք, $z=x(\cos\alpha+i\sin\alpha)$: Տեղադրելով (1) հավասարման մեջ՝ ստանում ենք՝

$$x^n(\cos n\alpha+i\sin n\alpha)=r(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

որտեղից հետևում է, որ $x=\sqrt[n]{r}$, և $n\alpha=\varphi+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$: Այստեղից՝

$$\alpha=\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi}{n}k,\ k\in\mathbf{Z}: \qquad (2)$$

Բացառելով կրկնվող թվերը՝ ստանում ենք, որ (1) հավասարումն ունի n

արմատ.

$z^n = c$ ***հավասարման արմատներն են՝***

$x_k = \sqrt[n]{r}(\cos\alpha_k + i\sin\alpha_k)$, ***որտեղ*** $\alpha_k = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}k$, $k = 0, 1, ..., n-1$***:***

Առանձին քննարկենք $n=2$ դեպքը: Ունենք $z^2 = c$ հավասարումը: Այս դեպքում, եթե z_1-ը և z_2-ը հավասարման արմատներն են, ապա՝

$$|z_1| = |z_2| = \sqrt{|c|},\ \arg z_1 = \frac{\arg c}{2},\ \arg z_2 = \frac{\arg c}{2} + \pi:$$

Ստացվեց, որ $z_1 = -z_2$: Ընդ որում, հավասարման արմատներից մեկը և միայն մեկը կբավարարի $-\frac{\pi}{2} < \arg z \le \frac{\pi}{2}$ պայմանին:

$z^2 = c$ ***հավասարման այն արմատը, որի արգումենտը*** $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ ***միջակայքում է, նշանակենք*** $\sqrt{c}$ ***:***

Այս պայմանավորվածությամբ $z^2 = c$ հավասարման լուծումն է $z = \pm\sqrt{c}$: Մասնավորապես,

$$\sqrt{-1} = i,\ \text{և}\ x^2 = -1\ \text{հավասարման լուծումն է}\ x = \pm i:$$

Օրինակ 1: Լուծենք $z^n = 1$ հավասարումը: Քանի որ $|1| = 1$ և $\arg 1 = 0$, ստանում ենք՝ $z_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}$, $k = 0, 1, ..., n-1$: Այս թվերով միավոր շրջանագիծը տրոհվում է n հավասար աղեղների:

Օրինակ 2: Գտնենք $z^2 = 4i$ հավասարման արմատները: Քանի որ $\arg(4i) = \frac{\pi}{2}$, ուրեմն՝ $\sqrt{4i} = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$:

Պատասխան՝ $\pm\left(\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right)$:

Օրինակ 3: Գտնենք $x^2 + x + 1 = 0$ հավասարման արմատների արգումենտները: Օգտվելով քառակուսային հավասարման արմատների բանաձևից՝ ստանում ենք՝

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} = \left(\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right):$$

Այստեղից՝ $x_1 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$ և $x_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$:

Պատասխան՝ $\frac{\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$:

Օրինակ 4: Լուծենք $x^2+ix+i-1=0$ հավասարումը: Ունենք՝

$$x_{1,2}=\frac{-i\pm\sqrt{i^2-4i+4}}{2}=\frac{-i\pm\sqrt{3-4i}}{2}:$$

Գտնենք $\sqrt{3-4i}$ -ն: Քանի որ $3-4i=5\left(\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i\right)=5(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, որտեղ $\varphi=-\arccos\left(\frac{3}{5}\right)$, ուրեմն՝ $\sqrt{3-4i}=\sqrt{5}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right)$: Քանի որ

$$\cos\frac{\varphi}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5},\quad \sin\frac{\varphi}{2}=-\sqrt{1-\cos^2\frac{\varphi}{2}}=-\frac{\sqrt{5}}{5},$$

հետևաբար՝

$$x_{1,2}=\frac{-i\pm\sqrt{5}\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}-i\frac{\sqrt{5}}{5}\right)}{2}=\frac{-i\pm(2-i)}{2}:$$

Պատասխան՝ $1-i$ և -1:

Հասկացե՞լ եք դասը

1. Ո՞րն է կոչվում n -րդ աստիճանի արմատ կոմպլեքս թվից:
2. Ինչպե՞ս է որոշվում $z^n=c$ հավասարման արմատի մոդուլը:
3. Ի՞նչ բանաձևով են գտնում $z^n=c$ հավասարման արմատների արգումենտները:
4. Ո՞րն է $x^2+1=0$ հավասարման լուծումը:

Առաջադրանքներ

553. Լուծել հավասարումը.

ա) $x^3=1$, բ) $x^4=1$, գ) $x^6=1$,

դ) $x^3=-1$, ե) $x^4=-1$, զ) $x^6=-1$:

554. Գտնել $z^n=c$ հավասարման լուծումները, եթե՝

ա) $n=2$, $c=i$, բ) $n=2$, $c=-4i$, գ) $n=2$, $c=4-3i$, դ) $n=2$, $c=8+6i$,

ե) $n=3$, $c=i$, զ) $n=3$, $c=-3\sqrt{3}i$, է) $n=4$, $c=16$, ը) $n=4$; $c=-81$:

555. Ապացուցել, որ եթե $ax^2+bx+c=0$ իրական գործակիցներով քառակուսային հավասարումը չունի իրական արմատ, ապա ունի իրար համալուծ երկու կոմպլեքս արմատ:

556. Իրական գործակիցներով քառակուսային հավասարման մի արմատը z_0 -ն է: Գտնել մյուս արմատը, եթե՝

ա) $z_0=2-i$, բ) $z_0=-1+i\sqrt{3}$, գ) $z_0=-2-5i$, դ) $z_0=3-i\sqrt{5}$:

557. Լուծել հավասարումը.

ա) $4x^2-2x+1=0$, բ) $x^2-x+1=0$,

գ) $x^2-4x+5=0$, դ) $x^2-2ix+1=0$:

558. Ապացուցել Վիետի թեորեմը կոմպլեքս գործակիցներով քառակուսային եռանդամի համար:

559. Գտնել իրական գործակիցներով քառակուսային հավասարում, որի մի արմատը տրված թիվն է:

ա) $4+2i$, բ) $-7+i\sqrt{3}$, գ) $-1-2i$, դ) $\sqrt{7}+4i$:

560. Ապացուցել, որ եթե z_1 -ը և z_2 -ը az^2+bz+c կոմպլեքս գործակիցներով քառակուսային եռանդամի արմատներն են, ապա $az^2+bz+c=a(z-z_1)(z-z_2)$:

561. Քառակուսային եռանդամը վերլուծել գծային արտադրիչների.

ա) $4x^2-2x+1$, բ) x^2-x+1, գ) x^2-4x+5, դ) $x^2-2ix+1$:

Կրկնության համար

562. Ո՞ր a -երի համար տրված հավասարումն ունի երկու իրական արմատ.

ա) $x^2+x+a=0$, բ) $x^2+ax+1=0$:

563. Ո՞ր a -երի համար տրված հավասարումն ունի մեկ իրական արմատ.

ա) $ax^2+x+1=0$, բ) $x^2+ax+1=0$:

Առաջադրանքներ դասընթացի կրկնության համար

564. Հաշվել 2 մ, 4 մ, 5 մ կողերով ուղղանկյունանիստի անկյունագիծը՝

ա) մեկ մետր ճշտությամբ,

բ) մեկ դեցիմետր ճշտությամբ,

գ) մեկ սանտիմետր ճշտությամբ:

565. Բաղդատել թվերը.

ա) $\sqrt{2}+\sqrt{7}$ և $\sqrt{3}+\sqrt{6}$, բ) $\sqrt{11}-\sqrt{5}$ և $\sqrt{7}-\sqrt{2}$,

գ) $\left(\sqrt{5}-1\right)^{\frac{3}{4}}$ և $\left(\sqrt{5}-1\right)^{0,76}$, դ) $\left(\sqrt{3}-1\right)^{3,2}$ և $\left(\sqrt{3}-1\right)^{\frac{13}{4}}$:

566. Ապացուցել, որ տրված թիվն իռացիոնալ է.

ա) $\sin 15^\circ$, բ) $\cos 15^\circ$, գ) $\operatorname{tg} 22,5^\circ$, դ) $\operatorname{ctg} 22,5^\circ$:

➢ **567.** Հերթականությամբ ապացուցել հետևյալ թվերի իռացիոնալությունը.

ա) $\cos\frac{\pi}{8}$, բ) $\cos\frac{\pi}{16}$, գ) $\cos\frac{\pi}{32}$, դ) $\cos\frac{\pi}{64}$:

568. Թվային ուղղի վրա A և B կետերի հեռավորությունն A և C կետերի հեռավորության 20 տոկոսն է: Գտնել A-ն, եթե.

ա) $B=5,\ C=17$, բ) $B=-2,\ C=9$, գ) $B=0,\ C=8$:

569. Թվային ուղղի AB հատվածը 25 տոկոսով մեծացրին՝ միջնակետը թողնելով անշարժ: Գտնել ստացված հատվածը, եթե՝

ա) $AB=[1;5]$, բ) $AB=[-3;9]$, գ) $AB=[0;12]$:

570. Գտնել x-ի դրական արժեքները, որոնց դեպքում $f(x)$-ն ընկած է a թվի ε շրջակայքում.

ա) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$, $a=1,\ \varepsilon=0,1$, բ) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+3}$, $a=2,\ \varepsilon=0,05$:

571. Գտնել բնական n-երի քանակը, որոնց դեպքում $f(n)$-ը չի պատկանում a թվի ε շրջակայքին.

ա) $f(n)=\dfrac{n}{5n+2}$, $a=0,2,\ \varepsilon=0,01$, բ) $f(n)=\dfrac{3n-2}{n+5}$, $a=3,\ \varepsilon=0,1$:

* **572.** Ցույց տալ, որ բնական n-երի քանակը, որոնց դեպքում $f(n)$-ը չի պատկանում a թվի ε շրջակայքին, վերջավոր է կամայական ε դրական թվի համար՝

ա) $f(n)=\dfrac{4n-3}{2n-1}$, $a=2$, բ) $f(n)=\dfrac{6-n}{2n-3}$, $a=-0,5$:

573. Պարզեցնել արտահայտությունը.

ա) $\left(\left(\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2+1\right):\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$, բ) $\dfrac{1+\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha}$,

գ) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{\operatorname{ctg}\alpha}$, դ) $\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}+\dfrac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$:

574. Հաշվել արտահայտության արժեքը.

ա) $\operatorname{tg}225^\circ\cdot\cos330^\circ\cdot\operatorname{ctg}120^\circ$, բ) $\operatorname{ctg}\dfrac{5\pi}{3}\cdot\sin\dfrac{3\pi}{4}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{5\pi}{6}\cdot\cos\dfrac{4\pi}{3}$,

➢գ) $\operatorname{tg}1^\circ\cdot\operatorname{tg}3^\circ\cdot\operatorname{tg}5^\circ\cdot\ldots\cdot\operatorname{tg}89^\circ$, ➢դ) $\operatorname{ctg}2^\circ\cdot\operatorname{ctg}4^\circ\cdot\operatorname{ctg}6^\circ\cdot\ldots\cdot\operatorname{ctg}88^\circ$:

* **575.** $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ մեծությունները դասավորել աճման կարգով, եթե.

ա) $0<\alpha<\dfrac{\pi}{6}$, բ) $\dfrac{\pi}{3}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, գ) $\dfrac{5\pi}{6}<\alpha<\pi$:

576. Որոշել արտահայտության նշանը.

ա) $\dfrac{1}{2}-\sin\dfrac{7\pi}{8}$, բ) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\cos\dfrac{23\pi}{12}$, գ) $\sin1-\sin2$:

577. Գտնել $\sin2\alpha$-ն, եթե $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{4}{3}$:

578. Դիցուք, $\sin2\alpha=\dfrac{2}{3}$, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$: Հաշվել արտահայտության արժեքը.

ա) $\sin\alpha+\cos\alpha$, բ) $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha$, գ) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$:

➢ **579.** Ապացուցել, որ առաջին քառորդին պատկանող α-ների համար.

ա) $\sin\alpha+\cos\alpha>1$, բ) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha>2$:

* **580.** Օգտվելով նախորդ առաջադրանքից, ապացուցել, որ

ա) $\sin25^\circ+\cos15^\circ>1$, բ) $\sin32^\circ+\sin60^\circ>1$,

գ) $\operatorname{tg}\dfrac{5\pi}{17}+\operatorname{ctg}\dfrac{4\pi}{17}>2$, դ) $\operatorname{tg}\dfrac{4\pi}{15}+\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{5}>2$:

➢ **581.** Ապացուցել, որ եթե A-ն, B-ն, C-ն եռանկյան անկյուններ են, և $\operatorname{tg}A=\dfrac{4}{3}$, $\operatorname{tg}B=7$, ապա $C=45^\circ$:

➢**582.** Ապացուցել, որ եթե A-ն և B-ն սուրանկյուն եռանկյան անկյուններ են, ապա $\operatorname{tg}A\cdot\operatorname{tg}B>1$:

➢**583.** Ապացուցել, որ եթե A-ն և B-ն բութանկյուն եռանկյան սուր անկյուններ են, ապա $\operatorname{tg}A\cdot\operatorname{tg}B<1$:

➢ **584.** Գտնել ABC սուրանկյուն եռանկյան անկյունների տանգենսները, եթե հայտնի է, որ $\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B = 3$, $\operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C = 6$:

➢ **585.** Եռանկյան անկյուններից մեկը 120° է: Գտնել մյուս երկու անկյունները, եթե հայտնի է, որ նրանց կոսինուսների գումարը $\sqrt{3}$ է:

* **586.** Եռանկյան անկյուններից մեկը 105° է: Գտնել մյուս երկու անկյունները, եթե հայտնի է, որ նրանց կոսինուսների քառակուսիների գումարը $5/4$ է:

* **587.** ABC եռանկյան AM միջնագիծը A անկյունը բաժանում է 30° և 15° մասերի: Գտնել ABC եռանկյան անկյունները:

➢ **588.** ABC եռանկյան մեջ $AB = 3$, $BC = 8$, $AC = 10$: Ցույց տալ, որ $\angle B = 3 \cdot \angle A$:

* **589.** Ապացուցել, որ ABC եռանկյունն ուղղանկյուն է այն և միայն այն դեպքում, երբ $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1$:

590. Դիցուք, $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$: Գտնել արտահայտության արժեքը.

ա) $\cos 2\alpha$, բ) $\cos 4\alpha$, գ) $\cos 6\alpha$:

591. Դիցուք, $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$, $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$: Գտնել արտահայտության արժեքը.

ա) $\sin 2\alpha$, բ) $\sin 3\alpha$, գ) $\sin 4\alpha$,

դ) $\sin\dfrac{\alpha}{2}$, ե) $\cos\dfrac{\alpha}{2}$, զ) $\cos 3\alpha$:

592. Դիցուք, $\sin\alpha = -\dfrac{12}{13}$, $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$: Գտնել արտահայտության արժեքը.

ա) $\sin\left(\dfrac{\pi}{3} + \alpha\right)$, բ) $\cos\left(\dfrac{\pi}{6} - \alpha\right)$, գ) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right)$:

* **593.** Ապացուցել, որ՝

ա) $\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2} \geq \dfrac{\sin\alpha + \sin\beta}{2}$, եթե $\alpha, \beta \in [0, \pi]$,

բ) $\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2} \geq \dfrac{\cos\alpha + \cos\beta}{2}$, եթե $\alpha, \beta \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$:

➢ **594.** $\operatorname{tg}\alpha$-ն և $\operatorname{tg}\beta$-ն $15x^2 - 41x + 14 = 0$ հավասարման արմատներն են, ընդ որում,

$0<\beta<\alpha<\pi/2$: Ցույց տալ, որ՝ ա) $\alpha-\beta=\pi/4$; բ) $\alpha+\beta<\pi/2$:

* **595.** Գտնել m-ը, եթե հայտնի է, որ $\operatorname{tg}\alpha$-ն և $\operatorname{tg}\beta$-ն $mx^2-(3m-4)x+m-1=0$ հավասարման արմատներն են, ընդ որում՝ $\alpha-\beta=\pi/4$:

* **596.** Ապացուցել, որ՝

ա) $\cos\alpha\cos\beta\le\frac{3}{4}$, եթե $\alpha+\beta=\frac{\pi}{3}$, բ) $\sin\alpha\sin\beta\le\frac{3}{4}$, եթե $\alpha+\beta=\frac{2\pi}{3}$:

597. Ապացուցել նույնությունը.

ա) $\frac{2\sin\alpha\cos\beta-\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)+2\sin\alpha\sin\beta}=tg(\alpha-\beta)$,

բ) $\frac{2\cos\alpha\sin\beta+\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-2\cos\alpha\cos\beta}=-tg(\alpha+\beta)$,

*գ) $\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}(x+60^\circ)\cdot\operatorname{tg}(x-60^\circ)=-\operatorname{tg}3x$:

➢**598.** Ապացուցել հավասարությունը.

ա) $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}=\frac{1}{8}$, բ) $\frac{1}{\sin10^\circ}-4\sin70^\circ=2$:

➢**599.** Գտնել, թե $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ միջակայքի որ x-երի համար է ճիշտ անհավասարությունը.

ա) $\sin x<\sin\frac{3\pi}{5}$, բ) $\cos x>\cos\frac{4\pi}{7}$, գ) $\operatorname{tg}x>-1$:

Գտնել ֆունկցիայի որոշման տիրույթը (600-602).

600. ա) $y=\frac{5}{7}-2\operatorname{ctg}4x$, բ) $y=\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x$:

➢**601.** ա) $y=\sqrt{\sin2x}+\sqrt{1-2\sin^2x}$, բ) $y=\sqrt{\cos\pi x}-\sqrt{\sin\pi x}$:

602. ա) $y=\sqrt{x^2\cdot2^x-2^{x-2}}$, ➢բ) $y=\sqrt[4]{(0{,}5)^{\sin x}-1}+\sqrt[5]{3^{\cos x}-1}$:

Գտնել ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը (603-605).

603. ա) $y=5\cos^2\frac{2x}{3}-2$, բ) $y=\frac{3}{8}\operatorname{ctg}^2x+1$, գ) $y=2{,}5\cdot|\sin3x|+3$:

604. ա) $y=(x-9)^{3/2}-5$, բ) $y=3^{1-2x^2}$, գ) $y=25\cdot(0{,}2)^{2-x^2}$:

➤ **605.** ա) $y=1-\sqrt{\sin 2x}$, բ) $y=2^{\sin x}+3$, գ) $y=3\cdot 4^{\cos^2 x}-5$:

Պարզել, թե հետևյալ ֆունկցիաներից որոնք են զույգ, որոնք՝ կենտ և որոնք՝ ո՛չ զույգ, ո՛չ կենտ (606-608).

606. ա) $y=\sin 3x$, բ) $y=2+x\cos 4x$, գ) $y=3-x\operatorname{tg} 7x$:

607. ա) $y=\dfrac{2+3\cos 2x}{x^2-1}$, բ) $y=\dfrac{x^3}{4-3\sin 3x}$, գ) $y=\dfrac{x^3+\sin 5x}{\operatorname{tg} x-1}$:

608. ա) $y=\dfrac{5^x+5^{-x}}{x^3}$, բ) $y=\dfrac{2^x-(0,5)^x}{x^5}$, գ) $y=\dfrac{x^2+\cos x}{\sin x-3}$:

Գտնել ֆունկցիայի հիմնական պարբերությունը (609-611).

609. ա) $y=1-\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$, բ) $y=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+2$, գ) $y=3-\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{5}-x\right)$:

➤ **610.** ա) $y=2\sin\left(2x+\dfrac{2\pi}{3}\right)$, բ) $y=-5\cos\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{\pi}{8}\right)$, գ) $y=4\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{3}+5x\right)$:

* **611.** ա) $y=|\sin(x+5)|$, բ) $y=7-\cos^2(x+6)$, գ) $y=3|\operatorname{ctg} x|-13$:

Գտնել ֆունկցիայի նշանապահպանման և մոնոտոնության միջակայքերը (612-613).

➤ **612.** ա) $y=2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$, բ) $y=2\cos 3x-5$, գ) $y=-\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)$:

* **613.** ա) $y=\sin\dfrac{1}{1+x^2}$, բ) $y=\cos\dfrac{1}{1+x^2}$, գ) $y=\operatorname{ctg}\dfrac{1}{1+2x^2}$:

➤ **614.** Ապացուցել, որ f ֆունկցիան նվազող է $[0;\pi/2]$ միջակայքում.

ա) $f(x)=\cos(\sin x)$, բ) $f(x)=\sin(\cos x)$:

Գտնել ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները (615-616).

615. ա) $y=3-4\cos 0,7x$, բ) $y=\sin^2 x+\cos 2x$:

616. ա) $y=(\sin x+\cos x)^2$, ➤բ) $y=\sin x+2\cos x$:

617. Հետազոտել ֆունկցիան և կառուցել գրաֆիկը.

ա) $y=2\sin(-x)+1$, բ) $y=4\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$, գ) $y=-\operatorname{tg} 2x$:

* **618.** Ապացուցել անհավասարությունը.

ա) $\dfrac{\cos 21^\circ+\cos 39^\circ-\sqrt{3}\cos 31^\circ}{\cos 18^\circ+\cos 42^\circ-\sqrt{3}\cos 32^\circ}>1$, բ) $\dfrac{\sin 22^\circ+\cos 22^\circ-\sqrt{2}\sin 25^\circ}{\sin 25^\circ+\cos 25^\circ-\sqrt{2}\sin 26^\circ}<1$:

* **619.** Ապացուցել, որ եթե $0<\alpha<\beta<60^\circ$ և $\alpha+\beta=60^\circ$, ապա

ա) $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\le\dfrac{1}{3}$, բ) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\le\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta\le\sqrt{3}$:

Հաշվել արտահայտության արժեքը (620-623).

620. ա) $\arcsin 1-2\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, բ) $2\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)+\arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

գ) $\operatorname{arctg}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)+\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, դ) $\arcsin\left(-\dfrac{1}{2}\right)-\operatorname{arcctg}\sqrt{3}$:

621. ա) $\sin\left(\pi+\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$, բ) $\cos\left(\pi-\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$,

գ) $\operatorname{ctg}\left(3\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$, դ) $\sin\left(3\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})\right)$:

➢ **622.** ա) $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\arccos\dfrac{1}{3}\right)$, բ) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\arcsin\dfrac{1}{4}\right)$:

* **623.** ա) $\sin\left(2\arccos\dfrac{3}{5}\right)$, բ) $\cos\left(\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{4}{5}\right)$:

* **624.** Ապացուցել նույնությունը.

ա) $\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}$, բ) $\sin(\arccos x)=\cos(\arcsin x)$,

գ) $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x)=\dfrac{1}{x}$, դ) $\cos(\operatorname{arctg} x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$:

625. Գտնել արտահայտության թույլատրելի արժեքների բազմությունը.

ա) $\arcsin(2x-1)$, բ) $\arccos\dfrac{3x-2}{4x+4}$, գ) $\operatorname{arctg}\dfrac{3x^5}{x^2-1}$:

Լուծել հավասարումը (626-637).

626. ա) $2\sin\left(\dfrac{2x}{5}+\dfrac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}=0$, բ) $\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(\dfrac{5x}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right)-1=0$:

627. ա) $\sqrt{3}\sin 4x+\cos 4x=0$, բ) $3\sin x+4\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=0$:

628. ա) $\sqrt{3}\sin 4x+\cos 4x=1$, բ) $3\sin x+4\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=1$:

➢ **629.** ա) $\sin 3\left(x-\frac{5\pi}{2}\right)=1+\cos 6x$, բ) $\sin\frac{x}{4}+\cos\frac{x}{2}-1=0$:

➢ **630.** ա) $1+\cos 4x=\sin 3x-\sin x$, բ) $1-\cos 4x=\sin 3x+\sin x$:

631. ա) $\operatorname{tg} x+3\operatorname{ctg} x=4$, բ) $\operatorname{tg} x-4\operatorname{ctg} x=3$:

632. ա) $\cos 2x=3-7\cos(3\pi+x)$, բ) $\sin^4\frac{x}{2}+5\cos x+4=0$:

➢ **633.** ա) $\cos 4x=6\cos^2 x-5$, բ) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+4x\right)=6\cos^2 x-5$:

➢ **634.** ա) $2\cos^2 2x-12\cos^2 x+\cos 4x-1=8\sin\left(\frac{5\pi}{2}+2x\right)$,

բ) $2\cos^2 2x-2\cos 4x+4\sin^2 x+2\cos 2x-5=5\cos\left(\frac{5\pi}{2}-2x\right)$:

635. ա) $10\sin^2 x-6\sin 2x-11\cos^2 x=1$,

բ) $4\sin^2 x-3\sin x\cos x+5\cos^2 x=3$:

* **636.** ա) $2\cos x-3\sin x=|\sin x|$, բ) $4\cos|x|-3\sin x=\sin|x|$:

* **637.** ա) $\sin 4x+\sin 2x=\sqrt{2+2\cos 2x}$,

բ) $\sqrt{8}\cos\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{1-\cos 2x}$:

Լուծել համակարգը (638-639).

➢ **638.** ա) $\begin{cases} x-y=1 \\ \cos\pi x+\sqrt{3}=\cos\pi y \end{cases}$, բ) $\begin{cases} y-x=3 \\ \sin\pi x-\sqrt{3}=\sin\pi y \end{cases}$:

➢ **639.** ա) $\begin{cases} y-x=\frac{3}{2}\pi \\ 5\cos^2 x=6\sin y-1 \end{cases}$, բ) $\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{4} \\ \operatorname{tg} x-\operatorname{tg} y=2 \end{cases}$:

Պատասխաններ

1. ա) $\{2n : n \in \mathbf{N}\}$ բ) $\{2n-1 : n \in \mathbf{N}\}$ գ) $\{5n : n \in \mathbf{N}\}$ դ) $\{7n : n \in \mathbf{Z}\}$ ե) $\{6n+2 : n \in \mathbf{N}_0\}$ զ) $\{142n+32 : n \in \mathbf{N}_0\}$ է) $\{6n : n \in \mathbf{Z}\}$ ը) $\{75n : n \in \mathbf{Z}\}$ թ) $\{42n+3 : n \in \mathbf{N}_0\}$ ժ) $\{45n+2 : n \in \mathbf{N}_0\}$ ժա) $\{n^3 : n \in \mathbf{Z}\}$ ժբ) $\{a^2 : a \in \mathbf{Q}\}$ ժգ) $\{n/14 : n \in \mathbf{N}_0\}$ ժդ) $\{n/15 : n \in \mathbf{Z}\}$ **2.** ա) d և a բ) $b < d < c < a$ գ) 1,7 դ) b ե) 8/5 զ) $-523/5720$ **3.** ա) ձախ, աջ բ) աջ, աջ գ) աջ, աջ **4.** 84, 420 **10.** ա) $34+0{,}251$ բ) 45 գ) $-13+0{,}7$ դ) $-81+0{,}55$ **11.** ա) 11,25 բ) 0,925 գ) 5,08 դ) 1,98 **12.** ա) 5/4 բ) 282/125 գ) 2/125 դ) 29/8 **13.** ա) $0,(2)$ բ) $0{,}1(6)$ գ) $3,(142857)$ դ) $1,(09)$ **14.** ա) $5/12 < 0{,}42$ բ) $11/15 < 0{,}74$ գ) $2/9 > 0{,}2$ դ) $5/6 > 0{,}83$ **15.** ա) $-5{,}4 < 49/11 < 4{,}5$ բ) $-0{,}5 < -8/17 < 0{,}5$ **19.** ա) 2/3 բ) 146/45 գ) 5/198 դ) 763/330 **20.** ա) 0,5 բ) 2 գ) 1 դ) 2,7 **29.** ա) 6 մ բ) 64 դմ գ) 640 սմ **30.** ա) $|x| = 4$ բ) $|x-1| = 3$ գ) $|x+2| = 5$ դ) $|x| > 11$ ե) $|x-13| > 7$ զ) $|x| \le 9$ է) $|x+4| \le 12$ ը) $|x-24| < |x-32|$ թ) $|x+19| > |x-51|$ ժ) $2|x-10| = |x-4|$ ժա) $3|x+3| = |x-13|$ **31.** ա) ± 4 բ) 4, -2 գ) 3, -7 դ) $(-\infty;-11)\cup(11;\infty)$ ե) $(-\infty;6)\cup(20;\infty)$ զ) $[-9;9]$ է) $[-16;8]$ ը) $(-\infty;28)$ թ) $(16;\infty)$ ժ) 8 ժա) 1, -11 **32.** ա) 1, $-0{,}6$ բ) 4, 2/3 գ) 2, $-2{,}5$ դ) -2, -5 **33.** ա) $(-\infty;6)$ բ) $(-\infty;-1)$ գ) $(-\infty;-5)$ **36.** ա) Այո բ) այո գ) ոչ դ) ոչ **37.** ա) 9 բ) 6 գ) 10 **38.** ա) $[3;18]$ բ) $[-1;9]$ գ) $[-8;12]$ **39.** ա) $[17;20]$ բ) $[0;2]$ գ) $[-11;-7]$ **40.** ա) $(2/3;3)$ բ) $(2;4)$ գ) $(4;5)$ դ) $(1;2)$ **41.** ա) 0,1 բ) $(-0{,}2;0]$ գ) $(-\infty;-0{,}6]$ դ) $(0{,}1;\infty)$ **45.** ա) 3,14 և 3,16 բ) 2,95 և 2,97 գ) 2,73 և 2,75 դ) 1,98 և 2 **46.** ա) 2,12 և 2,13 բ) 2,04 և 2,05 գ) 6,92 և 6,93 դ) 4,04 և 4,05 **48.** Ռացիոնալ **49.** Իռացիոնալ **50.** Այո **51.** ա) Ոչ բ) ոչ գ) այո դ) այո **52.** ա) $a > 0$ $b > 0$ բ) $a < 0$, $b < 0$ **55.** ա) 12 բ) 169 գ) 512 դ) 100 **56.** ա) 25/18 բ) 47/18 **57.** ա) 5,1 և $\sqrt{26{,}5}$ բ) $-0{,}35$ և $-\sqrt{0{,}125}$ գ) 10,005 և $\sqrt{100{,}15}$ **61.** 57/10 **62.** 8 **63.** 13/3 **64.** 8 **65.** ա) 4, 10 բ) ± 4, 2, 10 **66.** ա) -1, 17 բ) -21, -3, -1, 17 **67.** ա) 6,63 և 6,64 բ) 1,68 և 1,69 գ) 1,77 և 1,78 դ) 0,67 և 0,68 **68.** ա) 10 և 10,1 բ) 6 և 6,1 գ) $-4{,}1$ և -4 դ) -5 և $-4{,}9$ **69.** ա) $\sqrt{3} > \sqrt[3]{2}$ բ) $\sqrt[4]{4} > \sqrt[6]{6}$ գ) $\sqrt{3\sqrt{2}} < \sqrt{5}$ դ) $\sqrt[3]{5^2} > \sqrt[5]{5^3}$ ե) $\sqrt{5} > \sqrt[3]{5}$ զ) $\sqrt[4]{0{,}7} > \sqrt[6]{0{,}7}$ է) $\sqrt{1{,}1} < 1{,}1$ ը) $\sqrt[3]{0{,}1} > 0{,}1$ **70.** ա) 4 բ) 36 գ) 3 դ) 4 **71.** ա) 3 բ) 3 գ) 1/9 դ) 1/16 **72.** ա) 7 բ) 3 գ) 2 դ) 1 **73.** ա) $\sqrt{5}-1$ բ) $-\sqrt{5}-2\sqrt{3}$ գ) $(a+b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ դ) $a^3(\sqrt{x}+3\sqrt{z})/(x-9z)$ **74.** ա) $(2-\sqrt{2}+\sqrt{6})/2$ բ) $(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30})/4$ գ) $\sqrt{21}(\sqrt{19}+\sqrt{7}-2\sqrt{3})/84$ **75.** ա) $(\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{5}+1)/2$ բ) $(\sqrt[3]{36}+\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{4})/2$ գ) $a(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})/(a+b)$ **83.** ա) 1,5 բ) 1,5 գ) 1/6 դ) 1 **86.** ա) Մեծ է բ) մեծ է գ) մեծ է դ) փոքր է ե) փոքր է զ) փոքր է է) հավասար է ը) փոքր է **90.** ա) 125 բ) 2 գ) 1/3 դ) 1/25 ե) 49 զ) 8 **91.** ա) x բ) x^2 գ) 1 դ) $\sqrt{x}$ ե) x^2 զ) x^2 **92.** ա) $3^{\sqrt{5}} > 9$ բ) $(2/3)^{\sqrt{7}} > 8/27$ գ) $7^{-\pi} < 1$ դ) $(0{,}5)^{-\sqrt{2}} > 1$ ե) $(0{,}2)^{-\sqrt{3}} > 5$ զ) $(4/3)^{-\pi} < 9/16$ **93.** ա) 2 բ) 2 գ) 3 դ) 3 ե) -4 զ) -3 **94.** ա) $9 \cdot 9^x$ բ) $8 \cdot (0{,}5)^x$ գ) $0{,}01 \cdot 10^x$ դ) $(1/343) \cdot 49^x$ ե) $0{,}09 \cdot (0{,}027)^x$ զ) $16 \cdot (1/32)^x$ է) $(1/7) \cdot 49^x$ ը) $81 \cdot 3^x$ **95.** ա) $(1/486) \cdot 24^x$ բ) $19{,}6 \cdot (0{,}14)^x$ գ) $315 \cdot (1875/343)^x$ դ) $87{,}5 \cdot (78{,}4)^x$ **96.** ա) 5^{4x} բ) 7^{8x} **97.** ա) $1200 \cdot (14{,}4)^x$ բ) $6000 \cdot (4/45)^x$ գ) $12544 \cdot (8/7)^x$

դ) $62{,}5\cdot 4^x$ **101.** ա) $\pi/2$ բ) $\pi/3$ գ) $5\pi/3$ դ) $\pi/18$ ե) $\pi/4$ զ) $2\pi/5$ է) $6\pi/5$ ը) -4π թ) $20\pi/3$ **102.** ա) 360° բ) -180° գ) 36° դ) 108° ե) -105° զ) -5° է) 2250° ը) -1125° **103.**ա) $\pi/2$ ռադ, $\pi/4$ ռադ, $\pi/4$ ռադ բ) $\pi/3$ ռադ, $\pi/3$ ռադ, $\pi/3$ ռադ գ) $\pi/2$ ռադ, $\pi/3$ ռադ, $\pi/6$ ռադ **104.** ա) $\alpha>\beta$ բ) $\alpha<\beta$ գ) $\alpha>\beta$ դ) $\alpha<\beta$ **105.** ա) 110° բ) 36° գ) 126° դ) 50° ե) 180° զ) 180° **106.** ա) $\pi/9$, $7\pi/18$ բ) $0{,}2\pi$, $0{,}3\pi$ գ) $0{,}2\pi$, $0{,}3\pi$ դ) $\pi/9$, $7\pi/18$ ե) $\pi/9$, $7\pi/18$ զ) $0{,}4\pi$, $0{,}1\pi$ **107.** ա) 10° բ) $1{,}5\pi$ ռադ գ) $0{,}75\pi$ ռադ դ) 170° ե) 350° զ) π ռադ **108.**ա) $\angle AOC$-ն բ) $\angle AOB$-ն գ) հավասար են դ) $\angle AOC$-ն **110.** ա) 1 ռադ բ) 2 ռադ գ) $\pi/4$ դ) $2\pi/5$ ռադ **111.**ա) 90° բ) 270° գ) 135° դ) 120° **112.** 10 սմ **113.** $2\sqrt{2}$ սմ **114.** $5\pi/3$ **115.** 25 սմ **116.** ա) $(\sqrt{3}/2;1/2)$ բ) $(\sqrt{2}/2;\sqrt{2}/2)$ գ) $(-\sqrt{3}/2;1/2)$ դ) $(-1/2;\sqrt{3}/2)$ **117.** $-\pi/6$ ռադ և -2π ռադ, -30° և -360° **118.** $\pi/6$ ռադ և 2π ռադ, 30° և 360° **119.**ա) 0,5 բ) π **120.** ա) -1 բ) $-\pi$ **121.** ա) $-0{,}2$ բ) $7{,}5\pi$ **122.** ա) 4 բ) 5 **123.** ա) $(\sqrt{2}/2;\sqrt{2}/2)$ բ) $(-\sqrt{2}/2;\sqrt{2}/2)$ գ) $(\sqrt{2}/2;-\sqrt{2}/2)$ դ) $(-\sqrt{2}/2;-\sqrt{2}/2)$ **124.** ա) $(0{,}5;\sqrt{3}/2)$ բ) $(\sqrt{3}/2;0{,}5)$ գ) $(-0{,}5;\sqrt{3}/2)$ դ) $(-\sqrt{3}/2;0{;}5)$ **126.** ա) $\sqrt{2}/2$ բ) $-\sqrt{2}/2$ գ) $\sqrt{3}/3$ դ) $-\sqrt{3}/3$ ե) 0,5 զ) 0 **127.**ա) $a=b$ բ) $a<b$ գ) $a<b$ դ) $a>b$ **128.**ա) 1 բ) 0 գ) $1+\sqrt{3}$ դ) -1 **129.**ա) 1 բ) $-0{,}5$ գ) -1 դ) $-\sqrt{2}$ **130.** ա) 4 բ) 9 գ) 2 դ) $-1{,}75$ **131.** ա) 2, -2 բ) 3, -3 գ) 3, -1 դ) 8, 2 ե) 3, 2 զ) 3; -2 **133.**ա) 30°, 150° բ) $\pm150^\circ$ գ) -45°, 135° դ) 45°, -135° ե) -45°, 135° զ) 45°, -135° **134.**ա) $(0;1)$ բ) $(0{,}8;0{,}6)$ գ) $(12/13;5/13)$ դ) $(-7/11;-6\sqrt{2}/11)$ **135.**ա) $a<b$ բ) $a>b$ գ) $a>b$ դ) $a<b$ **136.** ա) $a<b$ բ) $a<b$ գ) $a<b$ դ) $a>b$ **137.** ա) $[1;1{,}5)$ բ) $(-5;-4]\cup[-3;\infty)$ **138.** ա) $(-\infty;-17/3]\cup(-1;6)$ բ) $(-\infty;-2)\cup[-1;2)$ **139.** ա) I բ) III գ) ոչ մի քառորդում դ) I ե) IV զ) IV **140.** ա) II բ) III գ) IV դ) I ե) ոչ մի քառորդում զ) IV **141.** ա) I բ) I գ) IV դ) IV ե) II զ) III **142.** ա) II բ) III գ) I դ) I **143.** ա) II բ) II գ) III դ) III ե) III զ) II **144.** ա) I բ) III գ) II դ) II ե) IV զ) IV **145.** ա) IV բ) II գ) IV դ) II **146.**ա) +, −, −, − բ) −, −, +, + գ) +, +, +, + դ) −, +, −, − **147.**ա) + բ) + գ) − դ) + ե) − զ) + **148.**ա) − բ) + գ) − դ) + ե) + զ) + **149.**ա) − բ) + **150.**ա) + բ) − գ) − դ) + ե) − զ) − **151.** ա) $-0{,}5$ բ) 0,5 գ) -1 դ) $\sqrt{3}/3$ ե) 1 զ) $\sqrt{3}/3$ **152.** ա) 0,5, $\sqrt{3}/2$, $\sqrt{3}/3$, $\sqrt{3}$ բ) $\sqrt{3}/2$, $-0{,}5$, $-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}/3$ գ) $-\sqrt{3}/2$, 0,5, $-\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}/3$ դ) $-\sqrt{2}/2$, $-\sqrt{2}/2$, 1, 1 ե) $-0{,}5$, $-\sqrt{3}/2$, $\sqrt{3}/3$, $\sqrt{3}$ զ) $\sqrt{2}/2$, $-\sqrt{2}/2$, -1, -1 **153.** ա) $\sqrt{3}$ բ) 2 **155.** ա) 2 բ) 8 գ) 18 դ) 224 **160.** ա) ոչ բ) ոչ գ) այո դ) այո **161.** ա) $\sin^2\alpha$ բ) $\operatorname{tg}^2\alpha$ գ) $1/\sin^2\alpha$ դ) $1/\cos^2\beta$ **162.** ա) $\operatorname{ctg}\alpha$ բ) $\operatorname{tg}\alpha$ գ) $\sin\alpha$ դ) $1/\cos^2\alpha$ **163.** ա) $\sin\beta\cos\beta$ բ) $\cos^2\beta$ գ) $1/\sin^2\alpha$ դ) $1/\cos^2\alpha$ **168.** ա) $\sin\alpha=-0{,}6$, $\operatorname{tg}\alpha=-3/4$, $\operatorname{ctg}\alpha=-4/3$ բ) $\cos\alpha=-12/13$, $\operatorname{tg}\alpha=-5/12$, $\operatorname{ctg}\alpha=-2{,}4$ գ) $\sin\alpha=-0{,}6$, $\cos\alpha=-0{,}8$, $\operatorname{ctg}\alpha=4/3$ դ) $\sin\alpha=0{,}96$, $\cos\alpha=0{,}28$, $\operatorname{tg}\alpha=24/7$ **169.** ա) -12 բ) 25 **170.** ա) $-40/41$ բ) $-1{,}875$ գ) $4/3$ դ) $8/17$ **171.** ա) -1 բ) 8 գ) -10 **172.** ա) $4/9$ բ) 3 գ) 1 **173.** ա) 7 բ) 18 գ) 47 **174.** ա) $-0{,}18$ բ) 0,944 գ) $-50/9$ **176.** ա) $-2/3$, 4 բ) $6/13$ գ) $9/17$, 1 **177.** ա) $(-3/7;1)$ բ) $(-\infty;0{,}6]\cup[1{,}4;\infty)$ գ) $[-5/6;1/8]$ **178.** ա) $\cos\alpha$ բ) $\operatorname{ctg}\alpha$ գ) $\sin\alpha$ դ) $\operatorname{ctg}\alpha$ ե) $\operatorname{tg}\alpha$ զ) $-\sin\alpha$ է) $\cos\alpha$ ը) $-\cos\alpha$ թ) $-\operatorname{ctg}\alpha$ **179.** ա) $-0{,}5$, $-\sqrt{3}/2$, $\sqrt{3}/3$, $\sqrt{3}$ բ) $-\sqrt{2}/2$,

$-\sqrt{2}/2$, 1, 1 գ) $-\sqrt{3}/2$, $-0{,}5$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}/3$ դ) $-\sqrt{3}/2$, $0{,}5$, $-\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}/3$ ե) $\sqrt{2}/2$, $\sqrt{2}/2$, 1, 1 զ) $-0{,}5$, $\sqrt{3}/2$, $-\sqrt{3}/3$, $-\sqrt{3}$ **180.** ա) $\operatorname{tg}\alpha$ բ) $-\sin\alpha$ գ) $-\cos\alpha$ դ) $-\cos\alpha$ ե) $-\operatorname{ctg}\alpha$ զ) $\operatorname{ctg}\alpha$ **181.** ա) $\cos(\pi/2-\alpha)$ բ) $\sin(\pi/2-\alpha)$ գ) $\operatorname{ctg}(\pi/2-\alpha)$ դ) $\operatorname{tg}(\pi/2-\alpha)$ **182.** ա) $-\sin\alpha$ բ) $-\cos\alpha$ գ) $-\operatorname{ctg}\alpha$ դ) $-\operatorname{tg}\alpha$ ե) $\sin\alpha$ զ) $-\operatorname{tg}\alpha$ **183.** ա) $\sin^2 x$ բ) $\sin^2 x$ գ) $\operatorname{tg}^2 x$ դ) $\cos^4 x$ ե) $-\cos^3 x$ զ) $-\operatorname{tg}^3 x$ **184.** ա) 1 բ) 0 գ) 1 դ) 1 **185.** $\sqrt{5}$, $\sqrt{5}/5$ **186.** ա) 12 բ) -21 գ) -6 դ) -3 **187.** ա) 5 բ) $3{,}5$ **188.** ա) $-2/7$ բ) $1/16$ **189.** ա) $-0{,}5$ բ) $0{,}5$ գ) $1-\sqrt{3}$ դ) $\sqrt{3}-1$ **190.** ա) $1/3$ բ) $-1/3$ գ) $\sqrt{2}-1$ դ) $1-\sqrt{2}$ **191.** ա) 2 բ) 1 **193.** ա) -1 բ) 5 **195.** 9 կմ/ժ **196.** 2 կմ/ժ **197.** 6 կմ/ժ, 5 կմ/ժ **198.** ա) $(\cos\alpha+\sin\alpha)\sqrt{2}/2$ բ) $(\cos\alpha-\sin\alpha)\sqrt{2}/2$ գ) $(\cos\alpha-\sin\alpha)\sqrt{2}/2$ դ) $(\cos\alpha+\sin\alpha)\sqrt{2}/2$ ե) $(1+\operatorname{tg}\alpha)/(1-\operatorname{tg}\alpha)$ զ) $(1-\operatorname{tg}\alpha)/(1+\operatorname{tg}\alpha)$ **199.** ա) $\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)/4$, $\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)/4$, $2-\sqrt{3}$, $2+\sqrt{3}$ բ) $\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)/4$, $\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)/4$, $2+\sqrt{3}$, $2-\sqrt{3}$ գ) $\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)/4$, $-\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)/4$, $-2-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}-2$ դ) $\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)/4$, $-\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)/4$, $\sqrt{3}-2$, $-2-\sqrt{3}$ **201.** ա) $\cos\alpha$ բ) $\sin\alpha$ գ) $\sqrt{3}\sin\alpha$ դ) $\sqrt{2}\sin\alpha$ **202.** ա) $\operatorname{tg}\alpha$ բ) $\operatorname{ctg}\alpha$ **203.** ա) $0{,}5$ բ) $0{,}5$ գ) $-0{,}5$ դ) $\sqrt{3}/2$ **207.** ա) -2 բ) 4 գ) 2 **208.** ա) -1 բ) $-0{,}936$ գ) -1 **209.** ա) $-0{,}8$, $0{,}6$ բ) 1, 0 գ) $\sqrt{2}/10$, $-7\sqrt{2}/10$ **211.** 45° **212.** 60° **213.** ա) 45° բ) 120° **214.** ա) 20, 21 բ) 7, 8 **215.** ա) -2 բ) $2/(n+2)$ **216.** ա) 13 բ) 31 **217.** ա) $2\cos\alpha$ բ) $\operatorname{tg}\alpha$ գ) 2 դ) $-\sin^2\alpha$ ե) $\cos^2\alpha$ զ) $-\cos 2\alpha$ **218.** ա) $0{,}5$ բ) $\sqrt{3}/2$ գ) -1 դ) 1 **219.** ա) $\sqrt{3}/3$ բ) -1 գ) -1 դ) 2 ե) $-\sqrt{3}$ զ) $\sqrt{3}$ **220.** ա) $2\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2)$ բ) $\cos^2(3x/2)-\sin^2(3x/2)$ գ) $2\sin((\alpha-\beta)/2)\cos((\alpha-\beta)/2)$ դ) $(\operatorname{ctg}^2(3\alpha/10)-1)/(2\operatorname{ctg}(3\alpha/10))$ **221.** ա) $2\sin 9^\circ\cos 9^\circ$ բ) $2\operatorname{tg}19^\circ/(1-\operatorname{tg}^2 19^\circ)$ գ) $2\sin(3\pi/10)\cos(3\pi/10)$ դ) $\cos^2(\pi/18)-\sin^2(\pi/18)$ **222.** ա) $(6-\sqrt{2}-2\sqrt{3})/4$ բ) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})/4$ գ) $(2\sqrt{2}-2-3\sqrt{3})/2$ դ) $(10+4\sqrt{2}-\sqrt{3})/2$ **223.** ա) $(\sin\alpha)/2$ բ) $-2\sin(\alpha/2)$ գ) $-2\operatorname{tg}\alpha$ դ) $-\sin 2\alpha$ **224.** ա) $2\sin\alpha$ բ) $\cos 2\alpha$ գ) -1 դ) 2 ե) $2\cos 2\alpha$ **227.** ա) 1 բ) $\cos(\alpha/4)$ գ) $\cos 4\alpha$ **228.** ա) 1 բ) $\operatorname{tg}^2(\alpha/2)$ գ) $\operatorname{tg}\alpha$ դ) $\operatorname{tg}^4\alpha$ **229.** $0{,}96$, $0{,}28$ **231.** ա) 24 բ) -7 **232.** ա) 3 բ) $-3{,}5$ **233.** ա) 4 բ) 4 **234.** 4 **235.** 8 **236.** ա) 2 բ) $2\sqrt{2}$ **237.** 12 **238.** ա) այո բ) ոչ գ) ոչ դ) այո **239.** 12 գ **240.** 16 գ **241.** 20 գ **242.** ա) $\sqrt{2-\sqrt{2}}/2$, $\sqrt{2+\sqrt{2}}/2$, $\sqrt{2}-1$ բ) $\sqrt{2+\sqrt{2}}/2$, $\sqrt{2-\sqrt{2}}/2$, $\sqrt{2}+1$ գ) $\sqrt{2+\sqrt{3}}/2$, $\sqrt{2-\sqrt{3}}/2$, $2+\sqrt{3}$ դ) $\sqrt{2-\sqrt{3}}/2$, $-\sqrt{2+\sqrt{3}}/2$, $\sqrt{3}-2$ **243.** ա) $\operatorname{tg}\alpha$ բ) $\operatorname{ctg}(3\alpha/2)$ գ) $\operatorname{tg}(5\alpha/2)$ դ) $\operatorname{ctg}3\alpha$ **244.** ա) 1 բ) -1 գ) $1-\cos\alpha$ դ) 1 ե) $0{,}5$ զ) 1 **246.** $2/3$ **247.** ա) 3, $14/3$ բ) 3, $7/3$ գ) $4\sqrt{3}$, $5\sqrt{3}$ դ) 15, 9 **248.** ա) $0{,}5$ բ) 6 գ) -3 դ) -3 ե) -1 **250.** ա) -2 բ) 3 գ) -8 **251.** ա) -21 բ) -60 **252.** $4:1$ **253.** $4:1$ **254.** 8 **255.** 32 **256.** ա) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})/4$ բ) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})/4$ գ) $(\sqrt{2}+1)/4$ դ) $0{,}25$ **257.** ա) $(2+\sqrt{3})/4$ բ) $(2-\sqrt{2})/4$ գ) $\sqrt{2}/4$ դ) $(1-\sqrt{2})/4$ **258.** ա) $(\sqrt{3}-1)/4$ բ) $(\sqrt{3}-1)/4$ գ) $(\sqrt{3}-1)/4$ դ) $(\sqrt{3}-1)/4$ **260.** ա) $2\sin 3\alpha\times$ $\times\cos 2\alpha$ բ) $2\sin 3x\cos 5x$ գ) $-2\sin y\sin 2y$ դ) $2\cos 3x\cos x$ **261.** ա) $2\sin 18^\circ\cos 6^\circ$ բ) $-\sqrt{3}\cos(\pi/12)$ գ) $2\sin(3\pi/8)\sin(5\pi/24)$ դ) $2\sin(3\pi/10)\cos(\pi/10)$ **262.** ա) $2\cos(x+\pi/4)\times$

$\times\cos(-2x+\pi/4)$ բ) $2\sin(x+y-\pi/4)\cos(x-y+\pi/4)$ գ) $2\sin(y+\pi/4)\cos(2y-\pi/4)$ դ) $2\sin(-y-2x+\pi/4)\cos(y-2x+\pi/4)$ **263.** ա) 6 բ) 10 **264.** $24\sqrt{6}$ **268.** ա) $-\sin 2x\div$ $\div(\cos x\cos 3x)$ բ) $\sin(3x+y)/\cos 3x\cos y$ գ) $-\sqrt{2}/\cos(\pi/12)$ դ) $\sin(\pi/5)\div$ $\div(\cos(4\pi/5)\cos(3\pi/5))$ **269.** ա) $2\cos(\pi/6+x/2)\cos(\pi/6-x/2)$ բ) $2\sin(\pi/6+\alpha)\cos(\pi/6-\alpha)$ գ) $2\sin(\pi/4-x/2)\cos(\pi/4+x/2)$ դ) $2\sin(\pi/12+2x)\cos(\pi/12-2x)$ ե) $4\sin(\pi/6-\alpha)\times$ $\times\cos(\pi/6+\alpha)$ զ) $4\cos(\pi/8+x/2)\cos(\pi/8-x/2)$ **270.** ա) $4\cos x\cos(x/2)\sin(5x/2)$ բ) $4\sin x\sin 4x\cos 2x$ գ) $4\sin 2x\sin(9x/2)\cos(5x/2)$ դ) $4\cos x\sin(\pi/4+3x)\cos(\pi/4-4x)$ **272.** 12 կմ/ժ **273.** 10 կմ/ժ, 45 կմ/ժ **274.** 60 կմ/ժ, 80 կմ/ժ **280.** $\sin 4\alpha=$ $=4\sin\alpha\cos^3\alpha-4\sin^3\alpha\cos\alpha$, $\cos 4\alpha=8\cos^4\alpha-8\cos^2\alpha+1$ **282.** ա) $\operatorname{ctg}\alpha$ բ) $-\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha$ **292.** ա) $(-\infty;-2)\cup(-2;2)\cup(2;\infty)$ բ) $(-\infty;2)\cup(2;3)\cup(3;\infty)$ գ) $(-\infty;2]\cup[5;\infty)$ դ) $(2;\infty)$ ե) $(-\infty;-1]\cup[1;2)\cup(2;\infty)$ զ) $(-\infty;-2]\cup[1;3)\cup(3;\infty)$ **293.** ա) $f(-2)=-2{,}5$, $f(3)=10/3$, $f(1/3)=10/3$ բ) $f(0)=1$, $f(2)=3$, $f(4)=1$ գ) $f(-\pi/12)=0{,}25$, $f(0)=0$, $f(\pi/3)=0{,}75$ դ) $f(-1)=-2$, $f(0)=0$, $f(8)=514$ **294.** ա) $(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;\infty)$ բ) $f(-2)=-11/3$, $f(0{,}5)=14/3$, $f(3)=0{,}5$ գ) այո, այո, ոչ **295.** ա) $f(1)=0$, $f(1{,}5)=0{,}5$, $f(2)=-1$, $f(\sqrt{6})=$ $=8$ բ) $f(-2)=-5$, $f(-1/3)=4/3$, $f(0{,}5)=0{,}5$, $f(\sqrt{2})=1$ **296.** ա) 1, $-0{,}75$ բ) $(1\pm\sqrt{13})/4$ գ) -1, 0,75 **297.** ա) 32° բ) 5° գ) -40° դ) 50° **298.** $t=(T-32)/1{,}8$ ա) -5° բ) $-17{,}(7)^\circ$ գ) -40° դ) $28{,}(8)^\circ$ **299.** ա) $(-\infty;-3)\cup(-3;-1)\cup(-1;1)\cup(1;3)\cup(3;\infty)$ բ) $(-\infty;2)\cup(2;4)\cup(4;\infty)$ գ) $(-\infty;0)$ դ) $(1;\infty)$ **300.** ա) $(-\infty;3)\cup(3;\infty)$, $(-\infty;2)\cup(2;\infty)$ բ) $(-\infty;-1)\cup(-1;\infty)$, $(-\infty;1)\cup$ $\cup(1;\infty)$ գ) $\mathbf{R}$, $(0;1/9]$ դ) $(-\infty;0)\cup(0;\infty)$, $\{-1;1\}$ ե) $[-5;5]$, $[0;5\sqrt{2}]$ զ) $\mathbf{R}$, $(0;0{,}4]$ **301.** ա) $(-\infty;-4]\cup[4;\infty)$ բ) $[-6;6]$ գ) $(1;6]$ դ) $(-\infty;-2]\cup[6;8)$ **302.** ա) $S=15t$ բ) $S=54t$ **303.** ա) $V=a^3$ բ) $V=(S/6)^{3/2}$ **304.** ա) $R=2d/3$ բ) $R=\sqrt{3}a/3$ **305.** $S=2R^2$ **306.** $S=$ $=x\sqrt{4R^2-x^2}$, $(0;2R)$ **307.** $f(0)=0$, $f(3)=6$, $f(-5)=-10$, $f(2/3)=4/3$ **308.** 143 **309.** 91 **312.** ա) ոչ բ) այո գ) ոչ դ) այո **313.** ա) $(0;-9)$, $(1{,}8;0)$ բ) $(0;15)$, $(5;0)$ գ) $(0;-8)$, $(2;0)$, $(-4/3;0)$ դ) $(0;-121)$, $(11;0)$, $(-11;0)$ **314.** ա) $(2;3)$ բ) $(-1;6)$ գ) $(1;-1)$, $(-0{,}4;3{,}2)$ դ) $(-1;1)$, $(2;4)$ **318.** ա) $D=[-1;4]$, $E=[-1;3]$, $f(0)=3$, $f(-1)=f(1)=f(3)=0$, $f(2)=-1$, $(-1;1)\cup(3;4]$, $(1;3)$, 2 բ) $D=[-3;3]$, $E=[-1;2]$, $f(0)=0$, $f(-2)=f(0)=f(2)=0$, $f(-1)=f(3)=-1$, $[-3;-2)\cup(0;2)$, $(-2;0)\cup(2;3]$; 3 **322.** 7681 **323.** 11354 **325.** ա) $(-\infty;1)\cup(1;\infty)$, $1+x^2-1/(1-x)$ բ) $(-\infty;1)\cup(1;\infty)$, $(1+x^2)/(1-x)$ գ) $(-\infty;1)\cup(1;\infty)$, $(1+x^2)(1-x)$ դ) $(-\infty;1)\cup$ $\cup(1;\infty)$, $1/(1-x)(1+x^2)$ ե) $(-\infty;1)\cup(1;\infty)$, $1+1/(1-x)^2$ զ) $(-\infty;0)\cup(0;\infty)$, $-1/x^2$ է) $(-\infty;0)\cup$ $\cup(0;1)\cup(1;\infty)$, $1-1/x$ ը) $\mathbf{R}$, x^4+2x^2+2 **326.** ա) $[-1;1]$ բ) $[0;1]$ գ) $[-0{,}5;0]$ դ) $(-\infty;0]$ ե) $[0;0{,}25]$ զ) $[0;1]$ **327.** ա) $[0;\infty)$, x բ) $\mathbf{R}$, $|x|$ գ) $[0;\infty)$, $\sqrt[4]{x}$ դ) $\mathbf{R}$, x^4 **328.** ա) $f(x)=(x^2+2x-1)/3$ բ) $f(x)=(2-x^2)/(3x)$ գ) $f(x)=-1$ դ) $f(x)=-0{,}5$ **329.** ա) $(x-4)^2+5$ բ) $-2(x-1)^2$ գ) $3(x-1)^2-13$ **338.** ա) $a>0$, $b<0$, $c<0$ բ) $a<0$, $b>0$, $c>0$ գ) $a>0$, $b>0$, $c>0$ **340.** ա) x^2+6x+7 բ) $x^2-10x+29$ գ) $(7x+57)/(x+8)$ դ) $(58-9x)/(x-6)$ **341.** $3f(2x+10)-4$ **342.** ա) 0; 2; 4; 3; 2 բ) 0; 2; 4; 3; 2 **343.** ա) $\{-0{,}5\}\cup(3;\infty)$ բ) 3 գ) $(-0{,}5;3)$

344. ա) $(-\infty;-2/3)\cup\{2/3\}$ բ) $-2/3$ գ) $(-2/3;2/3)$ **346.** ա) 2 բ) 4 գ) 6 դ) 2 **347.** ա) $y=$ $=2-5/(x+1)$ բ) $y=0{,}2+0{,}8/(x-4)$ գ) $y=1{,}5+2{,}5/(x-3)$ **351.** ա) $y=(x+1)/(x-1)$ բ) $-(7x+47)/(5x+13)$ **352.**ա) 64250 դր բ) 437500 դր գ) 14 դ) 11 **353.**ա) 20 գ բ) 25 գ) 40 գ դ) 55 գ **354.** Վերևից՝ բ) գ) դ), ներքևից՝ ա) գ) դ), սահմանափակ՝ գ) դ) **355.** Վերևից՝ գ) դ) ե), ներքևից՝ բ) գ) դ) ե), սահմանափակ՝ գ) դ) ե) **356.** ա) Մեծագույն չունի, փոքրագույնը՝ $-8{,}5$ բ) մեծագույնը՝ 0, փոքրագույն չունի գ) մեծագույնը՝ 15, փոքրագույնը՝ -15 դ) մեծագույնը՝ -5, փոքրագույնը՝ -9 ե) մեծագույնը՝ 3, փոքրագույնը՝ 0 զ) մեծագույնը՝ 1,5, փոքրագույնը՝ 0 **357.** ա) $y(0)=0$, $y(3)=36$ բ) $y(3)=1$, փոքրագույն չունի գ) $y(0)=3$, փոքրագույն չունի դ) $y(0)=0$, մեծագույն չունի ե) $y(0)=0{,}5$, փոքրագույն չունի զ) $y(0)=1$, փոքրագույն չունի **358.** ա) $y(0)=0$, մեծագույն չունի բ) $y(0)=2$, $y(\pm 0{,}5)=0$ գ) $y(3)=1$, մեծագույն չունի դ) $y(0)=7$, $y(\pm 2)=\sqrt{21}$ **360.** 45° **361.** 5 սմ, 5 սմ **362.** 5 սմ, 5 սմ **363.** ա) Մեծագույնը՝ $M+10$, փոքրագույնը՝ $m+10$ բ) մեծագույնը՝ M, փոքրագույնը՝ m գ) մեծագույնը՝ $7M-3$, փոքրագույնը՝ $7m-3$ դ) մեծագույնը՝ $-m$, փոքրագույնը՝ $-M$ ե) մեծագույնը՝ M^3, փոքրագույնը՝ m^3 զ) եթե $m\le 0\le M$, ապա մեծագույնը՝ m^2-ու և M^2-ու մեծագույնը, եթե $m>0$, ապա մեծագույնը՝ M^2, փոքրագույնը՝ m^2, եթե $M<0$, ապա մեծագույնը՝ m^2, փոքրագույնը՝ M^2 **364.** 53 **365.** 47 **372.**ա) π բ) 2 գ) 1 դ) $\pi/8$ ե) 6π զ) 12 է) 0,5 ը) 1,5 **373.**ա) 2 բ) 0,2 գ) 2π դ) 6π **379.** ա) ոչ բ) ոչ գ) այո դ) այո **380.** Ոչ՝ $\sin 2x=2\sin x\cos x$ **381.** ա) $(-\infty;0]\cup$ $\cup[0{,}8;\infty)$, 1, $-0{,}2$ բ) $(-\infty;-2]\cup[2;\infty)$, $\varnothing$ գ) R, -5, -1 դ) $(-\infty;0)\cup(15;\infty)$, -5 ե) $(\sqrt{2/3};\infty)$, 3 զ) $(-\infty;-3)\cup(-3;3)\cup(3;\infty)$, $\varnothing$ **382.** ա) $(-\infty;-4]\cup[4;\infty)$, $(-\infty;-4]\cup[4;\infty)$ բ) $(-\infty;-6]\cup$ $\cup[0;\infty)$, $\varnothing$ գ) $\mathbf{R}$, $\varnothing$ դ) $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}$ ե) $\mathbf{R}$, 3 զ) $(-\infty;-\sqrt{2})\cup(-\sqrt{2};\sqrt{2})\cup(\sqrt{2};\infty)$, $(-\infty;-\sqrt{2})\cup$ $\cup(-\sqrt{2};\sqrt{2})\cup(\sqrt{2};\infty)$ **385.** ա) կենտ է բ) զույգ է գ) կենտ է դ) կենտ է ե) զույգ է զ) զույգ է **386.** ա) Կենտ է, եթե $f=0$, զույգ է, եթե $g=0$, մնացած դեպքերում՝ ո՛չ զույգ, ո՛չ կենտ բ) կենտ է, եթե $g=0$, զույգ է, եթե $f=0$, մնացած դեպքերում՝ ո՛չ զույգ, ո՛չ կենտ գ) զույգ է դ) կենտ է **387.** ա) բ) դ) ե) Ոչինչ չի կարելի ասել զ) զույգ է **389.** $f(x)=\varphi(x)+\psi(x)$, որտեղ $\varphi(x)=(f(x)+f(-x))/2$, $\psi(x)=(f(x)-f(-x))/2$ **390.** ա) $\varphi(x)=3x^2+7$, $\psi(x)=-x$ բ) $\varphi(x)=(x^2+1)^2\Big/\left((x^2+1)^2-x^2\right)$, $\psi(x)=-x(x^2+1)\div$ $\div\left((x^2+1)^2-x^2\right)$ գ) $\varphi(x)=-1/(x^2-1)^2$, $\psi(x)=x/(x^2-1)^2$ **391.** ա) կենտ է բ) ո՛չ զույգ, ո՛չ կենտ գ) կենտ է դ) զույգ է ե) զույգ է զ) ո՛չ զույգ, ո՛չ կենտ է) զույգ է ը) ո՛չ զույգ, ո՛չ կենտ թ) զույգ է **392.** ա) զույգ է բ) ո՛չ զույգ, ո՛չ կենտ գ) զույգ է դ) կենտ է ե) ո՛չ զույգ, ո՛չ կենտ զ) ո՛չ զույգ, ո՛չ կենտ **393.** ա) կենտ է բ) կենտ է գ) զույգ է դ) ո՛չ զույգ, ո՛չ կենտ **398.**ա) ոչ բ) այո գ) ոչ դ) այո **400.**ա) $f\uparrow(-\infty;\infty)$, էքստրեմում չունի բ) $f\downarrow(-\infty;\infty)$, էքստրեմում չունի գ) $f\downarrow(-\infty;0]$, $f\uparrow[0;\infty)$, $x_{\min}=0$, $y_{\min}=-1$ դ) $f\uparrow(-\infty;0]$, $f\downarrow[0;\infty)$, $x_{\max}=0$, $y_{\max}=3$ ե) $f\downarrow(-\infty;2]$, $f\uparrow[2;\infty)$, $x_{\min}=2$, $y_{\min}=0$ զ) $f\uparrow(-\infty;0]$, $f\downarrow[0;\infty)$, $x_{\max}=0$, $y_{\max}=2$ է) $f\downarrow(-\infty;5]$, $f\uparrow[5;\infty)$, $x_{\min}=5$, $y_{\min}=0$ ը) $f\uparrow(-\infty;1]$, $f\downarrow[1;\infty)$, $x_{\max}=1$, $y_{\max}=1$ թ) $f\uparrow(-\infty;0]$, $f\downarrow[0;\infty)$, $x_{\max}=0$, $y_{\max}=1$ **401.** ա) $f\uparrow(-\infty;3]$, $f\downarrow[3;\infty)$, $x_{\max}=3$, մեծագույն արժեքը՝ 1, փոքրագույն չունի բ) $f\downarrow(-\infty;2)$ և $(2;\infty)$, էքստրեմումի կետեր, մեծագույն և փոքրագույն արժեքներ չունի գ) $f\downarrow(-\infty;-2]$, $f\uparrow[-2;\infty)$, $x_{\min}=-2$, մեծագույն արժեք չունի, փոքրագույնը՝ 1 դ) $f\downarrow(-\infty;\infty)$ ե) $f\downarrow(-\infty;5)$ և $(5;\infty)$, էքստրեմում չունի զ) $f\downarrow(-\infty;2]$, $f\uparrow[2;\infty)$, $x_{\min}=2$, մեծագույն արժեք չունի, փոքրագույնը՝ 1 **402.** ա) $f\uparrow(-\infty;-3)$ և $(-3;\infty)$, էքստրեմումի կետեր, մեծագույն և փոքրագույն արժեքներ չունի բ) $f\uparrow(-\infty;2)$, $f\downarrow(2;\infty)$, էքստրեմումի կետեր, մեծագույն և փոքրագույն արժեքներ չունի գ) $f\downarrow(-\infty;-1)$ և $(-1;\infty)$, էքստրեմումի կետեր, մեծագույն և փոքրագույն արժեքներ չունի դ) $f\uparrow(-\infty;\infty)$ ե) $f\uparrow(-\infty;-2]$ և $[0;2]$, $f\downarrow[-2;0]$ և $[2;\infty)$, $x_{\max}=-2$, $x_{\min}=0$, $x_{\max}=2$, մեծագույն արժեքը 4 է, փոքրագույն՝ չունի զ) $f\downarrow(-\infty;-1]$ և $[0;1]$, $f\uparrow[-1;0]$ և $[1;\infty)$, $x_{\min}=-1$, $x_{\max}=0$, $x_{\min}=1$, մեծագույն արժեք չունի, փոքրագույնը՝ -1 **415.** 72 դետալ, 30 դետալ **416.** 2 կմ, 2,5 կմ **423.** 10, 15 **424.** 18, 15 **425.** ա) $y=(x-5)/2$ բ) $y=\sqrt[3]{x}$ գ) $y=x^3$ դ) $y=(x^2+2)/5$, $x\in[0;\infty)$ **426.** ա) $y=3x+10$, $x\in(-10/3;-3)$ բ) $y=1/\sqrt{x}$, $x\in(0;\infty)$ գ) $y=\sqrt[4]{x}$, $x\in(0;\infty)$ դ) $y=-\sqrt[4]{x}$, $x\in(0;\infty)$ **427.** ա) 4 բ) 0 գ) 2 **428.** ա) $\varphi(-x)$ բ) $\varphi(x/2)$ գ) $\varphi(\sqrt[3]{x})$ դ) $-\varphi(x)$ ե) $\varphi(x)/3$ զ) $\varphi(x)-1$ **429.** ա) $x\in\mathbf{R}$ բ) $x\in\mathbf{R}$ գ) $x\in[0;\infty)$ դ) $x\in[0;\infty)$ ե) $x\in[0;\infty)$ զ) $x\in(-\infty;0]$ **432.** Ոչ **434.** Համաչափ է $y=x$ ուղղի նկատմամբ, օրինակ՝ $y=7-x$ **435.** 2, 4, 6 **436.** $-1/6$, 2 **438.**[1] ա) $(\pi k;\pi+\pi k)$ բ) $(\pi/2+2\pi k;5\pi/2+2\pi k)$ գ) $(-\pi/2+\pi k;\pi/2+\pi k)$ դ) $(2\pi k;2\pi+2\pi k)$ ե) $(-\pi/2+2\pi k;3\pi/2+2\pi k)$ զ) $(-\pi+2\pi k;\pi+2\pi k)$ **439.** ա) $[2\pi k;\pi+2\pi k]$ բ) $[\pi/2+2\pi k;3\pi/2+2\pi k]$ գ) $(-\pi/2+2\pi k;\pi/2+2\pi k)$ դ) $(-\pi+2\pi k;2\pi k)$ ե) $[\pi k;\pi/2+\pi k]$ զ) $[-\pi/4+\pi k;\pi/4+\pi k]$ **440.** ա) $\sin(-15^\circ)$, $\sin 15^\circ$, $\sin 75^\circ$ բ) $\cos 145^\circ$, $\cos 75^\circ$, $\cos 22^\circ$ գ) $\cos(7\pi/5)$, $\cos(-\pi/9)$, $\cos(-\pi/13)$ դ) $\sin(5\pi/3)=\sin(4\pi/3)<\sin(\pi/5)$ **441.** ա) $\sin(-1)$, $\sin 1$, $\sin 2$ բ) $\cos 3$, $\cos 2$, $\cos 1$ գ) $\cos 3{,}5$, $\cos 5$, $\cos 6$ դ) $\sin 4$, $\sin 2{,}5$, $\sin 2$ **442.** ա) $x_{\max}=5\pi/6+2\pi k$, $y_{\max}=1$, $x_{\min}=-\pi/6+2\pi k$, $y_{\min}=-1$ բ) $x_{\max}=\pi k$, $y_{\max}=1$, $x_{\min}=\pi/2+\pi k$, $y_{\min}=-1$ գ) $x_{\max}=-\pi/2+2\pi k$, $y_{\max}=2$, $x_{\min}=\pi/2+2\pi k$, $y_{\min}=0$ դ) $x_{\max}=\pi/2+\pi k$, $y_{\max}=1$, $x_{\min}=\pi k$, $y_{\min}=0$ **443.** ա) Մեծագույնը՝ 0, փոքրագույնը՝ -2 բ) մեծագույնը՝ 2, փոքրագույնը՝ 0 գ) մեծագույնը՝ 5, փոքրագույնը՝ -1 դ) մեծագույնը՝ 9, փոքրագույնը՝ -1 **444.** ա) Մեծագույնը՝ 0, փոքրագույնը՝ -6 բ) մեծագույնը՝ 0, փոքրագույնը՝ $-6{,}125$ գ) մեծագույնը՝ 9, փոքրագույնը՝ -3 դ) մեծագույնը՝ 3, փոքրագույնը՝ -2 **447.** ա) բ) գ) դ) Այո **451.** 45 **452.** 8, 10, 12 **454.** ա) $\operatorname{tg}73^\circ$, $\operatorname{tg}43^\circ$, $\operatorname{tg}(-50^\circ)$ բ) $\operatorname{ctg}13^\circ$, $\operatorname{ctg}72^\circ$, $\operatorname{ctg}107^\circ$ գ) $\operatorname{ctg}(6\pi/5)$, $\operatorname{ctg}(2\pi/5)$, $\operatorname{ctg}(5\pi/7)$ դ) $\operatorname{tg}(-7\pi/9)$, $\operatorname{tg}(\pi/7)$, $\operatorname{tg}(\pi/9)$ **455.** ա) $\operatorname{tg}1$, $\operatorname{tg}(-1)$, $\operatorname{tg}2$ բ) $\operatorname{ctg}1$, $\operatorname{ctg}2$, $\operatorname{ctg}3$ գ) $\operatorname{ctg}3{,}5$, $\operatorname{ctg}5$, $\operatorname{ctg}6$ դ) $\operatorname{tg}4$, $\operatorname{tg}2{,}5$, $\operatorname{tg}2$ **456.** ա) $(\pi k/2;\pi/2+\pi k/2)$ բ) $(\pi k/2;\pi/2+\pi k/2)$ գ) $[-\pi/2+\pi k;\pi k)$ դ) $[\pi k;\pi/2+\pi k)$ ե) $(-\pi/2+\pi k;\pi k)$ զ) $(\pi k;\pi/2+\pi k)$ **460.** 7 **461.** 21 **463.** ա) 0 բ) π գ) $7\pi/12$ դ) $-\pi/3$ **464.** ա) $2\pi/3$ բ) $\pi/2$ գ) π դ) $-\pi/12$ **465.** ա) Այո բ) այո գ) ոչ դ) ոչ ե) ոչ զ) այո **467.** ա) $5-2\pi$ բ) $12-4\pi$ գ) $8-3\pi$ **468.** ա) Ոչ բ) ոչ գ) այո **470.** $\pi/2$ **472.** ա) 1

[1] Այսուհետև եռանկյունաչափական առաջադրանքների պատասխաններում ենթադրվում է, որ $k\in\mathbf{Z}$:

բ) $9-2\pi$ գ) $2\pi-4$ **473.** ա) $3\pi/10$ բ) $5\pi/14$ գ) $\pi/10$ դ) $7/8$ ե) $\sqrt{21}/5$ զ) $2\sqrt{13}/13$ **476.** ա) 3 բ) $-1/11$, 4 գ) $(6;5)$, $(-6;-5)$ դ) $(8;6)$, $(-7;-9)$ **478.** ա) $-\pi/12$ բ) 0 գ) $4\pi/3$ դ) $11\pi/12$ ե) $\pi/6$ զ) $-7\pi/12$ **482.** ա) $3\pi/8$ բ) $-3\pi/11$ գ) $4-\pi$ **483.** ա) 13 բ) $-0{,}75$ գ) $\left(\sqrt{17}-1\right)/4$ **486.** ա) 6 բ) 1 **487.** ա) $(-2;3)$, $(2;-3)$ բ) $(5;3)$ **488.** ա) $(-1)^k\pi/6+\pi k$ բ) $\pi/6+2\pi k/3$ գ) $(-1)^k\pi/12+\pi k/4$ դ) $(-1)^{k+1}\pi/6+\pi k$ ե) $\pi k/3$ զ) $(-1)^k\arcsin(2/3)/2+\pi k/2$ է) $(-1)^{k+1}2\pi/3+2\pi k$ ը) $(-1)^k 3\pi/4+3\pi k$ թ) $(-1)^{k+1}5\pi/4+5\pi k$ **489.** ա) $\pi+2\pi k$ բ) $\pm\pi/8+\pi k$ գ) $\pm\pi/6+2\pi k$ դ) $\pm4\pi/3+4\pi k$ ե) $\pm3\pi/8+\pi k$ զ) $\pi/6+\pi k/3$ է) $\pm5\pi/24+\pi k/2$ ը) $\pm\arccos\left(\sqrt{5}/3\right)+$ $+2\pi k$ թ) $6\pi k$ **490.** ա) $\pi/4+\pi k$ բ) $(\operatorname{arctg}3)/2+\pi k/2$ գ) $\pi/6+\pi k/2$ դ) $\pi/6+\pi k$ ե) $2\pi k$ զ) $-\pi/2+3\pi k$ է) $-\operatorname{arctg}\sqrt{2}+\pi k$ ը) $-\pi/12+\pi k/3$ թ) $(\operatorname{arctg}7)/5+\pi k/5$ **491.** ա) $\pi/4+\pi k/2$ բ) $-\pi/18+\pi k/3$ գ) $\pi/2+2\pi k$ դ) $-\pi/6+\pi k/2$ ե) $-\pi/4+\pi k$ զ) $\operatorname{arctg}(1/2)/2+\pi k/2$ **492.** ա) $5\pi/6+4\pi k$, $-\pi/6+4\pi k$ բ) $(-1)^{k+1}\pi/9-\pi/12+\pi k/3$ գ) πk դ) $-5\pi/3+4\pi k$ **493.** ա) $-\pi/4+\pi k$, $5\pi/12+\pi k$ բ) $2\pi/3+(-1)^{k+1}2\pi/3+2\pi k$ գ) $2\pi k$ դ) πk, $\pi/4+\pi k$ **496.** ա) πk, $(-1)^k\pi/6+\pi k$ բ) πk, $\pm\pi/6+2\pi k$ գ) πk, $\pi/4+\pi k$ դ) $\pi/2+\pi k$ **497.** ա) πk, $\pm\pi/3+2\pi k$ բ) $\pi+2\pi k$, $\pi/2+2\pi k$ գ) $\pi/2+\pi k$, $(-1)^k\pi/4+\pi k$ դ) $\pm\pi/3+2\pi k$ **498.** ա) $-\pi/4+$ $+\pi k$ բ) $\pi/3+\pi k$ գ) $\operatorname{arctg}(1/2)+\pi k$ դ) $-\operatorname{arctg}4+\pi k$ **499.** ա) $\pi k/5$, $\pi/6+\pi k/3$ բ) $\pi/4+\pi k/2$, $\pi/14+\pi k/7$ գ) $\pi k/2$, $\pi/10+\pi k/5$ դ) $\pi k/5$ ե) $\pi/20+\pi k/5$, $\pi/16+\pi k/4$ զ) $-\pi/16+\pi k/4$, $\pi/8+\pi k/2$ **500.** ա) $2\pi k/3$, $\pi/7+2\pi k/7$ բ) $2\pi k/5$ գ) $\pi k/4$ դ) $\pi k/2$ **501.** ա) $-\pi/12+2\pi k$, $-7\pi/12+2\pi k$ բ) πk, $\pi/4+\pi k$ գ) $3\pi/4+2\pi k$ դ) $\varnothing$ **502.** ա) $13\pi/36+$ $+2\pi k/3$, $-7\pi/36+2\pi k/3$ բ) $\pi+4\pi k$, $\pi/3+4\pi k$ գ) $\pi/8+\pi k$ **503.** ա) $\pi/24+\pi k/2$, $-\pi/12+\pi k$ բ) $\pi/8+\pi k$, $3\pi/16+\pi k/2$ գ) $\pi/24+\pi k/6$, $\pi/12+\pi k$ **504.** ա) $-\operatorname{arctg}(4/3)/5+$ $+2\pi k/5$ բ) $\pm2\pi/3-\operatorname{arctg}(12/5)+2\pi k$ **505.** ա) $-\pi/2+2\pi k$, $(-1)^k\pi/6+\pi k$ բ) $(-1)^{k+1}\times$ $\times\arcsin(1/3)+\pi k$ գ) $\pm2\pi/3+2\pi k$, $\pm\arccos(1/3)+2\pi k$ դ) $\pm\pi/3+2\pi k$ **506.** ա) $-\pi/4+\pi k$, $\operatorname{arctg}(1/3)+\pi k$ բ) $-\operatorname{arctg}2+\pi k$, $\operatorname{arctg}(1/2)+\pi k$ գ) $\pi/4+\pi k$, $-\operatorname{arctg}2+\pi k$ դ) $\operatorname{arctg}2+\pi k$, $-\operatorname{arctg}(1/3)+\pi k$ **507.** ա) $(-1)^k\pi/6+\pi k$ բ) $\pi/2+2\pi k$, $(-1)^k\pi/6+\pi k$ գ) $(-1)^{k+1}\pi/6+\pi k$ դ) $2\pi k$, $\pm\pi/3+2\pi k$ **508.** ա) $\pi k/2$ բ) $\pi/4+\pi k/2$, $\pm\pi/6+\pi k/2$ գ) $\pm\pi/3+\pi k$ դ) $\pm4\pi/3+4\pi k$ **509.** ա) $2\pi k$, $\pi/2+\pi k$ բ) πk, $-\pi/2+2\pi k$ գ) $(-1)^k\pi/24+\pi k/4$ **510.** ա) $\pi/4+\pi k$, $-\operatorname{arctg}(2/3)+\pi k$ բ) $\pi/4+\pi k$, $\operatorname{arctg}2+\pi k$ գ) $\pi/4+\pi k$, $\operatorname{arctg}(7/2)+\pi k$ դ) $\pi/4+\pi k$, $-\operatorname{arctg}(1/2)+\pi k$ **511.** ա) $\pi/4+\pi k$, $-\operatorname{arctg}5+\pi k$ բ) $-\pi/4+\pi k$, $\operatorname{arctg}(1/3)+\pi k$ գ) $\pi/4+\pi k$, $-\operatorname{arctg}6+\pi k$ դ) $\pi/4+\pi k$, $\operatorname{arctg}4+\pi k$ **512.** ա) $\pi k/12$ բ) $\pi k/2$, $\pi k/9$ գ) $\pi k/4$, $\pi/24+$ $+\pi k/12$ դ) πk, $\pi/6+\pi k/3$ **513.** ա) $\pi/6+\pi k/3$, $2\pi k/7$, $2\pi k/5$ բ) $2\pi k/5$, $\pi/2+\pi k$, $\pi+2\pi k$ գ) πk, $\pi/10+\pi k/5$, $\pi/4+\pi k/2$ **514.** ա) $\pi/8+\pi k/4$, $\pm\pi/3+\pi k$ բ) $\pi/8+\pi k/4$, $\pm\pi/3+\pi k$ գ) πk **515.** ա) $\pi k/2$, $\pi/6+\pi k$ բ) $\pi/2+\pi k$, $\pi/6+\pi k$, $\pi/3+\pi k/2$ **516.** ա) $\pm\pi/12+\pi k/2$ բ) πk գ) $\pm\pi/3+\pi k$ դ) $\pi/4+\pi k/2$ **517.** ա) πk, $\pi/4+\pi k/2$ բ) $\pi k/3$, $\pi/12+\pi k/3$ գ) $\pm\pi/6+\pi k$ դ) $\pi/4+\pi k/2$, $\pm\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}/2\right)+\pi k$ **518.** ա) $\pi/2+\pi k$ բ) $\pi k/2$ գ) πk, $\pm\arccos(1/3)/2+\pi k$ դ) $\pi/4+\pi k/2$ **519.** ա) $\pi k/2$, $\pm\pi/6+2\pi k/5$ բ) $\pi/4+\pi k/2$, $(-1)^k\pi/6+\pi k$ գ) $(-1)^k\pi/32+$

$+\pi k/8$ դ) $(-1)^k\pi/16+\pi k/4$ **520.** ա) 4 բ) 2 գ) 32 դ) 50 **521.** ա) 14 բ) 25 գ) 8 դ) 8
522. ա) -1 բ) $-i$ գ) 1 դ) i ե) -1 զ) $-i$ է) 1 **523.** ա) $13+11i$ բ) $5+2i$ գ) $4+i$ դ) -3
ե) $12+15i$ զ) $-13-5i$ **524.** ա) $24-12i$ բ) $14+4i$ գ) $24+12i$ դ) $7-21i$ **525.** ա) $12+5i$
բ) $24+7i$ գ) $3+2i$ դ) $1+i$ ե) $2\sqrt{2}+2i$ զ) $3+i\sqrt{3}$ **526.** ա) $11+23i$ բ) $36+33i$ գ) $15+23i$
դ) $2-110i$ ե) $-5-25i$ զ) $54-62i$ է) $10i$ ը) $-2+16i$ **527.** ա) $39+80i$ բ) $-77-36i$
գ) $-46+9i$ դ) $-11+2i$ **536.** ա) $-i$ բ) $-1,1+0,3i$ գ) $-i$ դ) $-1,4-1,8i$ ե) $3,7+0,1i$
զ) $-0,22+0,54i$ է) $15,5+12,5i$ ը) $-15,5-8,5i$ **537.** $10i$, $1/5+i\sqrt{3}/5$ **538.** ա) $0,6+0,8i$
բ) $3,5+0,5i$ գ) $4,3+0,9i$ դ) $-6i$ ե) $\sqrt{0,4}$ զ) -5 է) $\sqrt{13/29}$ ը) $2/3-2i/3$ **539.** ա) $(z+i)\times$
$\times(z-i)$ բ) $(z+3i)(z-3i)$ գ) $(z+1)(z-1)(z+i)(z-i)$ դ) $(z+2)(z-2)(z+2i)(z-2i)$
540. ա) $\sqrt{6}+\sqrt{7}$ բ) $\sqrt{5}+\sqrt{7}$ **543.** ա) $\sqrt{2}$, $\pi/4$ բ) $\sqrt{2}$, $5\pi/4$ գ) 2, $-\pi/6$ դ) 2, $2\pi/3$ ե) $3\sqrt{5}$,
$\mathrm{arcctg}(-0,5)$ զ) $\sqrt{113}$, $\pi+\mathrm{arctg}(0,875)$ է) $\sqrt{137}$, $\mathrm{arcctg}(-4/11)$ ը) $\sqrt{15}$, $\mathrm{arctg}(-0,5)$
544. ա) $3(\cos(\pi/2)+i\sin(\pi/2))$ բ) $5(\cos\pi+i\sin\pi)$ գ) $2\sqrt{2}(\cos(-\pi/4)+i\sin(-\pi/4))$
դ) $2(\cos(-\pi/3)+i\sin(-\pi/3))$ ե) $25(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, $\varphi=\arcsin(-0,28)$ զ) $10(\cos\varphi+i\sin\varphi)$,
$\varphi=\arcsin(0,6)$ է) $10(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, $\varphi=\arcsin(-0,6)$ ը) $25(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, $\varphi=$
$=\arccos(-0,96)$ **545.** ա) $3+3i$ բ) $\sqrt{3}/2+3i/2$ գ) $-3,5\sqrt{3}-3,5i$ **548.** ա) $(-b;a)$ բ) 90°,
45°, 45° գ) $(a^2+b^2)/2$ դ) $2(a^2+b^2)$ **549.** ա) $4+4\sqrt{3}i$, $\sqrt{3}+i$ բ) $2-2\sqrt{3}i$, $2\sqrt{3}-2i$
գ) $\sqrt{3}-i$, $\sqrt{2}-\sqrt{2}i$ **550.** ա) $-8i$ բ) $-8-8\sqrt{3}i$ գ) i **553.** ա) 1, $-0,5\pm i\sqrt{3}/2$ բ) ±1, $\pm i$
գ) ±1, $0,5\pm i\sqrt{3}/2$, $-0,5\pm i\sqrt{3}/2$ դ) -1, $0,5\pm i\sqrt{3}/2$ ե) $\sqrt{2}/2\pm i\sqrt{2}/2$, $-\sqrt{2}/2\pm i\sqrt{2}/2$
զ) $\pm i$, $\sqrt{3}/2\pm0,5i$, $-\sqrt{3}/2\pm0,5i$ **554.** ա) $\pm(\sqrt{2}+i\sqrt{2})/2$ բ) $\pm(\sqrt{2}-i\sqrt{2})$ գ) $\pm\sqrt{2}(3-i)/2$
դ) $\pm(3+i)$ ե) $-i$, $\pm\sqrt{3}/2+i/2$ զ) $i\sqrt{3}$, $\pm3/2-\sqrt{3}i/2$ է) ±2, $\pm2i$ ը) $3\sqrt{2}(1\pm i)/2$,
$3\sqrt{2}(-1\pm i)/2$ **556.** ա) $2+i$ բ) $-1-i\sqrt{3}$ գ) $-2+5i$ դ) $3+i\sqrt{5}$ **557.** ա) $(1\pm i\sqrt{3})/4$
բ) $(1\pm i\sqrt{3})/2$ գ) $2\pm i$ դ) $i(1\pm\sqrt{2})$ **559.** ա) $x^2-8x+20=0$ բ) $x^2+14x+52=0$ գ) x^2+2x+
$+5=0$ դ) $x^2-2\sqrt{7}x+23=0$ **561.** ա) $4(x-(1+i\sqrt{3})/4)(x-(1-i\sqrt{3})/4)$ բ) $(x-(1+i\sqrt{3})/2)\times$
$\times(x-(1-i\sqrt{3})/2)$ գ) $(x-2+i)(x-2-i)$ դ) $(x-(1+\sqrt{2})i)(x-(1-\sqrt{2})i)$ **562.** ա) $a\in(-\infty;0,25)$
բ) $a\in(-\infty;-2)\cup(2;\infty)$ **563.** ա) 0, $0,25$ բ) ±2 **564.** ա) 7 մ բ) 67 դմ գ) 671 սմ
565. ա) $\sqrt{2}+\sqrt{7}<\sqrt{3}+\sqrt{6}$ բ) $\sqrt{11}-\sqrt{5}<\sqrt{7}-\sqrt{2}$ գ) $(\sqrt{5}-1)^{3/4}<(\sqrt{5}-1)^{0,76}$ դ) $(\sqrt{3}-1)^{3,2}>$
$>(\sqrt{3}-1)^{13/4}$ **568.** ա) 2, 7 բ) $-4,75$, $-1/6$ գ) -2, $4/3$ **569.** ա) $[0,5;5,5]$ բ) $[-4,5;10,5]$
գ) $[-1,5;13,5]$ **570.** ա) $(21;\infty)$ բ) $(137;\infty)$ **571.** ա) 7 բ) 165 **573.** ա) 2 բ) $\mathrm{tg}^2\alpha$ գ) 1 դ) 1
574. ա) $-0,5$ բ) $-\sqrt{2}/12$ գ) 1 դ) 1 **575.** ա) $\sin\alpha<\mathrm{tg}\,\alpha<\cos\alpha<\mathrm{ctg}\,\alpha$ բ) $\cos\alpha<\mathrm{ctg}\,\alpha<$
$<\sin\alpha<\mathrm{tg}\,\alpha$ գ) $\mathrm{ctg}\,\alpha<\cos\alpha<\mathrm{tg}\,\alpha<\sin\alpha$ **576.** ա) $+$ բ) $-$ գ) $-$ **577.** $7/9$ **578.** ա) $\sqrt{15}/3$
բ) $2\sqrt{15}/9$ գ) $7/9$ **584.** $\mathrm{tg}\,A=1$, $\mathrm{tg}\,B=3$, $\mathrm{tg}\,C=2$ **585.** 30°, 30° **586.** 30°, 45° **587.** 45°,
30°, 105° **590.** ա) $1/9$ բ) $-79/81$ գ) $-239/729$ **591.** ա) $-0,96$ բ) $0,936$ գ) $-0,5376$
դ) $3\sqrt{10}/10$ ե) $\sqrt{10}/10$ զ) $0,352$ **592.** ա) $-(12+5\sqrt{3})/26$ բ) $-(12+5\sqrt{3})/26$ գ) $-7/17$ **595.** 15
599. ա) $(3\pi/5;\pi]$ բ) $[\pi/2;4\pi/7)$ գ) $(3\pi/4;\pi]$ **600.** ա) $(\pi k/4;\pi/4+\pi k/4)$ միջակայքերի

միավորումը բ) $(\pi k/2;\pi/2+\pi k/2)$ միջակայքերի միավորումը **601.** ա) $[\pi k;\pi/4+\pi k]$ միջակայքերի միավորումը բ) $[2k;0{,}5+2k]$ միջակայքերի միավորումը **602.** ա) $(-\infty;-0{,}5]\cup\cup[0{,}5;\infty)$ բ) $[-\pi+2\pi k;2\pi k]$ միջակայքերի միավորումը **603.** ա) $[-2;3]$ բ) $[1;\infty)$ գ) $[3;5{,}5]$ **604.** ա) $[-5;\infty)$ բ) $(0;3]$ գ) $[1;\infty)$ **605.** ա) $[0;1]$ բ) $[3{,}5;5]$ գ) $[-2;7]$ **606.** ա) կենտ է բ) ո՛չ զույգ, ո՛չ կենտ գ) զույգ է **607.** ա) զույգ է բ) ո՛չ զույգ, ո՛չ կենտ գ) ոչ՛ զույգ, ո՛չ կենտ **608.** ա) կենտ է բ) զույգ է գ) ո՛չ զույգ, ո՛չ կենտ **609.** ա) 2π բ) 2π գ) π **610.** ա) π բ) 6π գ) $\pi/5$ **611.** ա) π բ) π գ) π **612.** ա) դրական է $(\pi/4+2\pi k;5\pi/4+2\pi k)$ միջակայքերի միավորման վրա, բացասական՝ $(-3\pi/4+2\pi k;\pi/4+2\pi k)$ միջակայքերի միավորման վրա, $\uparrow[-\pi/4+2\pi k;3\pi/4+2\pi k]$, $\downarrow[3\pi/4+2\pi k;7\pi/4+2\pi k]$ բ) բացասական է, $\uparrow[-\pi/3+2\pi k/3;2\pi k/3]$, $\downarrow[2\pi k/3;\pi/3+2\pi k/3]$ գ) դրական է $(\pi/3+\pi k;5\pi/6+\pi k)$ միջակայքերի միավորման վրա, բացասական՝ $(-\pi/6+\pi k;\pi/3+\pi k)$ միջակայքերի միավորման վրա, $\uparrow(-\pi/6+\pi k;5\pi/6+\pi k)$ **613.** ա) դրական է, $\uparrow(-\infty;0]$, $\downarrow[0;\infty)$ բ) դրական է, $\uparrow[0;\infty)$, $\downarrow(-\infty;0]$ գ) դրական է, $\uparrow[0;\infty)$, $\downarrow(-\infty;0]$ **615.** ա) 7, -1 բ) 1, 0 **616.** ա) 2, 0 բ) $\sqrt{5}$, $-\sqrt{5}$ **620.** ա) $-\pi$ բ) $23\pi/12$ գ) $\pi/12$ դ) $-\pi/3$ **621.** ա) $-\sqrt{2}/2$ բ) $-0{,}5$ գ) 1 դ) 0 **622.** ա) $-1/3$ բ) $-0{,}25$ **623.** ա) $0{,}96$ բ) $2\sqrt{5}/5$ **625.** ա) $[0;1]$ բ) $(-\infty;-6]\cup[-2/7;\infty)$ գ) $(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;\infty)$ **626.** ա) $5\pi k$, $5\pi k+5\pi/6$ բ) $2\pi k/5$ **627.** ա) $5\pi/24+\pi k/4$ բ) $\pi/2+\operatorname{arctg}(0{,}75)+\pi k$ **628.** ա) $\pi/6+\pi k/2$, $\pi k/2$ բ) $\pm\arccos(0{,}2)+\operatorname{arctg}(0{,}75)+2\pi k$ **629.** ա) $\pi/6+\pi k/3$, $\pm\pi/9+2\pi k/3$ բ) $4\pi k$, $(-1)^k 2\pi/3+4\pi k$ **630.** ա) $\pi/4+\pi k/2$, $-\pi/2+2\pi k$, $(-1)^k\pi/6+\pi k$ բ) $\pi k/2$, $(-1)^k\pi/6+\pi k$ **631.** ա) $\pi/4+\pi k$, $\operatorname{arctg}3+\pi k$ բ) $-\pi/4+\pi k$, $\operatorname{arctg}4+\pi k$ **632.** ա) $\pm2\pi/3+2\pi k$ բ) $\pi+2\pi k$ **633.** ա) πk, $\pm\pi/6+\pi k$ բ) πk, $\pm\pi/6+\pi k$ **634.** ա) $\pm\pi/3+\pi k$, բ) $(-1)^{k+1}\pi/12+\pi k/2$ **635.** ա) $\operatorname{arctg}2+\pi k$, $-\operatorname{arctg}(2/3)+\pi k$ բ) $\pi/4+\pi k$, $\operatorname{arctg}2+\pi k$ **636.** ա) $5\pi/4+2\pi k$, $\operatorname{arctg}(0{,}5)+2\pi k$ բ) $-3\pi/4+\pi k$, $\operatorname{arctg}2-\pi k$, $k\in N$ **637.** ա) $\pi/2+\pi k$, $\pi/6+\pi k$ բ) $\pi/4+2\pi k$, $3\pi/4+2\pi k$, $(-1)^k\arcsin\left(\left(\sqrt{3}-1\right)/2\right)+\pi k$ **638.** ա) $(7/6+2k;1/6+2k)$, $(5/6+2k;-1/6+2k)$ բ) $\left((-1)^k/3+k,(-1)^k/3+k+3\right)$ **639.** ա) $(\pi+2\pi k,5\pi/2+2\pi k)$, $(\arccos(-0{,}2)+2\pi k,\arccos(-0{,}2)+3\pi/2+2\pi k)$, $(-\arccos(-0{,}2)+2\pi k,-\arccos(-0{,}2)+3\pi/2+2\pi k)$ բ) $(\pi/3-\pi k,-\pi/12+\pi k)$, $(2\pi/3-\pi k,-5\pi/12+\pi k)$

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Գեղամ Գրիգորի Գևորգյան
Արթուր Արտուշի Սահակյան

Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր

Ավագ դպրոցի
10 -րդ դասարանի դասագիրք
(բնագիտամաթեմատիկական հոսքի համար)

Հաստատված է Կրթության և գիտության նախարարության կողմից

Տպագրված է «Տիգրան Մեծ» ՓԲԸ տպարանում:
Թուղթը` օֆսեթ: Չափսը` 70x100 1/16: Տպագրական 13 մամուլ:
Պատվեր թիվ 834: Տպաքանակը` 13.000